

# 반응표면방법론과 피어슨 시스템을 이용한 불확실성하의 확률적 설계

## Probabilistic Design under Uncertainty using Response Surface Methodology and Pearson System

백 석 흠\* · 조 석 수\*\* · 주 원 식\*\*\*

Baek, Seok-Heum · Cho, Soek-Swoo · Joo, Won-Sik

### ABSTRACT

System algorithms estimated by deterministic input may occur the error between predicted and actual output. Especially, actual system can't predict the exact outputs due to uncertainty and tolerance of input parameters. A single output to a set of inputs has a limited value without the variation. Hence, we should consider various scatters caused by the load assessment, material characteristics, stress analysis and manufacturing methods in order to perform the robust design or estimate the reliability of structure. The system design with uncertainty should perform the probabilistic structural optimization with the statistical response and the reliability. This method calculated the probability distributions of the characteristics such as stress by combining stress analysis, response surface methodology and Monte Carlo simulation and got the probabilistic sensitivity. The sensitivity of structural response with respect to in constant design variables was estimated by fracture probability.

Therefore, this paper proposed the probabilistic reliability design method for fracture of uncurved freight end beam and the design criteria by fracture probability.

**Keywords:** *Response Surface Methodology, Latin Hypercube Sampling, Pearson & Spearman Correlation Coefficient, Uncertain Variable*

### 1. 서 론

많은 공학설계와 생산시스템은 거의 모두 불확실성(uncertainty) 문제에 직면하게 된다. 이때 편의상 안전 계수(safety factor) 접근과 같은 확정적 문제로 가정하여 설계의 타당성을 입증하게 된다(양영순과 이재욱, 2001; Wu와 Wang, 1996; Melchers, 1999; Du와 Chen, 2004). 그러나 불확실성이 크거나 넓은 설계범위에 대한 비용이 과대하게 되면 이러한 방법은 부적당하며 불확실성을 해석적으로 다룰 수 있는 방법이 필요하다.

확률적 설계 방법(probabilistic design method)은 불확실한 변동에 대한 외부환경의 변화에 영향을 적게 받고 제품의 품질을 향상시킬 수 있는 설계과정으로 공학설계 분야에 적용되고 점차 활성화되고 있다. 대표

\* 동아대학교 대학원 기계공학과 박사과정 E-mail: baeksh@donga.ac.kr

\*\* 강원대학교 자동차공학과 교수 E-mail: sscho394@samcheok.ac.kr

\*\*\* 동아대학교 기계공학과 교수 E-mail: wsjoo@dau.ac.kr

적인 확률적 설계의 두 영역은 강건설계(robust design)와 신뢰성기반 설계(reliability-based design)로 나눌 수 있다. 이들 영역의 대부분은 강건성 고려를 위해서 구조물에 존재하는 불확실성, 변동에 대한 정보를 이용하는데 두 영역이 강조하는 중요성은 서로 다르다(정도현과 이병제, 2000; 황광현과 박경진, 2002).

강건설계는 변동의 원인을 제거하지 않고 원인의 영향을 최소화해 품질을 높이는 방법이다. 이것은 설계 목적(design objective)에 대한 성능의 강건성 획득이 중요하다. 반면 신뢰성기반 설계는 설계제약(design constraints)에 대한 설계의 유용성을 유지하는 것이다. 일반적으로 제한조건이 위반될 확률, 즉 파손확률(failure probability)을 계산하고 이 확률이 요구되는 확률보다 작도록 설계하는 방법이다. 실제 공학설계에서 이들 두 영역의 입력 매개변수들(input parameters)은 공차영역을 가지고 산포되기 쉬어 확률변수들(random variables)로 취급해야 한다. 일반적으로 설계에 대한 확률적 방법들의 사용은 다음 질문들에 답하기 위해 사용될 수 있다(Deleonardo, 2001; Qu와 Haftka, 2004).

- (1) 모델의 거동을 묘사하는 입력정보들의 산포는 얼마인가?
- (2) 모델의 수행기준이 더 이상 만족되지 않을 확률은?
- (3) 신뢰할 만한 설계와 향상된 품질을 얻기 위해 나열될 필요가 있는 입력 매개변수들은 무엇인가?

