회전관성 및 전단변형을 고려한 띠기초의 자유진동

Free Vibrations of Strip Foundations with Rotatory Inertia and Shear Deformation

이 준 규
Lee, Joon-Kyu

ABSTRACT

This paper deals with the flexural free vibrations of strip foundations. Based on dynamic equilibrium equations of a beam element resting on Winkler foundation, differential equations governing free vibration of strip foundation are derived, in which effects of rotatory inertia and shear deformation are included. For obtaining the natural frequencies, differential equations are solved by numerical methods. As the numerical results, relationships between natural frequencies and various strip parameters are obtained and presented in Tables and Figures.
Keywords: *strip foundation, natural frequency, rotatory inertia, shear deformation.*

1. 서 론

띠기초는 지반 위에서 상부 구조물을 지지해주는 가장 중요한 지반 구조물 중에 하나이다. 상부 구조물에 작용하는 동하중은 띠기초로 직접 전달되기 때문에 동적 안정성을 확보하기 위해서 띠기초의 자유진동 해석은 필수적이다(Major, 1980). 띠기초와 같이 지반-구조물 상호작용과 관련된 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로서 모형화할 수 있다. 지반공학에서 탄성지반은 일반적으로 무한개의 독립적인 스프링으로 표현하는 Winkler 지반으로 모형화한다(Wolf, 1985). 그동안 이러한 지반문제와 관련된 많은 연구들이 발표되었다(Yokoyama, 1996). 이 연구에서는 띠기초를 Winkler 지반으로 지지되는 보로 모형화하고 동적 평형방정식을 이용하여 휨 자유진동을 지배하는 연립미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였으며, 띠기초의 단면은 실용성을 높이기 위하여 변화폭 변단면을 채택하였다.

2. 변화폭 띠기초

그림 1은 길이가 l인 띠기초의 변화폭 변단면을 나타내고 있다. 단면은 직사각형이고, 단면깊이 d는 일정하다. 좌측단($(x=0)$에서 단면폭은 b_a, 중앙$(x=l/2)$에서 단면폭은 b_m이며, 좌우 대칭단면이다. 임의 좌표 x에서 단면폭 b는 이 그림과 같이 선형변화를 한다. 변화폭 변단면을 수학적인 수식으로 나타내기 위하여 다음과 같이 단면비 r을 표시한다.

$$r = b_m / b_a \tag{1}$$

* 정회원 · 연세대학교 대학원 토목공학과 석사과정 E-mail: hereis2u@hanmail.net

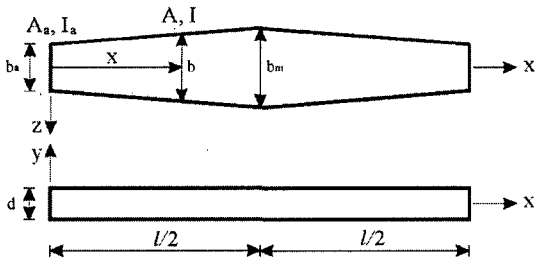

그림 1 변화폭 변단면

위의 식을 이용하면 임의 좌표 x에서 띠기초의 변화폭 b는 다음과 같이 1차식으로 표현할 수 있다.

$$b = b_a[a_1(x/l) + a_2] \tag{2a}$$

$$a_1 = 2(r-1),\ a_2 = 1 : 0 \le x \le l/2;\ a_1 = -2(r-1),\ a_2 = 2r-1 : l/2 \le x \le l \tag{2b}$$

위의 식으로부터 임의 좌표 x에서 띠기초의 단면적 A 및 휨 축인 z축에 대한 단면2차모멘트 I를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = bd = A_a[a_1(x/l) + a_2],\ I = bd^3/12 = I_a[a_1(x/l) + a_2] \tag{3,4}$$

위에서 $A_a = b_a d$, $I_a = b_a d^3/12$ 이며 좌단에서 단면적 및 단면2차모멘트를 나타낸다.

3. 수학적 모형

그림 2는 지반계수가 K인 Winkler 지반으로 지지되고 있는 보 즉 띠기초를 나타낸다. 점선은 정적 상태를 나타내고 실선은 자유진동하는 진동형을 나타낸다. 띠기초의 동적 변위는 $Y(x,t) = y\sin(\omega_i t)$로 표현되는 조화진동을 한다. 여기서 t는 시간, y는 x만의 함수인 진폭, ω는 rad/s의 단위를 갖는 고유진동수, i는 모드(mode)번호이다.

