

# 국부 단위분할 원리에 기초한 무요소법의 점성균열 모델

## A Meshfree method Based on the Local Partition of Unity for Cohesiv cracks

지 광 습\* · 정 진 규\*\* · 김 병 민\*\*

Zi, Goangseup · Jung, Jin-Kyu · Kim, Byeong-Min

### ABSTRACT

The meshfree method is extended by the local partition of unity method to model the cohesive cracks in two dimensional continuum. The shape function of a particle whose domain of influence is completely cut by a crack is enriched by the step enrichment function. If the domain of influence contains a crack tip inside, it is enriched by the branch enrichment function without the stress singularity. It is found that this method is more accurate and converges faster than the meshless methods for LEFM cracks based on the visibility concept. Several staic and dynamic examples are solved to verify the method.

*Keywords: local partition of unity, meshless methods, cohesive cracks, static fracture, dynamic fracture*

### 1. 서 론

균열로 인한 응력장의 변동 및 균열의 진전 등을 해석하기 위한 다양한 방법들 중에서, Belytschko 등 (1999)에 의해 개발된 확장유한요소법(extended finite element method; XFEM)은 균열문제를 매우 정확하게 다룰 수 있으며, 2차원과 3차원에서의 정적 문제(Moes 등, 1999, 2002; Zi 등, 2003; Zi 등, 2004; Gravouil 등, 2002)에서 뿐만 아니라, 2차원에서의 동적 문제(Belytschko 등, 2003; Zi 등, 2005)에도 잘 적용되었다. 확장유한요소법은 기존 유한요소법의 기본 원리를 그대로 이용하고 있기 때문에 최소한의 구조변경을 통해 기존 유한요소 프로그램에 구현이 가능하다는 장점이 있다.

무요소법에서는 투과성 개념(visibility concept)을 이용해 균열을 모델하는데(Belytschko 등, 1996; Lu 등, 1995; Belytschko 등, 1995; Belytschko 등, 1995; Krysl 등, 1999), 국부 단위분할 원리에 근거한 무요소법을 이용해 균열문제에 접근할 경우 기대되는 장점들은 (1) 무요소법의 고차연속성 때문에 국부적 보간법을 사용할 필요가 없으며, (2) 응력이나 변형을 분포에 불연속성이 없으며, (3) 균열 끝의 비선형 이격을 자동적으로 구사할 수 있는 점들이 있다. 확장유한요소법에서는 일반적으로 저차의 형상함수를 사용하므로 균열 끝의 균열 이격은 비선형 확장함수를 사용하지 않을 경우 항상 선형이 된다.

### 2. 무요소근사법

\* 정회원 · 고려대학교 사회환경시스템공학과 조교수 E-mail: g-zi@korea.ac.kr

\*\* 고려대학교 사회환경시스템공학과 석사과정

표준 Galerkin 수치해석법의 근사함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \sum_I \phi_I(\mathbf{X}) \mathbf{u}_I(t) \tag{1}$$

여기서  $\phi_I(\mathbf{X}) =$  절점  $I$ 의 형상함수,  $\mathbf{X}_I =$  절점  $I$ 의 변형 전 위치,  $\mathbf{u}_I =$  절점  $I$ 에 해당하는 매개변수이다. 여러 가지 무요소법이 있지만 EFG법(Belytschko 등, 1994; Belytschko 등, 1995; Belytschko 등, 1996)에서는 형상함수  $\phi_I(\mathbf{X})$ 가 다음과 같이 계산된다.

$$\phi_I(\mathbf{X}) = \mathbf{p}(\mathbf{X})^T \mathbf{A}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{X}_I) \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \sum_I \mathbf{p}(\mathbf{X}_I)^T(\mathbf{X}_I) \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I, h) \tag{3}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}_I) = \mathbf{p}(\mathbf{X}_I) \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I, h) \tag{4}$$

여기서,  $\mathbf{p}(\mathbf{X}) =$  기저다항식,  $\mathbf{W} =$  가중함수(kernel 함수)이다. 각 운동량 보존을 위해서는 근사함수가 완전해야 하므로 본 연구에서는 기저다항식을  $\mathbf{p}(\mathbf{X}) = (1, X, Y)$ 로 취한다. 무요소법은 유한요소법에 비해 고차의 연속성을 지니고 균열 주변에서 매끄러운 응력분포를 자동으로 얻을 수 있는 장점이 있다. 무요소법의 연속성은 가중함수  $\mathbf{W}$ 에 의해 결정되는데, 본 연구에서는  $C^2$ 인  $B$ -spline을 이용했다.

