

봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성산정을 위한 유한요소해석

A FEA for the Stiffness Estimation of the Transverse Kong-Po in Dae-Woong-Jeon of Bongjeong-Sa

정성진* · 홍성걸** · 김남희*** · 이영욱**** · 황종국***** · 배병선*****

Jung, Sung-Jin · Hong, Sung-Gul · Kim, Nam-Hee · Lee, Young-Wook · Hwang, Jong-Kook · Bae, Byoung-Sun

ABSTRACT

Among the various problems involved in the structural analysis of the Korean traditional wooden structure, the analytical model for the Kong-Po is controversial subject as usual. While some experiments are tried for establishing the basis of analytical models, most of these experiments are performed using scale down specimens. So, it is not possible to apply these experimental results to structural analysis of Korean traditional wooden structure directly.

A numerical study for analogizing the stiffness of full scale Kong-Po structure is performed on the basis of experimental specimen. Some parameter studies using finite element method are made in this study. The finite element analysis used in this study is geometric material nonlinear analysis. The stiffness of Kong-Po structure found out in this study can be used for modelling the joints of the Korean traditional wood structure in frame analysis.

Keywords: the Korean traditional wooden structure, Analytical model, Kong-Po, Stiffness

1. 서론

최근 봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성을 산정하기 위한 실험적 연구가 수행된 바 있으나, 여러 가지 제약조건으로 인해 이 연구에서는 실제 구조물의 1/2 규모를 대상으로 실험이 진행되었다. 전통목구조 건물에 대한 구조해석의 관점에서 볼 때 이 연구는 매우 의미 있는 것으로 볼 수 있으나, 실험으로부터 구한 강성을 실제 구조물 해석에 바로 적용할 수 없는 한계성을 지니고 있다. 따라서 축소모형 실험으로부터 구한 봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성을 전통목구조 골조해석에 적용할 수 있도록 하기 위해서는 실험결과를 근거로 실제 크기의 공포 강성을 유추하기 위한 해석적 연구가 필요한 것으로 판단할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 전술된 실험적 연구가 지니고 있는 한계성을 극복하기 위하여 봉정사 대응전 보 방

* 정희원 · 한남대학교 건축공학과 부교수 E-mail: jsjarch@hannam.ac.kr

** 정희원 · 서울대학교 건축공학과 부교수 E-mail: sglhong@snu.ac.kr

*** 정희원 · 서울대학교 교량설계핵심기술연구단 E-mail: namheek@snu.ac.kr

**** 정희원 · 군산대학교 건축공학과 부교수 E-mail: leeyu@kunsan.ac.kr

***** 정희원 · 한국전통문화학교 전통건축학과 조교수 E-mail: jkhwang@nuch.ac.kr

***** 비희원 · 국립문화재연구소 건조물연구실장 E-mail: bsbae@nricp.go.kr

향 공포의 강성을 해석적으로 구하고 있다. 본 연구에서는 먼저 실험체를 대상으로 유한요소해석을 수행하여 해석적으로 강성을 구하기 위한 토대를 마련한 다음, 실제 크기의 구조물을 해석하여 봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성을 구하고 있다.

2. 유한요소해석 모형

대응전 보 방향 공포의 강성을 구하기 위한 실험체의 구조형상은 그림 1과 같으며, 각 부재의 단면 크기는 표 1과 같다. 실험체의 각 부분이 갖고 있는 역학적 의미가 다르므로 이들을 역학적 특성에 따라 구분할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 창방, 평방, 도리방향 첩자 및 도리 부위를 1영역(Zone 1), 가력 부위 및 기둥하단의 지지 부위를 2영역(Zone 2), 그림 1에서 면내방향에 존재하는 각 부재들을 3영역(Zone 3)으로, 3영역에 속하는 부재들 사이의 접촉면을 4영역(Zone 4)으로 구분한다.