이러한 이해들은 해석결과를 개선하고 제조공정에서 품질관리의 일부로서 수행되어 질 수 있는 수단들을 정량적으로 명시할 수 있다. 본 연구에서는 설계에 내재해 있는 불확실성 요인을 양함수로서 구조응답을 적용한 반응표면방법론을 이용해 민감도 해석을 수행하면서 효율적으로 구조응답의 확률분포 및 제품의 신뢰도를 산출하는 방법을 제시한다.

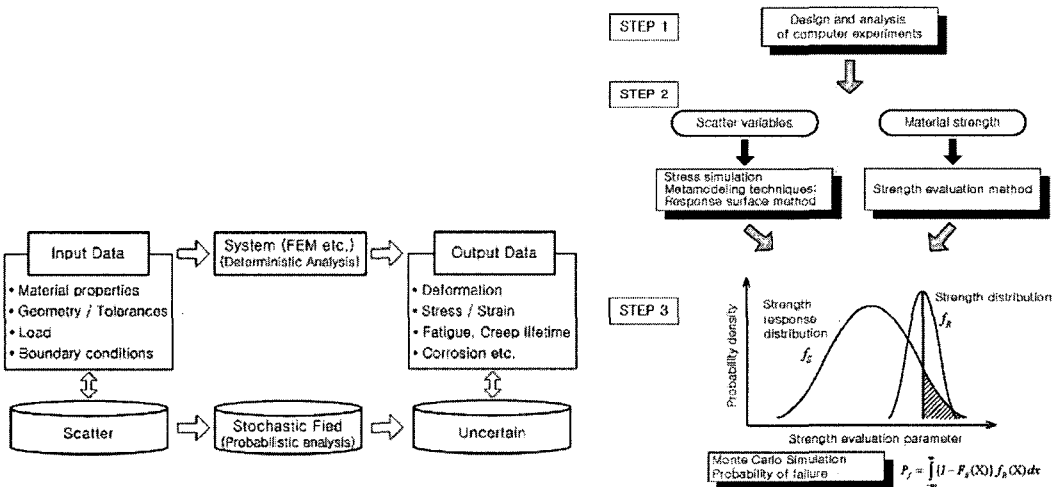


Fig. 2 Concept of probabilistic design method under uncertainty

## 2. 반응표면방법론에 기반한 확률적 설계 방법

본 연구에서 제안하는 확률적 설계 방법은 크게 나누어 STEP1 실험계획(design of experiment)의 수행, STEP2 비선형 변환함수(non-linear transformation functions)를 이용한 반응표면근사식의 작성 및 분산분석(analysis of variance), STEP3 구조응답의 확률분석 및 파손조건 산출의 3가지 순서로 구성되며 그 과정은 Fig. 1에 나타내었다.

2.1. 반응표면근사식 및 분산분석

반응표면근사식에는 Chebyshev 직교 다항식(Chebyshev orthogonal polynomial)을 이용한다. 여기서 유한 요소해석의 수치실험점은 중심합성법(central composite design)을 이용한 실험계획법에 의해 결정한다. 이 근사식은 각 수치실험점의 해석결과를 이용해서 작성한 회귀식에 해당하게 된다. 식 (1)의 직교다항식은 저차항이 우선된 각 차수항이 서로 독립하고 있는 특성을 가지고 있으므로 임의의 차수에서 근사식을 작성하지 않아도 남은 차수에 대하여 최적의 회귀식을 구할 수 있다(Takayoshi, 1996; 백석홍, 2006).

$$y = a_0 + a_{10}(x_1 - \mu_1) + a_{20}[(x_1 - \mu_1) - (k^2 - 1)h^2/12] + a_{01}(x_2 - \mu_2) + [(x_2 - \mu_2)^2 - (k^2 - 1)h^2/12] + a_{11}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + a_{21}[(x_1 - \mu_1)^2 - (k^2 - 1)h^2/12](x_2 - \mu_2) + a_{12}[(x_2 - \mu_2)^2 - (k^2 - 1)h^2/12](x_1 - \mu_1) + \dots \quad (1)$$

여기서  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 는 불확실 변수,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 는 평균값,  $a$ 는 직교계수,  $k, h$ 는 각각 수준수와 수준간격을 의미한다. 각 확률변수의 민감도를 판단하기 위해 분산분석(analysis of variance)을 수행하였다. 분산분석에는 각 확률변수의 구조응답에 주어진 민감도를 다항식 성분에 직교분해하여 평가하는 방법을 이용한다. 여기서 민감도는 각 확률변수의 변동에 따른 구조응답의 변화 정도를 나타낸다. 이 방법에 의해 민감도는 반응표면근사식을 작성하는 과정에서 1차, 2차 등과 같은 분해된 특성을 구할 수 있다.