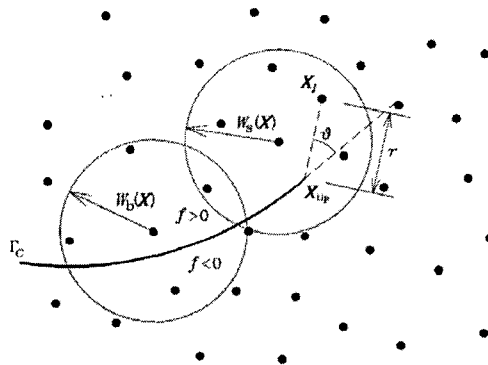


그림 1 절점 영향영역의 부분 절개와 완전 절개

### 3. 국부 단위분할 원리에 근거한 근사함수

단위 분할원리를 이용해서 균열을 나타내기 위한 핵심은 매개변수를 추가로 사용해서 근사함수가 불연속성을 포함하도록 확장하는 것이다. 이를 통해 전체영역에서 연속적으로 근사함수를 정의할 수 있게 된다 (Belytschko 등, 2000).

확장유한요소법(Zi와 Belytschko, 2003)과 마찬가지로 본 연구에서도 절점의 영향영역과 균열의 상호관계(그림 1)에 따라 두 가지의 확장함수를 고려한다. 균열이 절점의 영향영역을 완전히 관통한 경우는 다음과 같이 정의된 계단함수  $H$ 를 사용한다.

$$H[f_I(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1 & \text{for } f_I(\mathbf{X}) > 0 \\ -1 & \text{for } f_I(\mathbf{X}) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

여기서  $f(\mathbf{X}_I) =$  거리함수이며 다음과 같이 정의된다.

$$f_I(\mathbf{X}) = \begin{cases} \text{sign}[n \cdot (\mathbf{X}_I - \mathbf{X}) \min\|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}\|] & \text{for } \mathbf{X}_I \in W_b \\ n \cdot (\mathbf{X}_{tip} - \mathbf{X}_I) & \text{for } \mathbf{X}_I \in W_s \end{cases} \tag{6}$$

$W_b$  = 균열이 완전히 관통한 영향영역,  $W_s$  = 균열 끝이 내부에 위치한 영향영역을 나타낸다.

무요소법에서는 요소망의 경계가 없으므로 Zi 등(2003)의 기법을 사용할 수 없으며 대신 그 이전형태인 가지함수를 사용한다. 선형탄성문제의 경우 해석적 해의 기저함수인

$$\mathbf{B} = \sqrt{r} \left( \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \quad (7)$$

를 사용하고, 점성균열인 경우는 식 (7)의 첫 번째 항 만을 특이성을 제거하고 아래와 같이 사용한다.

$$\mathbf{B} = r^m \sin \frac{\theta}{2}, \text{ with } m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

위 단일 균열에 대한 식을 Zi 등(2004)과 같이 다중 균열로 확장하면 다음과 같이 최종 근사함수가 얻어진다.

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{I \in W(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u}_I \quad (9)$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_b(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) H_I^n(\mathbf{X}) \delta \mathbf{a}_I^n + \sum_{m=1}^{m_t} \sum_{I \in W_s(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \sum_K \mathbf{B}_{KI}^m(\mathbf{X}) \delta \mathbf{b}_{KI}^m$$

$$\mathbf{u} = \sum_{I \in W(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \mathbf{u}_I \quad (10)$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_b(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) H_I^n(\mathbf{X}) \mathbf{a}_I^n + \sum_{m=1}^{m_t} \sum_{I \in W_s(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \sum_K \mathbf{B}_{KI}^m(\mathbf{X}) \mathbf{b}_{KI}^m$$

여기서  $n$  = 영향영역을 관통한 균열번호,  $n_c$  = 관통균열의 수,  $m$  = 균열 끝의 번호,  $m_t$  = 균열 끝의 수이다.