그림 3은 자유진동하는 띠기초의 미소요소에 작용하는 하중들을 나타낸다. 합응력인 전단력 및 휨 모멘트는 V, M으로, 수직 관성력 및 회전 관성력은 F, T로 , 지반반력은 q로 표시되어 있다. 여기서 F, T, q는 단위길이당의 하중이다.

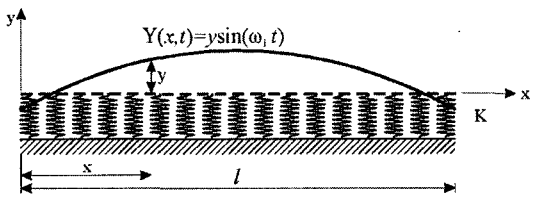

그림 2 진동형 및 제 변수

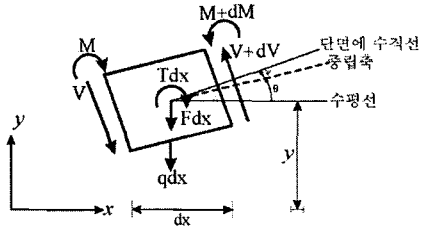

그림 3 미소요소에 작용하는 하중

그림 3에서 $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$을 이용하면 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dV}{dx} - F - q = 0, \quad V + \frac{dM}{dx} - T = 0 \tag{5,6}$$

동적 평형방정식에 포함되어 있는 관성력 F, T는 조화진동식을 이용하면 다음 식 (7), (8)과 같이 나타낼 수 있고(Tedesco *et. al.*, 1999), 지반반력 q는 K, b 및 y를 이용하여 다음 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$F = -\rho\omega^2 Ay, \quad T = -R\rho\omega^2 I\frac{dy}{dx}, \quad q = Kby \tag{7~9}$$

여기서 ρ는 질량밀도이고, 식 (8)에서 R은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표이며 $R=0$이면 회전관성을 고려하지 않는 경우이고 $R=1$이면 회전관성을 고려하는 경우이다.

그림 3에서와 같이 총 단면회전각은 $dy/dx = \theta + \psi$로 순수 휨 M에 의한 단면회전각 θ와 전단력 V에 의한 회전각 ψ로 구성된다(Tedesco *et. al.*, 1999). $V = \lambda AG\psi$로 표시할 수 있고 여기서, α는 단면형상계수이며 직사각형의 경우에 $\alpha = 5/6$이고 AG는 전단강성이다. 따라서 V는 다음 식 (10)과 같이 표시할 수 있다. 휨 모멘트 M은 휨 강성 EI와 곡률 $d\theta/dx$를 이용하여 다음 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = \alpha AG\left(\frac{dy}{dx} - \theta\right), \quad M = EI\frac{d\theta}{dx} \tag{10,11}$$

연립미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \ \eta = \frac{y}{l}, \ g = \frac{G}{E}, \ s = \frac{l}{\sqrt{I_a/A_a}}, \ k = \frac{Kb_a l^4}{\pi^4 EI_a}, \ C_i = \omega_i l^2\sqrt{\frac{\rho A_a}{EI_a}} \tag{12~17}$$

여기서 (ξ, η)는 무차원 직교좌표계 즉 무차원 축방향 좌표 및 무차원 진폭이고, g는 전단변수, s는 세장비, k는 무차원 지반변수, C_i는 무차원 고유진동수이다.

식 (5), (6)의 동적 평형방정식과 이상의 식들을 모두 이용하면 Winkler 지반으로 지지되는 떠기초의 휨 자유진동을 지배하는 연립미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\frac{a_1}{a_1\xi + a_2}\frac{d\theta}{d\xi} + \alpha s^2 g\theta - \left(\alpha s^2 g + \frac{RC_i^2}{s^2}\right)\frac{d\eta}{d\xi} \tag{18}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{a_1}{a_1\xi + a_2}\left(\theta - \frac{d\eta}{d\xi}\right) + \left(\frac{\pi^4 k}{\alpha s^2 g} - \frac{C_i^2}{\alpha s^2 g}\right)\eta \tag{19}$$

식 (10), (11)을 이용하면 떠기초의 자유단($\xi = 0$ 및 $\xi = 1$)에서 경계조건을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \tag{20,21}$$

4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 유도한 연립미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수 C_i와 진동형 η, θ를 산정하였다. 연립미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan *et. al.*, 1969)을 이용하고 미분방정식의 고유치 C_i는 Regula-Falsi 법(Carnahan *et. al.*, 1969)을 이용하였다. 띠기초의 무차원 변수 g, r, s, k의 변화에 따른 C_i의 산정에서 전단변형효과는 기본적으로 고려하였으며 회전관성효과의 영향을 별도로 분석하였다. 수치해석 예에서 $i=1,2,3,4$의 최저차 4개 모드에 대하여 C_i와 η, θ를 산출하였다.