2.2. 구조응답의 확률분포와 파손확률의 산출

불확실 변수의 확률분포에 따른 난수를 발생시켜 반응표면근사식에 의해 구조응답값을 계산한다. 이런 과정을 반복함으로써 구조응답의 확률분포를 근사적으로 구하였다. 시스템 인자인 확률변수를  $x$ , 구조응답의 확률밀도함수를  $f_s(x)$ , 파손발생기준에 따른 확률밀도함수를  $f_R(x)$ 로 할 경우 파손확률  $P_f$ 는 일반적으로 식 (2)의 다중적분으로 표현할 수 있다.

$$P_f = \int_0^\infty \left\{ \int_x^\infty f_s(\xi) d\xi \right\} f_R(x) dx \quad (2)$$

식 (2)는 몬테카를로 시뮬레이션을 이용해 파손확률  $P_f$ 의 근사치를 계산함으로써 파손확률을 산출한다.

2.3. 확률분포의 신뢰도 계산

다항식으로 근사된 목적함수의 통계적 모멘트를 계산한 후 피어슨 시스템과 같은 확률분포 모델링에 관한 방법을 활용하여 시스템 성능함수의 확률분포를 추정하고 손상확률을 계산한다.

3. 공학설계 예제

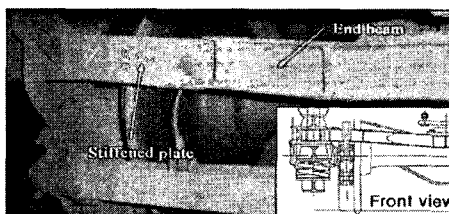


Fig. 2 Photograph of fractured end beam

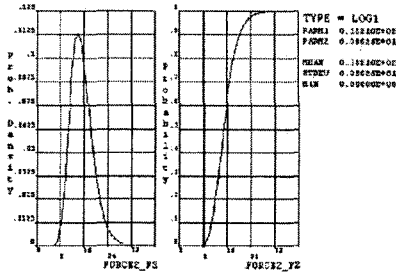
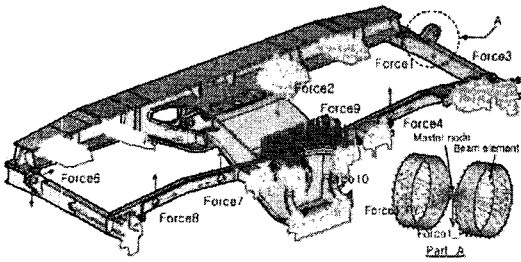
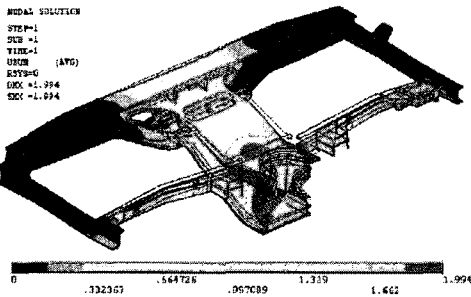
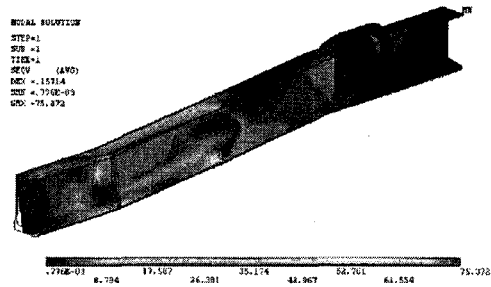