## 4. 지배방정식과 구성방정식

### 4.1. 강형 지배방정식

한 점의 평형조건으로부터, Lagrangian 형태의 강형 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} \text{ in } \Omega_0 \setminus \Gamma_0^c \quad (11)$$

여기서  $\rho_0$  = 초기 밀도,  $\ddot{\mathbf{u}}$  = 가속도,  $\mathbf{P}$  = 공칭응력 텐서,  $\mathbf{b}$  = 물체력,  $\Omega_0$  = 대상영역이다. 이 미분방정식에 필요한 경계조건은 아래 식과 같다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \text{ on } \Gamma_0^u \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \text{ on } \Gamma_0^t \quad (13)$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^- = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P}^+ = \mathbf{t}_{c0} \text{ on } \Gamma_0^c \quad (14)$$

$$\mathbf{t}_{c0} = \mathbf{t}_{c0}(\mathbf{u}) \text{ on } \Gamma_0^c \quad (15)$$

### 4.2. 구성방정식

본 연구에서는 Belytschko 등 (2003)에서 사용된 Lemaitre의 손상모델(1971)과 열로 인한 항복구간의 변화를 표현할 수 있는 Johnson-Cook 모델(1983)을 사용했다. 전자는 콘크리트의 파괴를 모사할 때 사용했고, 후자는 금속의 파괴를 모사할 때 사용했다.

Lemaitre 모델은 상수형 손상모델이며 그 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = (1 - D)C : \epsilon \tag{16}$$

여기서  $D$ 는 0에서 최대 1의 값을 가지는 상수형 손상변수이며, 손상  $D$ 는 유효 변형률  $\bar{\epsilon}$ 의 함수로 주어진다.

$$D(\bar{\epsilon}) = 1 - (1 - A)\epsilon_{D_0} \bar{\epsilon}^{-1} - A e^{-B(\bar{\epsilon} - \epsilon_{D_0})} \tag{17}$$

여기서 유효변형률은

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\max(\epsilon_i, 0)]^2} \tag{18}$$

$A, B, \epsilon_{D_0}$ 는 모델상수이다.

Johnson-Cook 모델(1983)은  $J_2$ 소성론에 기초하지만, 변형률의 변화율과 온도의 영향이 유효항복응력  $\sigma_Y$ 에 직접적으로 고려된다. Gummalla 등(1999)의 유효응력을 사용하면

$$\sigma_Y = \max[(A + B\gamma^n)(1 + C \ln \epsilon^*)(1 - \exp((T - T_0)/\kappa_0 - 1)), 0] \tag{19}$$

여기서  $\epsilon^* = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0$  여기서  $\dot{\gamma}$ 는 유효소성 변형률의 변화율이고  $\dot{\gamma}_0$ 는 기준변화율(reference strain rate)이며, 1.0/s의 단위를 가진다.

$$T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r} \tag{20}$$

여기서  $T_r$ 은 기준온도이고  $T_m$ 는 재료가 용융되는 온도이다. 소성 변형이 열로 바뀌었다고 가정하면 온도 상승량은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta T = \int_0^\gamma \frac{\beta}{\rho c_v} \sigma_Y d\gamma \tag{21}$$

모든 소성에너지 소산이 열로 변환되었다고 가정하고  $\beta=1$ 을 사용한다.

선형 점성균열 모델인 경우에 균열의 이격변위는 식 (9)와 (10)의 확장된 항의 불연속량에 의해서만 지배되고, 다음과 같다.

$$[\mathbf{u}(\mathbf{X})] = 2 \sum_{n=1}^{n_c} \sum_{I \in W_n(\mathbf{X})} \Phi_I(\mathbf{X}) \mathbf{a}_I^n + \sum_{m=1}^{m_t} \sum_{J \in W_m(\mathbf{X})} \Phi_J(\mathbf{X}) \sum_K [\mathbf{B}_K(\mathbf{X})] \mathbf{b}_{KJ}^m \tag{22}$$

균열 이격변위  $[\mathbf{u}(\mathbf{X})]$ 의 법선성분  $\delta_n$ 는 다음과 같다.

$$\delta_n = [\mathbf{u}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{n} \tag{23}$$

### 4.3. 균열 성장 조건 및 속도

균열의 생성조건으로서 쌍곡선성 상실조건(loss of hyperbolicity)을 적용했다(Belytschko 등, 2004). 이 조건의 공학적인 의미는 재료의 한 점에서 특정방향으로 변형열화가 발생하면 균열이 형성되는 것을 의미하며, 음파텐서(acoustic tensor)  $\mathbf{A}$ 의 고유치가 영이므로 음수가 되는 조건으로 간단히 쓸 수 있다. 즉,

$$\min \text{eig}(\mathbf{Q}) \leq 0 \tag{24}$$

여기서,  $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = [\sin\theta \quad \cos\theta]$ 이다.  $\theta$ 는 균열 끝의 접선을 중심으로  $\pm 90$ 도 이내에서 2도씩 변화하는 값이다.