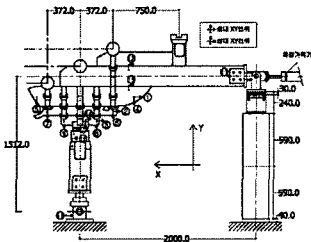


그림 1. 공포 부분골조

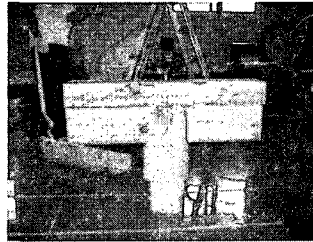


그림 2. 주두와 평방간의 축

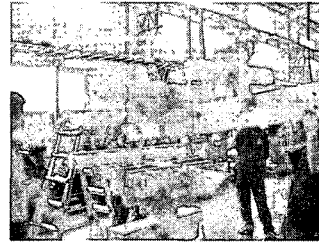


그림 4. 제3제공과 대량사이 축

표 1. 각 부재의 치수(mm)

영역(zone)	부재	부재 치수(X×Y×Z)
zone 1	창방	126×198×940
	평방	204×114×940
	도리방향 첩자 1	54×108×400
	도리방향 첩자 2	54×108×750
	도리방향 첩자 3	54×216×1000
	도리	108×138×246
zone 3	기둥하부	∅425×468.8
	기둥상부	∅411×79.2
	주두	170×66×180
	제 1제공	429×108×54
	제 2제공	834×108×54
	제 3제공	1290×216×144
	대량	2073×228×187
	초량	864×153×54
	대공	144×210×144

1영역에 속하는 부재들은 그림 1에서 면의방향으로 걸쳐지는 부재들을 나타내고 있다. 이들의 결구 현황을 살펴보면, 먼저 창방과 평방은 두 개의 부재가 주먹장이음으로 기둥 위에서 연결되어 있으며, 평주와 창방 사이 및 평방과 창방 사이에는 축이 없다. 도리방향 첨차는 살미첨차에 엄힐장으로 연결되어 있으며 이들 사이에는 축이 없다. 도리는 살미첨차, 대량 및 초량에 단순히 얹혀있으며 이들 사이에도 축이 없다. 엄밀히 보면 1영역에 속하는 부재들 사이의 접촉효과가 고려되어야 하나, 실험에 의하면 공포의 강성은 주로 그림 1에서 면내방향에 존재하는 부재들 간의 접촉에 의해 지배되는 것으로 나타났으며, 하중 재하 시 면의방향 부재들이 강제거동을 보임으로 이 부분에서의 접촉효과를 무시하여도 좋을 것으로 판단된다. 따라서 본 연구에서는 평주와 창방, 도리 방향 첨차와 보 방향 첨차 사이에는 접촉효과가 없는 것으로 가정한다. 다만 이들의 무게는 접촉면에서의 거동에 영향을 미칠 수 있으므로 이를 하중으로 고려한다. 한편 도리는 지붕하중을 받아 하부의 공포로 전달하는 역할만 하는 것으로 볼 수 있으므로 유한요소해석모형에서는 도리를 제외하고 수직하중의 가력점으로만 고려한다.

2영역에 속하는 기둥과 대량에는 각각 2 개의 강판이 설치되어 있다. 즉, 기둥에는 하부의 지지점과 기둥 하부면을 연결하기 위한 강판 1 및 강판 1과 기둥을 연결하기 위한 강판 2가 있으며, 대량에는 우측단부의 가력점과 대량을 연결하기 위한 강판 3 및 강판 3과 대량을 연결하기 위한 강판 4가 설치되어 있다. 여기서 기둥과 대량은 거의 강체처럼 거동할 것이므로 강판 2와 강판 4의 영향은 무시하여도 좋을 것으로 판단된다. 다만 강판 1과 강판 3은 기둥의 하부면과 대량 우측면이 평면을 유지하도록 이들의 변형을 구속하게 될 것이므로 해석 시 변위의 구속조건을 이용하여 이를 고려하도록 한다.

3영역에 속하는 부재들을 살펴보면, 먼저 평방은 창방과 평주 위에 단순히 얹혀져있으며 이들 사이에는 축이 없다. 주두는 평방 위에 얹혀져있으며, 그림 2와 같이 1개의 축으로 평방과 연결되어 있다. 제 1제공은 주두 위에 단순히 얹혀져있으며, 제 2제공은 제 1제공 위에, 제 3제공은 제 2제공 위에 단순히 얹혀져있다. 대량은 제 3제공 위에 얹혀져있으며, 제 3제공과 대량 사이에는 그림 3과 같이 두 개의 축으로 연결되어 있다. 초량은 대량 위에 단순히 얹혀져있으며, 초량과 대공 사이에는 축이 없고 부재 사이에 초기 간격이 없다. 3 영역에 해당하는 부재들에 대한 유한요소해석모형 작성 시 대공 위 주두는 도리와 마찬가지로 지붕으로부터 전달되는 수직하중을 받아 대량으로 전달하는 역할만을 수행하므로 수직하중의 가력점으로만 고려하여도 해석결과에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 판단된다.