Fig. 3 Definition of random variables for uncertainty



(a) Deflection of bogie frame



(b) Stress of the end beam for brake reaction

Fig. 4 Finite element analysis for Uncovered freight car

Table 1 Uncertain system parameters

System parameter	Distribution type	Value		
		Mean	Std. deviation	COV* (%)
1 Force1_Fz	Lognormal	-414	103.565	0.25
2 Force1_Fy	Lognormal	-1525	381.25	0.25
3 Force2_Fz	Lognormal	-15.21	3.8025	0.25
4 Force2_Fy	Lognormal	55.21	13.8025	0.25
5 Force3_Fz	Lognormal	400	100	0.25
6 Force3_Fy	Lognormal	-5440	1360	0.25
7 Force4_Fz	Lognormal	200	50	0.25
8 Force4_Fy	Lognormal	2720	680	0.25
9 Force5_Fz	Lognormal	-414.26	62.139	0.15
10 Force5_Fy	Lognormal	-15.25	2.2875	0.15
11 Force6_Fz	Lognormal	15.21	2.2815	0.15
12 Force6_Fy	Lognormal	55.21	8.2815	0.15
13 Force7_Fz	Lognormal	-200	30	0.15
14 Force7_Fy	Lognormal	2720	408	0.15
15 Force8_Fz	Lognormal	200	30	0.15
16 Force8_Fy	Lognormal	2720	408	0.15
17 Force9_W	Truncated Gaussian	1.95	0.0975	0.05
18 Force10_Fb	Lognormal	5286	792.9	0.15
19 Force11_Rl	Lognormal	7047	1057.05	0.15
20 Force11_A	Lognormal	29.4	7.35	0.25
21 Density	Uniform	7850E-12 kg/mm <sup>3</sup>	0.3E-8 ~ 1.1E-8	0.5 ~ 1.5
22 Mat._frame	Normal Gaussian	213E+3 MPa	10650	0.05
23 Mat._weld	Normal Gaussian	268E+3 MPa	67000	0.25

\* : Coefficients of variation

철도차량은 주행시간이 증가함에 따라 마모, 열화, 피로 등의 성능 저하가 필연적으로 발생된다. 25년 이상 사용이 가능하도록 설계한 화물차량의 대차 프레임은 고속화(110km/h) 및 운행의 증가로 수명문제가 발생되었다. 최근에는 센터빔과 만나는 용접부위와 엔드빔의 제동 브라켓 영역에 균열이 발생되고 있어 설계의 개선이 요구되고 있다.

Fig. 2는 2차에 걸친 정비에 의해 보강판으로 강도증가를 보완하였으나 추가로 균열이 발생한 차량의 대표적인 파손 형태를 나타낸 것이다. 주요원인은 부식과 외부의 작용하중이라고 할 수 있다(구병준, 2003).

이러한 강도에 관여하는 대부분의 변수들은 일정한 값을 갖기보다는 넓은 범위에 걸쳐 확률적으로 불확실성이 내재해 있다. 따라서 설계에 내재된 불확실성을 고려한 확률적 설계가 필요하다.

본 논문의 적용 예에서는 Fig. 2에 나타난 바와 같이 재료 물성치와 작용하는 하중을 확률변수로 하고 장기적 신뢰성에 관한 용접접합부의 최대응력 및 대차 프레임의 처짐을 구조응답으로 결정하였다(See Fig. 2). 특히 확률변수의 불확실성의 영향에 대한 민감도 평가가 가능하다는 사실을 확인했으며, 확률변수가 파손 확률에 영향을 미치는 영향을 밝혀내었다.

### 3.1. 수치실험 및 응력해석

Table 2는 본 연구에서 내재한다고 생각되는 불확실 분포의 요인과 가상적으로 설정한 불확실성 분포 범위를 나타내었다. 각 불확실성 분포의 확률변수는 양함수(explicit function)로 표현한 반응표면근사식을 효율적으로 작성하기 위해서 중심합성계획에 의한 실험계획법을 이용하였다.

실험점은 교호작용을 고려한 2차 반응표면을 생성할 수 있게 으뜸차순으로 64개의  $2^{m-f}$  요인점(factorial points)과 2차항을 추정할 수 있는 16개의 2m 축점(axis points), 1개의 중심점(center point)을 추가하여 81회 실험점을 선택하였다. 각 확률변수의 수준은 5수준, 수준 간격은 확률변수 분포의 범위 0.5%, 5%, 50%, 95%, 99.5%로 설정하였다.

유한요소해석을 위한 모델은 CATIA Ver9에서 모델링하고 사용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS Ver7.1에서 요소망을 생성하여 해석을 수행하였다. 사용한 요소는 대차에 사용한 사면체 요소(20-node brick shaped element)와 엔드빔의 브라켓 힌지에 작용하는 하중을 구현하기 위해 커플링(coupling) 구축을 위한 빔요소(2-node beam element in 3-D)를 사용하였다.