### 5. 이산화 지배방정식의 정식화

가상 일의 원리를 사용하면

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{kin}} = 0 \tag{25}$$

여기서

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} (\nabla_0 \otimes \delta \mathbf{u})^T : \mathbf{P} \, d\Omega_0 \tag{26}$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0^c} \delta [ \mathbf{u} ] \cdot \mathbf{t}_{c0} \, d\Gamma_0 \tag{27}$$

$$\delta W_{\text{kin}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 \tag{28}$$

식 (9)와 (10)의 시험함수와 사용함수를 식 (24)부터 (27)에 대입하고 절점 매개변수의 변분인  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{a}$ ,  $\delta \mathbf{b}$ 를 변분법의 원리에 따라 제거하면, 다음과 같은 이산화 방정식이 얻어진다.

$$\mathbf{M}_{IJ} \ddot{\mathbf{u}}_J = \mathbf{F}_I^{\text{ext}} - \mathbf{F}_I^{\text{int}} \tag{29}$$

여기서

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_J \\ \ddot{\mathbf{a}}_J \\ \ddot{\mathbf{b}}_{IK} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{IJ} = \begin{bmatrix} m_{IJ}^{uu} & m_{IJ}^{ua} & m_{IJ}^{ub} \\ m_{IJ}^{au} & m_{IJ}^{aa} & m_{IJ}^{ab} \\ m_{IJ}^{bu} & m_{IJ}^{ba} & m_{IJ}^{bb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_I^{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_I^{u, \text{ext}} \\ f_I^{a, \text{ext}} \\ f_{IK}^{b, \text{ext}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_I^{\text{int}} = \begin{bmatrix} f_I^{u, \text{int}} \\ f_I^{a, \text{int}} \\ f_{IK}^{b, \text{int}} \end{bmatrix} \tag{30}$$

### 6. 수치 적용예제

#### 6.1. 모드 I 선형탄성 균열문제

그림 2에 나타난 모드 I 선형탄성 균열문제를 평면변형률 상태로 가정하고, 균일한 하중을 경계조건으로 하면 해를 얻을 수 있다. 그림 3과 같은 Griffith 문제에서 응력확대계수는 경계조건과 하중형태에 따라 달라지며, 준정적상태에서  $K_I = p\sqrt{\pi a}$  이고, 이때  $p$ 는 외부응력이다. 수치 모형에서는 균열 선단 주변의 국부적 수렴을 검토하기 위해 다음과 같은 J적분과 KI의 관계식을 적용할 수 있다.

$$J = K_I^2 \frac{1-\nu^2}{E} \tag{31}$$

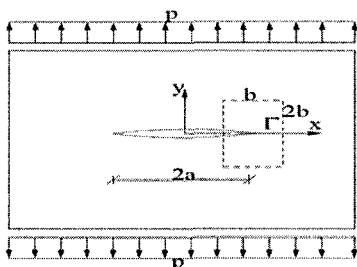


그림 2 모드 I 선형탄성 균열문제

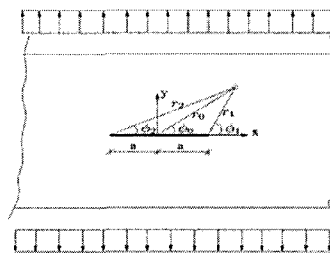


그림 3 Griffith 문제

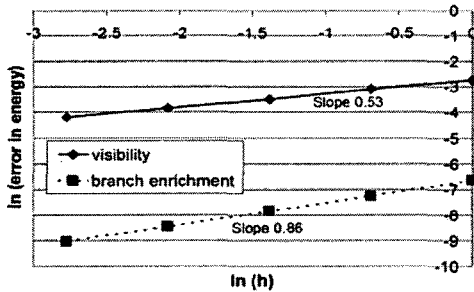
에너지 오차는 다음과 같다.