3 영역에서 살펴본 바와 같이 유한요소해석모형에서는 창방과 평방 및 평주 사이, 평방과 주두 사이, 주두와 제 1제공 사이, 제 1제공과 제 2제공 사이, 제 2제공과 제 3제공 사이, 제 3제공과 대량 사이, 대량과 초량 사이, 초량과 대공 사이에서 접촉이 발생하는 것으로 가정하여 이들을 4영역으로 구분한다. 다만 여기서 평방과 주두 사이 및 제 3제공과 대량사이에 존재하는 축으로 연결되는 부분에서는 부재 사이의 전단방향 변위가 같아지도록 접촉요소의 자유도를 구속한다.

전술된 가정에 따라 공포 부분에 대한 유한요소해석 모형을 작성하면 다음 그림 4와 같아진다. 해석에서는 모든 부재를 평면응력요소(plane stress element)로 모형화하며, 부재 간 접촉부위는 모두 절점요소(joint element)를 이용하여 모형화한다.

그림 4에서 W1~W4는 각각 도리를 통해 전달되는 지붕하중으로 이들의 값은 각각 W1=12,360N, W2=265N, W3=4,636N, W4=8,343N이며, P는 액츄에이터를 통해 구조물에 재하되는 횡하중으로써 해석에서는 실험에서 사용한 하중 값을 입력한다. 그림 4의 해석모형에서 굵은 선으로 표시된 부분은 접촉부분을 나타내고 있다.

본 연구에서 고려하고 있는 주요 해석변수들은 부재 사이의 마찰계수($\mu=0.2\sim0.6$)와 구조물의 크기에 따른 강성의 변화이다. 본 연구에서는 공포 부재 사이에서의 접촉문제를 고려하기 위하여 기하비선형해석을 수행

하며, 부재 사이의 접촉효과를 고려하기 위하여 본 연구에서는 절점요소(joint element)를 사용한다.

본 연구에서는 접촉면에서 부재 사이의 접촉효과를 고려하기 위하여 그림 5와 같이 초기 간격을 갖는 접촉/스프링 모형(contact/spring with initial gap model)을 사용하여 두 부재 사이의 갭이 닫히게 될 경우에만 절점요소가 구조 응답에 영향을 줄 수 있도록 한다.

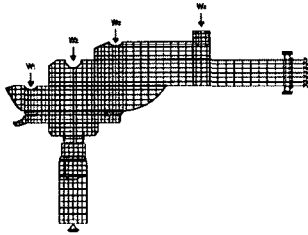


그림 4. 유한요소망

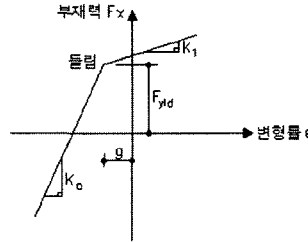


그림 5. 접촉스프링 이력모형

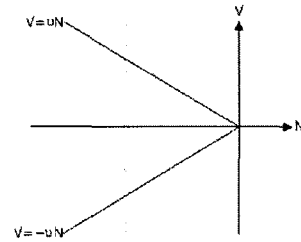


그림 6. 압축력과 전단력 관계

한편, 본 연구에서는 절점요소의 거동을 그림 6과 같이 모어의 항복이론에 따라 다음 식 (1)과 같이 가정한다.

$$|V| = f(N) \tag{1}$$

여기서 $N = k_a(\delta_2 - \delta_1)$ 의 관계를 가지므로, 식 (1)과 그림 8로부터 전단방향의 스프링 강성을 다음 식 (2)와 같이 구할 수 있다.

$$|V| = \mu \cdot N = \mu \cdot k_a \cdot (\delta_2 - \delta_1) = k_s (\delta_2 - \delta_1) \tag{2}$$

따라서 본 연구에서는 전단방향 스프링강성을 다음 식 (3)과 같이 가정한다.

$$k_s = \mu \cdot k_a \tag{3}$$

3. 매개변수 해석

본 연구에서는 봉정사 대웅전 보 방향 공포의 강성을 해석적으로 산정하기 위하여 절점요소의 강성을 변화하여 가면서 매개변수해석을 수행한다. 매개변수해석에서는 절점요소의 강성이 해석결과에 중대한 영향을 미치게 되므로, 먼저 각 부재의 강성이 어느 정도의 크기를 갖는지 파악해 볼 필요가 있다. 따라서 그림 7과 같은 평면응력요소(plane stress element)의 강성행렬 $[k]$ 를 구하면 다음 식 (4)와 같이진다.

$$[k] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [E] [B] t \cdot dx \cdot dy \tag{4}$$

여기서, t =요소의 두께, dx, dy = x, y 방향의 좌표값 증분

식 (4)에서 행렬 [B]는 변위-변형률행렬(strain-displacement interpolation matrix)로써 다음 식 (5)와 같이 산정될 수 있으며, 행렬 [E]는 구성방정식으로써 다음 식 (6)과 같다.