Table 2 Analysis of variance for Von-Mises stress

System parameter	Dimension	Degree of freedom	Sum of Squares	Variance	F-ratio	Effective ratio(%)
X <sub>2</sub>	1	1	10.8	0.1	2.25	0.02
X <sub>6</sub>	1	1	3160.9	17.8	630.58	6.12
X <sub>7</sub>	1	1	1821.2	3.6	127.01	1.23
	2	1	22.7	19.4	689.98	6.7
X <sub>8</sub>	1	1	11248.4	26.3	932.76	9.06
	2	1	5.6	5.6	198.30	1.93
X <sub>2</sub> X <sub>7</sub>	1	1	0.4	0.4	13.28	0.13
X <sub>2</sub> X <sub>8</sub>	1	1	2.4	2.4	83.98	0.82
X <sub>6</sub> X <sub>7</sub>	1	1	22.1	22.1	785.18	7.62
X <sub>6</sub> X <sub>8</sub>	1	1	139.8	139.8	4965.98	48.22
X <sub>7</sub> X <sub>8</sub>	1	1	52.7	52.7	1869.79	18.15
Error		69	1.9	1.9		
Total		80	16488.9		10299.09	100

### 3.2. 파손확률 및 민감도 해석

구조물의 성공적인 강건설계를 위해서 중요한 점은 구조물에서 실제로 발생 가능한 불확실성을 설계 단계에서 파악하여 모델링하는 것이다. 운행 중인 무개화차의 거동은 적재상태와 선로환경에 따라 많은 불확실한 요인들로 인하여 시스템의 성능에 영향을 주게 되는데 이를 체계적으로 고려할 필요가 있다.