$$\|err\|_{energy} = \frac{\|u_h - u_{analytic}\|}{\|u_{analytic}\|_{energy}} \quad (32)$$

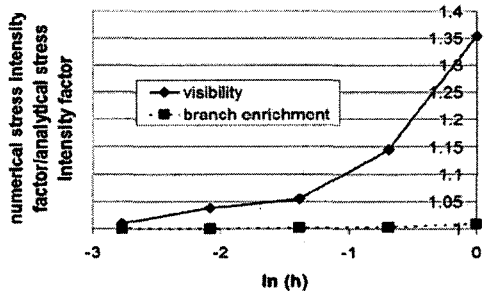
$$\|u\|_{energy} = \left( \int_{\Omega_0} E^T(u) : C : E(u) d\Omega_0 \right)^{1/2} \quad (33)$$

여기서 E는 Green 변형률이다.

모드 I 문제에서 에너지 놈에 대한 오차는 그림 4(a)에 나타내었다.



(a) 에너지 오차



(b) 응력확대계수의 오차

그림 4 절점 밀집도의 변화에 따른 모드 I 파괴문제

### 6.2 복합모드 선형탄성 균열문제

Saehn은 복합모드 선형탄성 균열문제에 대한 해석적 해를 다음 그림을 이용하여 도출하였다.

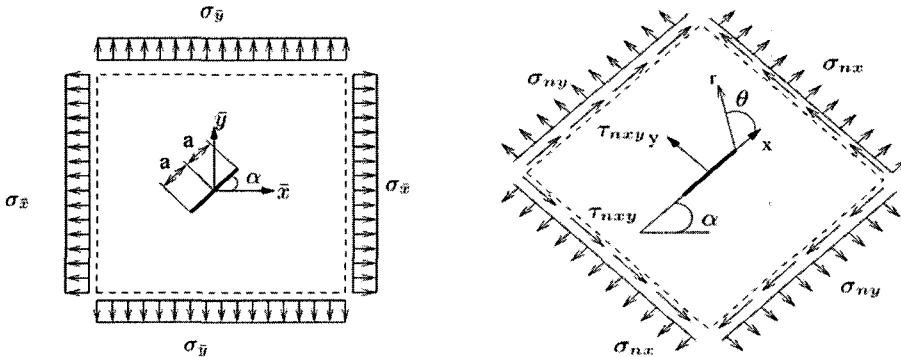


그림 5 복합모드 선형탄성 균열문제

에너지 놈에서의 오차와 투과성 개념에서의 오차를 비교해보면, 모드 I 선형탄성 균열문제에서 나타난 경향이 복합모드 선형탄성 균열문제에서도 비슷하게 나타난다(그림 5). 국부 단위분할 확장을 이용하면 더 정확한 결과와 더 높은 수렴률을 이끌어 낼 수 있지만, 오차가 모드 I 문제보다 다소 크게 나타난다.

### 6.3 2개의 노치가 있는 4점 재하 보 문제

2개의 노치가 있고 4점 재하상태의 보에 대해서, 160,000개의 절점을 사용했을 때, 다음과 같은 균열 형태를 모사할 수 있었다.

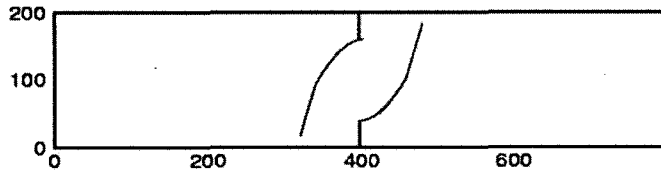


그림 6 두 개의 노치가 있는 보의 균열 경로

모사한 균열 형태는 실험에 의한 균열 형태와 거의 일치하고, 적은 수의 절절을 사용해도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

#### 6.4. 균열의 분기

균열 분기 문제는 그림 7과 같은 길이 0.1m, 폭 0.04m의 노치가 있는 사각형 평판을 적용하였다. 평판의 왼쪽 중앙에 수평으로 균열이 위치하였으며, 상하방향으로 각각 1MPa의 인장응력을 주었다.