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 & (b+y) & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & (a+x) & 0 & (a-x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & (b-y) & (a+x) & (b+y) & (a-x) & -(b+y) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

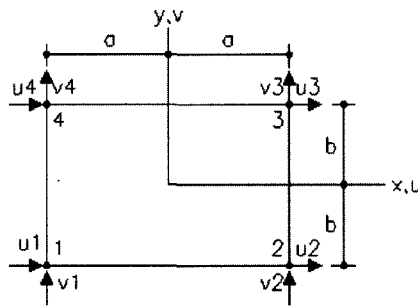


그림 7, 4절점 평면응력요소

식 (5)~식 (6)에서 $1/4ab$ 를 p , $E/(1-\nu^2)$ 을 q , $(1-\nu)/2$ 를 r 로 치환한 다음, u_1 자유도(1번 자유도)와 v_1 자유도(2번 자유도)에 해당하는 강성행렬을 구하면 다음 식 (7)~식 (8)과 같아진다.

$$k_{11} = \frac{qt}{3} \left(\frac{b}{a} + r \frac{a}{b} \right) \quad (7)$$

$$k_{22} = \frac{qt}{3} \left(r \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \quad (8)$$

본 연구에서는 부재 사이의 접촉을 나타내기 위하여 절점요소를 사용하고 있으므로 부재 사이의 수직변위를 나타내는 자유도가 일차적인 관심의 대상이다. 따라서 $k_{22}=f$, $b/a=g$ 라 하면, 식 (8) 및 이의 미분은 다음 식 (9)~식 (10)과 같아진다.

$$f = \frac{qt}{3} \left(rg + \frac{1}{g} \right) \quad (9)$$

$$f' = \frac{qt}{3} \left(r - \frac{1}{g^2} \right) \quad (10)$$

따라서 식 (10)으로부터 2번 자유도에 해당하는 강성 k_{22} 의 최소치를 다음 식 (11)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1}{r}} \rightarrow k_{22, \min} \quad (11)$$

여기서, 만일 $v=0.3$ 라 하면 $r=0.35$ 가 되므로 k_{22} 의 최소치는 다음 식 (12)와 같아진다.

$$k_{22, \min} = \frac{1}{3}qt(2\sqrt{0.35}) = \frac{1}{3}qt(1.18322) = 0.43341Et \quad (12)$$

따라서 본 연구에서 고려하고 있는 해석모형의 경우 부재의 두께 $t=54\text{mm}$ 가 가장 작은 경우이므로 이때의 강성행렬 최소치는 다음 식 (13)과 같아진다.

$$k_{22, \min} = 0.43341 \times 6,867\text{N/mm}^2 \times 54\text{mm} = 1.60717 \times 10^5\text{N/mm} \quad (13)$$

식 (8)로부터 b/a 가 가장 작은 요소 또는 가장 큰 요소일 때 k_{22} 가 최대치를 갖게 됨을 알 수 있다. 일반적으로 요소의 강성행렬은 $0.25 \leq b/a \leq 4$ 일 때 안정적인 것으로 볼 수 있으므로, 이 구간에서 $v=0.3$ 일 때 k_{22} 의 최대치는 구해보면 다음 식 (14)와 같아진다.

$$k_{22, \max} = \frac{qt}{3} \left(r \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = 0.36630Et(0.35 \times 0.25 + 4) = 1.49725Et \quad (14)$$

따라서 본 연구에서 고려하고 있는 해석모형의 경우 부재의 두께 $t=1,000\text{mm}$ 가 가장 큰 경우이므로 이때의 강성행렬 최대치는 다음 식 (15)와 같이 산정할 수 있다.

$$k_{22, \max} = 1.49725Et = 1.49725 \times 6,867\text{N/mm}^2 \times 1,000\text{mm} = 1.02816 \times 10^7\text{N/mm} \quad (15)$$

표 1과 같은 치수를 갖는 각 부재 강성의 최소치 및 최대치 산정하면 수직강성이 $1.60717 \times 10^5 \sim 1.02816 \times 10^7$ 사이에 존재하게 되므로 수치해석적 안정성을 확보하기 위하여 절점요소의 강성이 $r \times 10^4$ 정도의 크기를 갖는 것으로 가정하여 초기해석을 수행한 후, 해석결과를 근거로 적정 r 값을 찾는다. 본 연구에서 수행한 해석결과를 분석하면 $r=2.92398$ 일 때가 실험 결과와 가장 근사한 결과를 보이고 있으므로 이때의 해석결과를 근거로 구조물의 거동을 분석한다.