표 1은 회전관성이 무차원 고유진동수 C_i에 미치는 영향을 분석한 표이다. 회전관성은 C_i를 감소시키는 요인이며 저차모드에서 보다 고차모드에서, 큰 세장비에서 보다 작은 세장비에서 회전관성의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다. 회전관성을 고려하면 변위가 증가되기 때문에 동일한 에너지로 자유진동하는 구조물의 고유진동수를 감소시키는 일반적인 구조이론에 부합되는 것을 알 수 있다.

표 1 회전관성이 무차원 고유진동수 C_i에 미치는 영향($g=0.4, r=1.2, k=50$)

세장비, s	R^*	무차원 고유진동수, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
50	0	73.46	92.57	134.53	195.58
	1	72.76	90.72	130.27	186.95
	비 율**	0.990	0.980	0.968	0.956
100	0	73.50	93.38	138.75	207.75
	1	73.32	92.89	137.51	205.00
	비 율	0.998	0.995	0.991	0.987

* R=0: 회전관성 고려하지 않음 R=1: 회전관성 고려함 ** 비율= (R=1의 C_i) / (R=0의 C_i)

표 2는 전단변수 g가 무차원 C_i에 미치는 영향을 분석한 표이다. g값이 증가함에 따라서 C_i값은 증가하며 고차모드에서 그 영향력이 더 큰 것을 알 수 있다. 띠기초의 재료는 일반적으로 콘크리트이므로 이 이후의 변수연구에서는 콘크리트의 g값 0.4를 사용한다.

표 2 전단변수 g가 무차원 고유진동수 C_i에 미치는 영향($r=1.2, s=50, k=50$)

전단변수, g	무차원 고유진동수, C_i			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0.30	72.74	90.41	128.76	182.92
0.35	72.75	90.59	129.61	185.18
0.40	72.76	90.72	130.27	186.95
0.45	72.76	90.82	130.79	188.36
0.50	72.76	90.91	130.21	189.53

그림 4는 $C_i - r$ 곡선을 나타낸다. 단면비 r이 증가함에 따라 일반적으로 무차원 고유진동수 C_i는 증가한다. 제3모드에서는 작은 r값의 범위에서 감소하는 구간도 일부가 있음을 알 수 있다. 이 그림으로부터 대략적으로 r>1인 범위에서는 C_i값의 변화가 비교적 작은 것을 알 수 있다. 따라서 r>1인 범위에서 고유진동수의 크기를 증가시킬 목적으로 단면비를 증가시키는 것은 비효율적이다.

그림 5는 $C_i - s$ 곡선을 나타낸다. 세장비 s가 증가함에 따라서 무차원 고유진동수 C_i는 증가한다. s값이 50이하의 범위에서는 C_i의 증가폭이 비교적 크지만 그 이상의 s 값의 범위에서는 상대적으로 증가폭이 매우 작아서 C_i값이 일정 값에 수렴되는 현상을 보이고 있다.

