위상 천이 디지털 홀로그래피에서 Zernike 다항식을 이용한 위상 오차의 보정

Phase-shift error correction in phase shifting digital holography using Zernike polynomial

한준구, 이지현, 박한민, 이병호
서울대학교 전기공학부 광공학 및 양자전자 연구실
byoungho@snu.ac.kr

위상 천이 디지털 홀로그래피는 기준빔의 위상을 변화시키면서 디지털 홀로그램을 기록하고 이들을 이용하여 물체빔의 위상을 추출해 내는 방법으로서 재생시 영차 항에 의한 잡음이 없고 위상에 대한 모호성을 없앰으로써 공액 물체빔이 제거되어 쌍둥이 이미지가 생기지 않는 장점을 가지고 있다. 이러한 위상 천이 방법은 Yamaguchi 등에 의하여 제안되었으며[1], 위상 천이의 정도에 따라 다양한 물체빔의 계산 방법이 제안되었다. 또한 다파장 레이저를 이용하여 중심 파장에서만 위상 천이를 함으로써 컬러 디지털 홀로그래피를 기록하는 방법도 연구되었다[2,3].

위상천이 디지털 홀로그래피에서 위상 천이는 측정에서의 정확도를 높이기 위하여 일반적으로 1/4 파장의 단위로 천이하는 4 프레임 방법을 사용되는데, $\Delta\phi$의 위상 천이된 홀로그램을 $I_H(x,y,\lambda;\Delta\phi)$라고 하면 물체빔은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$U_H = 1/2[I_H(x,y,\lambda;0) - I_H(x,y,\lambda;\pi)] + j/2[I_H(x,y,\lambda;3\pi/2) - I_H(x,y,\lambda;\pi/2)] \tag{1}$$

시스템의 구현에서 기준빔은 PZT를 이용하여 위상 천이를 시키는데, PZT를 구동하며 위상천이 프레임을 얻는 과정에서 광학계와 물체의 진동에 의하여 위상 천이 값은 오차를 가지게 된다. 이러한 위상 오차를 고려하면 일반적인 물체빔의 계산은 식 (2)와 같이 표현되고 위상 천이 오차인 $e_i(i=1,2,3)$가 모두 영일 때 식(1)과 동일해 진다.

$$U_H = \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\cos e_3 & -\sin e_3 \\ -\sin e_2 - \sin e_4 & -\cos e_2 - \cos e_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_H(x,y,\lambda;0) - I_H(x,y,\lambda;\pi+e_3) \\ I_H(x,y,\lambda;3\pi/2+e_4) - I_H(x,y,\lambda;\pi/2+e_2) \end{pmatrix} \tag{2}$$

홀로그램의 기록을 위한 광학계를 푸리에 렌즈를 이용하여 물체와 CCD를 초점 거리에 위치시켜 구성할 경우 물체빔과 공액 물체빔의 수치적 재생시 전달 함수는 푸리에 변환과 푸리에 역변환으로 나타내게 된다. 따라서 위상천이 오차가 존재할 경우 그림 1(a)와 같이 쌍둥이 이미지가 둘 다 초점이 맞은 형태로 중심에서 대칭인 형태로 나타나게 된다.

이러한 공액 물체빔의 제거를 위하여 수치적 재생 이미지를 원점 대칭인 함수와 비대칭인 함수의 계수비를 구하여 위상천이 오차를 계산하였다. 계수비가 클수록 위상천이 오차가 큰 것을 나타내며 1일 때 오차가 가장 작게 된다. 원점 대칭인 함수와 비대칭인 함수로의 분리는 Zernike 다항식 계수를 이용하였으며, 여기에서 재생 이미지의 세기만을 고려하므로 표준화된 Zernike 실수 다항식으로 표현이 가능하며 이는 식 (3)과 같이 정의된다[4].

$$\iint U_n^{\pm m} U_{n'}^{\pm m'} \rho\, d\rho\, d\theta = \delta_{nn'}\delta_{mm'} \tag{3}$$

$$U_n^m = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{\pi}} R_n^m(\rho)\cos m\theta & (m \neq 0) \\ \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{2\pi}} R_n^m(\rho)\cos m\theta & (m = 0) \end{cases} \tag{4}$$

$$U_n^{-m} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} R_n^m(\rho)\sin m\theta \quad (m \neq 0) \tag{5}$$

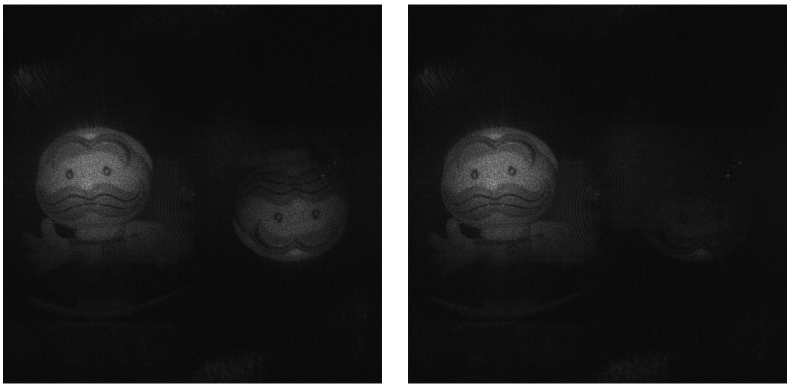
$$R_n^m = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!\left(\dfrac{n+m}{2}-s\right)!\left(\dfrac{n-m}{2}-s\right)!} \rho^{n-2s} \tag{6}$$

이러한 표준화된 Zernike 실수 다항식은 m이 짝수일 때 원점 대칭인 함수이며, m이 홀수일 때 원점 비대칭인 함수가 된다. 위상 천이 오차를 보정하였을 때, 보정 오차는 $e_2 = 0.959$,

$e_3 = -0.541$, $e_4 = -0.576$ 이며, 계수비는 보정 전 그림 1(a)의 경우 1.1925에서 보정 후 그림 1(b)의 경우 1.0266으로 감소하였다.

표1. Coefficients of normalized Zernike polynomials U_n^m / U_n^{-m}

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.5414/0.000		-0.3014/0.000		-0.1428/0.000		0.3091/0.000	
1		0.1140/0.5793		-0.1825/-0.9226		0.0742/0.3118		0.0631/0.3129
2			-0.4717/0.1622		0.8414/-0.3295		-0.6195/0.2707	
3				-0.1734/-0.2145		0.3753/0.5554		-0.4255/-0.5467
4					0.1620/-0.1169		-0.3302/0.3577	
5						0.0982/0.0366		-0.2793/-0.1755
6							-0.0384/0.0570	
7								-0.0406/-0.0107



(a) (b)

그림 1. (a) 위상 오차 보정 전 (b) 위상 오차 보정 후 수치적 재생

참고문헌

1. I. Yamaguchi *et al.*, "Phase-shifting digital holography," *Opt. Lett.*, 22, 1268-1271 (1997)

2. I. Yamaguchi *et al.*, "Phase-shifting color digital holography,"*Opt. Lett.*, 27, 1108-1111 (2002)

3. J. Kato *et al.*, "Multicolor digital holography with an achromatic phase shifter," *Opt. Lett.*, 27, 1403-1405 (2002)

4. M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Pergamon Press, 523-525 (1989)