본 연구에서는 절점요소가 수직방향 압축력을 받을 때만 강성을 갖도록 절점요소의 이력특성을 입력한다. 여기서 주목할 점은 인장강성을 모두 0으로 가정할 경우, 구조시스템이 불안정해지므로 이들의 값은 구조시스템의 거동에 큰 영향을 미치지 않도록 압축강성의 $1/10^3$ 이 되도록 조정한다. 수직방향 강성이 결정되면 식 (3)을 이용하여 전단방향 강성을 산정한다.

한편 목재의 경우 재료특성이 방향에 따라 달라지므로 이를 고려하여야 하나, 본 연구에서는 부재 내부의 응력보다는 구조시스템 전체거동을 주로 분석하고자 하므로, 전술된 바와 같이 탄성계수 $E=6867.00\text{N/mm}^2$, 포아송비는 $v=0.3$ 로 가정한다.

전술된 개념을 이용하여 봉정사 대응전 보 방향 골조를 해석한 결과를 분석하면, 변형, 응력 및 절점요소 응력 등은 마찰계수 μ 와 관계없이 일정한 모습을 보이고 있다. 마찰계수 μ 의 변화에 따른 수평강성의 변화를 살펴보면 표 2와 같다.

해석결과에 의하면, 표 2에서 볼 수 있는 바와 같이 봉정사 대응전 보 방향 공포 구조물의 수평강성은 마찰계수에 큰 영향을 받지 않는 것으로 나타났다. 따라서 본 연구에서 해석 변수로 가정하였던 부재 사이의

마찰계수 변화와 구조물의 크기 증 후자의 경우만이 변수가 될 수 있음을 알 수 있다.

실험체에 대한 해석결과로부터 절점스프링의 강성을 2.92398×10^4 로 가정하였을 때 실험결과와 해석결과가 근사한 값을 보이므로, 봉정사 대응전 보 방향 공포의 실제 강성을 추정하기 위해 전술된 해석적 개념에 따라 실제 크기의 공포구조에 대한 해석모형을 작성하여 해석을 수행한다. 여기서 적용한 목재의 마찰계수는 $\mu = 0.3$ 이다.

표 2. 마찰계수에 따른 수평강성의 변화

해석 단계	강성		
	$\mu=0.3$	$\mu=0.45$	$\mu=0.6$
1	-	-	-
2	3.16651E+02	3.20423E+02	3.22453E+02
3	3.10028E+02	3.12429E+02	3.13537E+02
4	2.35457E+02	2.36919E+02	2.37283E+02
5	8.74439E+01	9.82437E+01	9.68701E+01
6	4.35529E+01	5.33761E+01	5.33705E+01
7	8.51986E+00	2.81311E+01	2.77317E+01
8	-2.41930E-01	5.11832E+00	4.95288E+00
9	-1.11565E+01	-8.74048E-02	-6.85659E-02
10	-1.47789E+01	-6.21596E+00	-6.40136E+00
	-	-1.48752E+01	-1.48775E+01
	-	-1.49507E+01	-1.47826E+01

표 3. 실제 구조물의 수평강성 변화($\mu=0.3$)

해석 단계	강성		
	4배	8배	16배
1	-	-1.93E-07	
2	1.02E+03	1.56E+03	2.14E+03
3	9.97E+02	1.35E+03	2.13E+03
4	8.06E+02	1.19E+03	2.12E+03
5	4.31E+02	7.14E+02	1.27E+03
6	1.77E+02	4.07E+02	2.74E+02
7	4.43E+01	1.96E+02	1.49E+02
8	-4.24E+00	1.00E+02	6.30E+01
9	-4.46E+01	4.84E+01	3.80E+01
10	-6.17E+01	-5.63E+00	1.25E+01
		-2.04E+01	-5.20E+00
		-3.67E+01	

실제 크기의 구조물에 대한 해석 시 절점요소의 스프링강성이 미치는 영향을 분석하기 위하여 절점요소의 강성을 4배, 8배, 16배로 변화시켜 가면서 해석을 수행한다. 이 때 절점요소의 강성변화에 따른 봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성변화는 다음 그림 8과 같다.