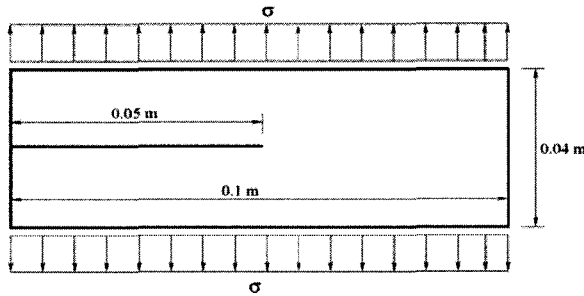


그림 7 균열이 있는 평판

Lemaitre (1971)의 손상 법칙과 쌍곡선성 손실조건을 적용하고, 여러 점성 법칙들을 적용한 결과 지수 감쇄 법칙을 도출하였다.

약 16,000개의 절점으로 분할을 하고, 하중은 0.001ms 내에서 최대 1MPa에 선형적으로 도달하도록 적용하였고, 균열 양상은 그림 11에 나타내었다.

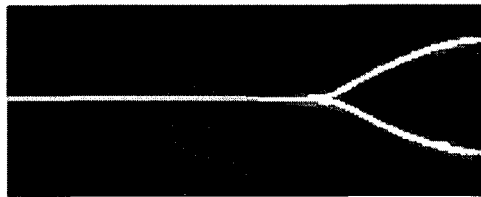


그림 11 노치가 있는 시편의 균열 분기 양상

### 7. 결론

본 연구에서는 균열 진전 문제에 대해 무요소법을 적용하였다. 무요소법은 재료가 안정성을 잃으면 변위장이 불연속성을 나타낸다는 개념에 근거한다. 무요소법에서 균열 선단의 확장에는 가지 함수가 적용되었고, 변위장의 불연속인 부분에만 영향을 받는 점성 모델이 사용되었다.

실험적 또는 수치적 데이터를 이용할 수 있는 몇 개의 정적 및 동적 문제에 국부 단위분할 원리에 기초한 무요소법을 적용하였고, 해석적 해를 이용할 수 있는 모드 I 선형탄성 균열문제와 복합모드 선형탄성 균열

문제에 적용하였으며, 결과는 매우 정확하였다. 또한, 적은 수의 절점만으로도 정확한 균열 경로를 획득할 수 있었다.

서로 다른 가지함수들을 균열 선단에 적용하였으나 모두 유사한 균열 경로를 나타냈다. 그러나 고차의 가지함수를 적용했을 때는 균열 끝에서 더 매끄러운 응력분포를 얻을 수 있었다.

크고 빠른 하중이 작용할 때 균열의 가치를 찾는 것, 균열의 분기 여부를 결정하는 것은 쉽지 않은 문제이며, 앞으로 이 부분들에 대한 연구가 더 활발히 이루어져야 할 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 논문은 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 2005년도 건설핵심기술연구개발사업 05 기반구축 D04-03 및 05 건설핵심 D11의 지원으로 이루어졌습니다.

### 참고문헌

- T. Belytschko, H. Chen, J. Xu, and G. Zi (2003) Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(12), pp.1873 - 1905
- T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl (1996) Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp.3 - 7.
- T. Belytschko and Y.Y. Lu (1995) Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 32, pp.2547 - 2570.
- T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu (1994) Element-free galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229 - 256.
- A. Gravouil, N. Moes, and T. Belytschko (2002) Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - part ii: Level set update, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.2569 - 2586.
- G.R. Johnson and W.H. Cook (1983) A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures, *In Proc. 7th International Symp. on Ballistics*.
- J. Lemaitre (1971) Evaluation of dissipation and damage in metal submitted to dynamic loading, *Proceedings ICM 1*.
- N. Moes, A. Gravouil, and T. Belytschko, (2002) Non-planar 3-D crack growth by the extended finite element method and level sets, parti: Mechanical model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11), pp.2549 - 2568.
- G. Zi and T. Belytschko (2003) New crack-tip elements for x fem and applications to cohesive cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(15)2221 - 2240.
- G. Zi, H. Chen, J. Xu, and T. Belytschko (2005) The extended finite element method for dynamic fractures, *Shock and Vibration*, 12(1), pp.9 - 3.
- G. Zi, J.-H. Song, E. Budyn, S.-H. Lee, and T. Belytschko (2004) A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(1), pp.901 - 915.