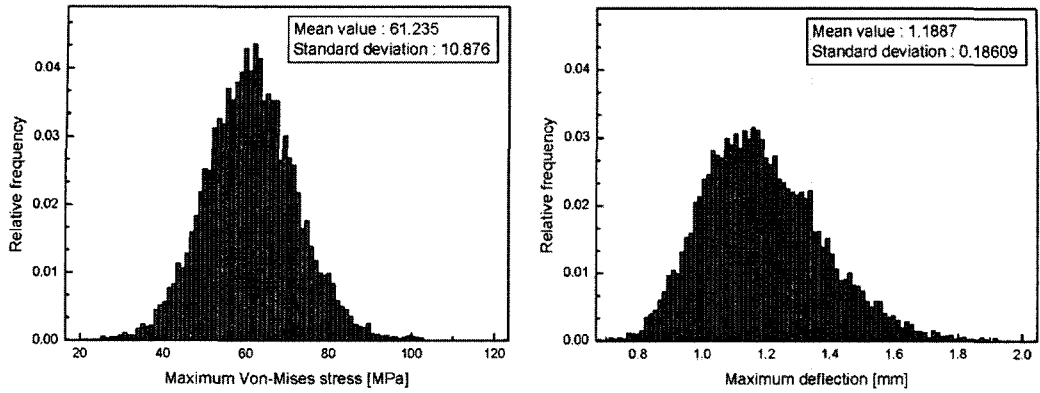


Fig. 5 Results based on Monte Carlo simulations

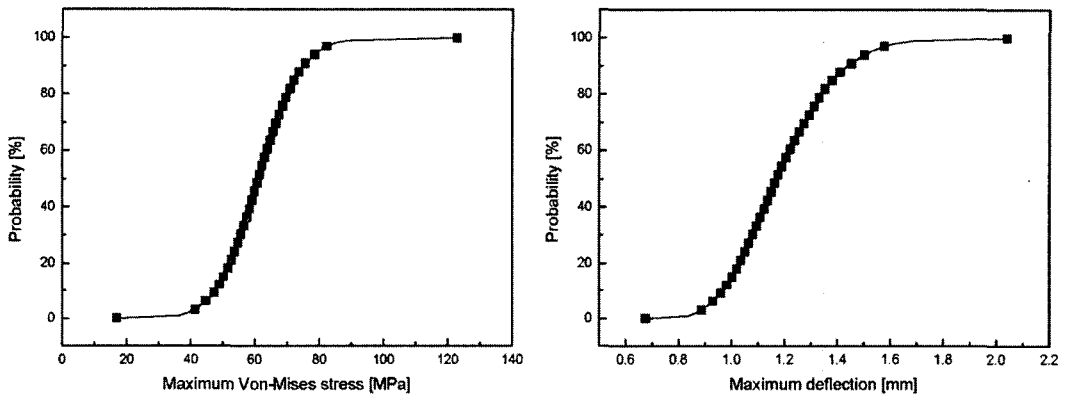


Fig. 6 CDF plot of output parameter for fractured end beam

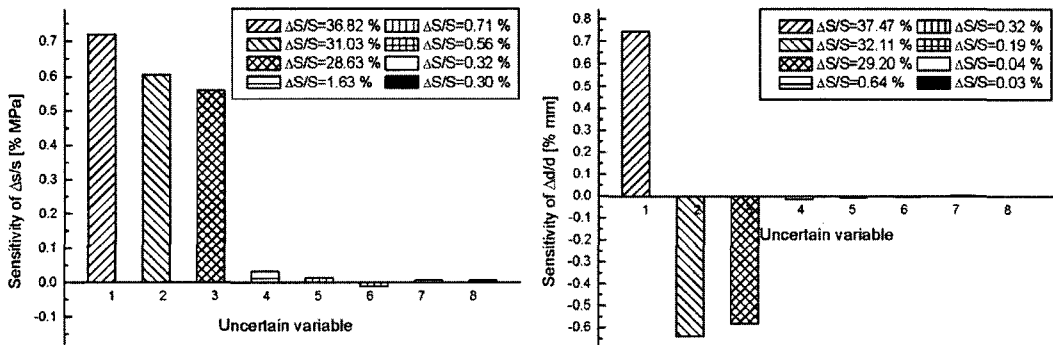


Fig. 7 Probabilistic sensitivity using Monte Carol simulation on response surface

불확실한 시스템 인자는 제동하중과 화차의 운행가속도, 적재하중 및 재료 물성치이다. 반응표면근사화에

의해 결정된 근사적 모델식에 대하여 몬테칼로 시뮬레이션을 이용하여 이용하여 측정불확도를 평가함으로써 근사 모델식의 성질과 시스템 인자의 확률적 민감도의 상관관계를 제안하였다.

근사식은 Table 2의 분산분석에서 유의하다고 판단되는 차수의 항을 사용한 Chebyshev 다항식을 이용하여 표현하였다. 이 방법에 따라 각각의 설계변수 민감도만이 아니고 설계변수간의 교호작용도 정량적으로 평가할 수 있는데 Chebyshev 다항식은 고려하는 설계영역에 대하여 피팅(fitting)된 결과의 오차가 특정범위에 수렴된다고 알려져 있다.

$$y_{stress} = 64.5336 + 0.36228x_2 + 6.28578x_6 - 4.77128x_7 + 0.418405x_7^2 + 11.8577x_8 - 0.2243x_8^2 + 0.076427x_2x_7 - 0.192231x_2x_8 - 0.587783x_6x_7 + 1.4782x_6x_8 - 0.907041x_7x_8 \quad (3)$$

$$y_{deflection} = 1.22263 + 12.8085x_6 - 0.113636x_7 + 0.0108442x_7^2 - 0.0116739x_6x_7 \quad (4)$$

이 과정에 비모수적 방법(non parametric approach)을 적용한다. 이는 모집단에 대하여 구체적인 분포함수를 가정하는 것이 무리라고 판단될 경우 모집단간의 분포에 대한 가정을 줄이는 것이 오류의 가능성을 줄이고, 때로는 검정의 효율을 높일 수 있다. 따라서 본 논문의 확률적 민감도의 상관관계는 Sheskin(1997)에 의한 스피어만 순위 상관계수(spearman rank-order correlation coefficient)를 이용하였다.