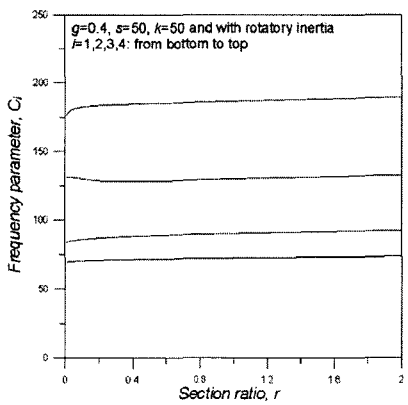

그림 4 $C_i - r$ 곡선

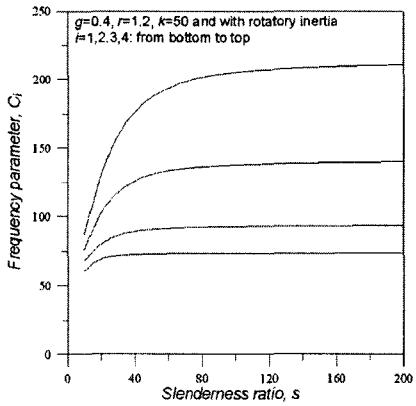

그림 5 $C_i - s$ 곡선

그림 6은 $C_i - k$ 곡선을 나타낸다. 지반변수 k가 증가함에 따라서 무차원 고유진동수 C_i는 크게 증가한다. C_i값을 증가시키기 위하여 k값을 증가시키는 것은 매우 효율적이고 적당한 지반의 치환을 통하여 k값을 변화시킬 수 있다. C_i의 증가율은 저차모드에서는 비선형적인 증가를 보이지만 고차모드에서는 거의 선형적인 증가를 보이고 있다.

그림 7은 자유진동하는 띠기초의 진동형을 나타낸다. 종축은 진폭 축인 η, θ축이고 임의 축척이다. 띠기초의 기하적 형상이 좌우 대칭 구조이므로 진동형은 대칭 진동형과 역대칭 진동이 되어야 한다(Timoshenko *et. al.*, 1974). 이 그림으로부터 홀수 모드번호($i = 1, 3$)는 대칭진동형이고, 짝수 모드번호($i = 2, 4$)는 역대칭 진동형인 것을 알 수 있다.

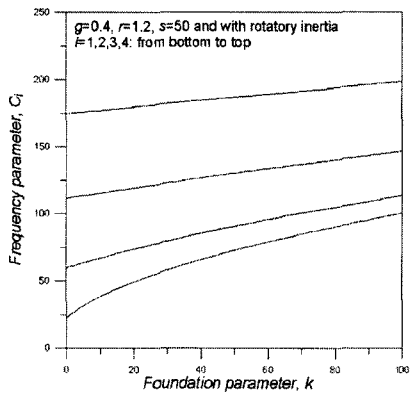

그림 6 $C_i - k$ 곡선

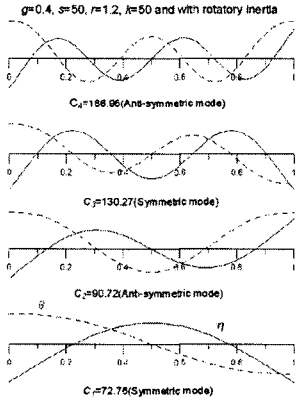

그림 7 진동형

5. 결 론

이 논문은 띠기초의 휨 자유진동에 관한 연구이다. 수치해석 결과로부터 다음의 결론을 얻었다.

1. 회전관성을 고려하면 변위의 증가를 초래하여 무차원 고유진동수 C_i는 오히려 감소하고 그 영향력은 고차모드에서 더 크다.
2. 전단변수 g가 증가하면 무차원고유진동수 C_i는 증가하고 그 영향력은 고차모드에서 더 크다.
3. 단면비 r이 증가하면 일반적으로 무차원 고유진동수 C_i는 증가한다. r>1인 범위에서는 r<1인 범위에서 보다 그 영향력은 더 작다.
4. 세장비 s가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i는 증가하며 s 값이 증가함에 따라서 C_i 값은 일정 값에 수렴하는 현상을 보이고 있다.
5. 지반변수 k가 증가하면 무차원 고유진동수 C_i는 증가한다. C_i의 증가율은 저차모드에서는 비선형적인 증가를 보이며 고차모드에서는 거의 선형적인 증가를 보이고 있다.
6. 띠기초 진동형의 홀수 모드는 대칭 진동형이고, 짝수 모드는 역대칭 진동형이다.

이상의 연구 결과를 활용하면 상부구조에 동하중이 작용하는 띠기초 설계에 유용한 동적 설계자료를 제공할 수 있어서 띠기초의 동적 안정성 확보에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O. (1969) Applied Numerical Method. *John Wiley & Sons, Inc.*, N.Y., USA.

Major, A (1980) Dynamics in Civil Engineering, *Collect's Holdings Limited*, London, UK.

Tedesco, J.W., Mcdougal, W.G. and Ross, C.A. (1998) Structural Dynamics, *Addison Wesley Longman, Inc.*, C.A., USA.

Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver W. (1974) *Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, Inc.*, N.Y., USA.

Wolf, J.P. (1985) Dynamics Soil-Structure Interaction, *Prentice-Hall, Inc.*, N.J., USA

Yokoyama, T. (1996) Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations, *Computer & Structures*, 61, pp. 995-1007.