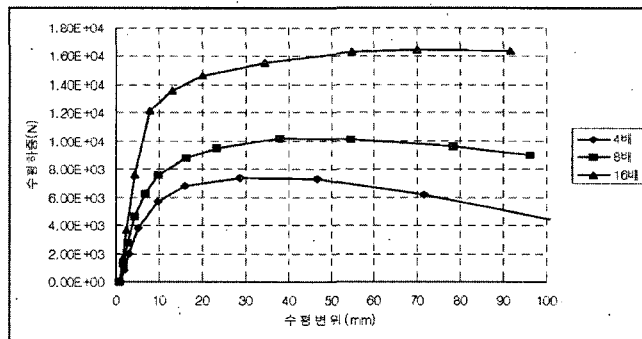


그림 8. 절점요소의 강성변화에 따른 수평강성 변화

여기서 부재 사이를 연결하는 스프링강성이 면적에 비례한다는 개념으로 볼 때, 스프링강성을 4배로 한 경우가 맞다고 본다면 실제 공포시스템의 횡방향강성은 약 1,020N/mm 정도가 되어 1/2 공포시스템의 수

평방향 강성의 약 3.2배가 될 것으로 추정할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 봉정사 대응전 보 방향 공포의 강성을 산정하기 위해 실험체를 대상으로 먼저 유한요소 해석을 수행한 후, 실험결과와 해석결과를 비교하여 공포구조물과 같이 부재간 마찰거동에 의해 하중을 지지하는 구조시스템을 해석하기 위한 모형화 방법을 정립한 다음, 이를 근거로 실제 크기의 공포 구조물을 해석하여 봉정사 대응전 보 방향 공포의 수평강성을 추정하였다. 본 연구에서 구한 결론은 다음과 같다.

- 1) 봉정사 대응전 보 방향 공포의 거동은 절점요소의 강성에 매우 민감하므로 절점요소의 강성을 매개변수로 한 해석결과 절점요소의 수직강성을 $2.92398 \times 10^4 \text{N/mm}$ 로 가정하였을 때 실험결과와 거의 근사한 결과를 구할 수 있다.
- 2) 본 연구에서 가정한 모형화 기법을 적용할 경우, 전체구조물의 변형, 각 유한요소의 응력 및 절점요소의 응력 변화 등과 같은 구조물의 전반적인 거동은 마찰계수 μ 와 관계없이 일정한 모습을 보이게 된다. 따라서 공포구조물과 같은 구조시스템의 해석에서는 마찰계수의 변화보다는 절점요소의 수직강성을 합리적으로 가정하는 것이 더 중요하다.
- 3) 절점요소의 수직강성은 면적에 비례하는 개념이므로 실제 크기의 구조물 해석에서는 1/2 축소 실험체 해석모형에서 사용한 수직강성의 4배로 가정되는 것이 합리적인 것으로 볼 수 있다. 이 경우, 실제 공포시스템의 수평방향강성은 약 $1,020 \text{N/mm}$ 정도가 되어 1/2 축소 실험체로부터 구한 수평방향강성의 약 3.2배가 되는 것으로 추정할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 2005년도 국립문화재연구소 연구비 지원과제 '목조문화재 구조성능평가 용역' 결과의 일부로써, 본 연구가 가능하도록 한 국립문화재연구소에 감사드립니다.

참고문헌

- 김봉건 (1992) 傳統木造建築의 構造解析, 대한건축학회지, 36권 4호 통권 167호
- 정성진, 홍성걸, 김남희, 이영욱, 황종국, 배병선 (2005) 전통목구조 해석을 위한 모형화기법, 대한건축학회 논문집(구조계), 21(12), pp. 77~84
- 문화재청 봉정사 대응전 실측보고서
- 문화재청 (2002) 완주 송광사 대응전 수리보고서
- 문화재청 (2003) 봉정사 극락전 수리보고서
- 국립문화재연구소 (2005, 6) 목조문화재 구조성능평가 연구용역 보고서
- 국립문화재연구소 (2005, 12) 목조문화재 구조성능평가 연구용역 보고서
- H.C. MARTIN (1996) INTRODUCTION TO MATRIX METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS, McGraw-Hill
- Bathe, K.-J (1996) Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996
- ROBERTS D. COOK, DAVID S. MALKUS, MICHAEL E. PLESHA, ROBERT J. WITT (2002) CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS, FOURTH EDITION, 2002, WILEY