스피어만 순위 상관계수는  $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ 으로 주어진 이변량 자료의 피어슨 상관계수를 각각의 순위인  $R_i, S_i$ 를 사용하여 적용시키는 방법으로 다음과 같은 식 (5)에 의해 정의된다.

$$r_e = \frac{\sum_i^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_i^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_i^n (S_i - \bar{S})^2}} \quad (5)$$

Where  $R_i$  = Rank of  $X_i$  within the set of observations  $[X_1 X_2 \dots X_n]^T$

$S_i$  = Rank of  $Y_i$  within the set of observations  $[Y_1 Y_2 \dots Y_n]^T$

$\bar{R}, \bar{S}$  = Average ranks of a  $R_i$  and  $S_i$  respectively

Fig. 5는 시스템 인자에 대한 엔드빔의 응력분포로 입력 매개변수의 산포 때문에 출력 매개변수에서 유도된 산포의 크기를 나타낸다. 또한 Fig. 6은 파손된 엔드빔의 고장확률로 누적분포함수(cumulative distribution function)를 나타낸다. 가운데 검은 선은 응력이 특정한 한계값보다 낮은 상태로 있을 파손확률이다. 그림의 위 아래 곡선들은 확률결과들의 정확도를 정량화한다.

Fig. 7은 상관관계에 기반한 확률적 민감도를 평가한 결과로서 잦은 용접으로 인한 엔드빔의 재료 물성의 변화의 차이가 응력집중 분포의 가장 큰 원인이라는 것을 추정할 수가 있다. 이는 입력변수들이 20개에서 3개로 줄어 문제의 복잡성을 감소시키고 필요한 항목들의 변화가 가장 효율적인 방법으로 되어지는 것을 보증한다. 따라서 설계가 만족스럽다면 엔드빔의 형상변경을 통한 강도보완보다는 용접된 부위의 어닐링(annealing) 과정이 생산 비용이나 품질의 희생 없이 품질향상에 증가시킨다.

#### 4. 결론

반응표면방법론을 이용해 민감도 분석을 하면서 효율적으로 구조응답의 확률분포 및 제품의 신뢰도를 예측하는 방법을 제안하였다. 반응표면으로 근사한 구조응답은 피어슨 시스템을 활용하여 시스템 성능에 적합한 확률분포모형을 적합시켜 신뢰도를 계산하였다. 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) Chebyshev 다항식에 의한 불확실성 요인을 양함수로써 응력과 처짐을 근사적으로 표현하는 것으로 구조응답의 확률분포와 파손확률을 효과적으로 예측이 가능하였다.

(2) 제안된 민감도는 현실조건에서 무개화차의 거동을 더 잘 이해하고 품질향상과 보수비용 절감을 위한 조치들을 효율적으로 이끌어내는데 유용하였다.

### 참고문헌

- 정도현, 이병채 (2000) 확률조건에 근사화를 통한 효율적인 강건 최적설계 기법 개발, *대한기계학회논문집*, 24(12), pp.3053~3060.
- 양영순, 이재욱 (2001) 확률론적 구조설계 최적화기법에 대한 비교연구, *한국전산구조공학회논문집*, 14(2), pp.213~224.
- 황광현, 박경진 (2002) 강건성을 고려한 공리적 설계의 새로운 정보 지수, *대한기계학회논문집*, 26(10), pp.2073~2081.
- Baek, S. H., Hong, S. H., Cho, S. S., Joo, W. S. (2004) Multi-objective Optimization in Discrete Design Space using RSM-Based Approximation, *The Third China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical System (CJK-OSM3)*, pp.125~130.
- Du, X. Chen, W. (2002) Efficient Uncertainty Analysis Methods for Multidisciplinary Robust Design, *AIAA J.*, 40(3), pp.545~552.
- Du, X., Sudjianto, A., Chen, W. (2004) An Integrated Framework for Optimization Under Uncertainty Using Inverse Reliability Strategy, *ASME J. Mech. Des.*, 126(4), pp.562~570.
- Melchers, R. E. (1999) *Structural Reliability Analysis and Prediction*, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Phadke, M. S. (1989) *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Qu, X., Haftka, R. T. (2004) Reliability-based Design Optimization using Probabilistic Sufficiency Factor, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27, pp.314~325.
- Sheskin, D. J. (1997) *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, CRC Press Inc., Florida.
- Takayoshi, K., Masaki S., Qiang, Y. and Isao, K. (1996) Structural Optimization Using the Design of Experiments and Mathematical Programming, *Trans. of the JSME*, 62(601), pp.218~223.
- Wu, Y. T., Wang, W. (1996) A New Method for Efficient Reliability-Based Design Optimization, *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability Proceedings of the 7th Special Conference*, pp.274~277.