비례위험모형을 활용한 지불의사액의 준모수적 추정

An semi-parametric estimation of the economic value
using proportional hazard regression approach

안춘모*
Choonmo Ahn

I. 서론

IT서비스를 위시한 IT산업의 빠른 발전은 소비자들에게 다양한 서비스 선택의 기회를 주고 있다. 통신서비스 사업자들은 다양한 신규 비즈니스 기회가 창출되어 새로운 수익원의 탐색이 가능하게 되었다는 긍정적 측면도 있지만, 비즈니스의 진행에 있어 유관 서비스 요금의 책정이 중요한 이슈로 부상되고 있다. 이는 곧 서비스를 활용하여 소비자가 얻는 효용과도 일치되는 측면으로 해석할 수 있으며, 효용의 측정이 매우 중요한 문제가 되었다.

시장에 존재하지 않는 재화나 서비스에 대한 소비자의 평가를 추정하는 문제에 대해서는 많은 연구 프레임웍이 제시되었지만, 현재 가장 많이 사용되는 방법론은 소비자의 의사에 기반하여 적용되는 CVM이다. CVM을 통해 신규서비스로 인해 발생되는 소비자의 효용 문제는 추정의 관점에서는 지불의사액 (Willingness To Pay)의 추정 문제로 해석될 수 있다.

WTP의 추정 문제의 초기 시작점은 환경 부문에서의 nonexistence goods에 대한 지불의사액 추정 문제였다. 즉, 기존의 서비스나 환경에 대한 현재의 상황을 q^0, 신규서비스의 사용이나 환경 구축을 위한 환경을 q^1 ($q^1 > q^0$)라 하고, 간접효용함수는 $V(q^i,y,X,\varepsilon_i)$, $(i=0,1)$로 나타내자. 이때, y는 서비스 사용자의 소득, X는 서비스의 특징을 나타내는 변수, $\varepsilon_i(i=0,1)$는 관측가능하지 않은 소비자의 특징이다. 합리적인 소비자의 경우, 아래의 식이 만족될 경우 C를 지불하고자 할 것이다.

$$V(q^1,y-C,X,\varepsilon_1) \geq V(q^0,y,X,\varepsilon_0) \tag{1}$$

따라서, (1)에서 발생되는 economic compensating change W는 다음의 식을 만족하는 최대 C이다.

$$\Delta V(W,q^1,q^0,y,X,\varepsilon) \equiv V(q^1,y-C,X,\varepsilon) - V(q^0,y,X,\varepsilon) = 0$$

경제적 가치 혹은 최대 지불의사금액을 추정하는 방법론은 크게 두가지가 많이 사용되고 있다. 첫 번째 방법은 Hanemann (1984)에 의해 제안된 효용차이모델 (utility difference model)로서 $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$의 분포를 logistic, normal distribution로 가정한 후 평균 WTP를 추정하는 것으로, 식 (1)에 기반한다. 즉, $W(X,\varepsilon)$을 위 식의 해라고 하면, 다음과 같은 식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned}\Pr(Yes) &= P(V(q^1,y-C,X,\varepsilon_1) \geq V(q^0,y,X,\varepsilon)) \\ &= P(W(X,\varepsilon) \geq C) = \Pr(\Delta V \geq 0)\end{aligned}$$

두 번째는 WTP W의 확률분포를 직접 추정하는 방법으로서, McConnell (1990)에 의해 이 두 개의 방법은 결국은 같은 방법론임이 증명되었다.

본 고에서는 모수적 방법론의 일반적 가정은 WTP W와 설명변수 Z간의 선형 관계성이 성립하지 않을 경우에는 비례 위험 모형 (Porportional Hazard Model, PH Model)에 근거한 접근법이 좀 더 효율적인 결과를 낸다는 점을 확인하고자 한다. 즉, 기존의 가정인 $W=a+bZ$의 형태가 아닌 $W=1/(a+bZ)$ 혹은 $W=a+bZ+cZ^2$과 같은 관계일 경우에는 PH model에 기반한 추정 방법이 좀 더 효율적임을 모의실험을 통해 밝혀보고자 한다.

* 안춘모, 한국전자통신연구원 선임연구원, 042-860-5790, cmahn@etri.re.kr

우선 2장에서는 그 동안 연구되어온 추정방법론을 크게 모수적, 비모수적, 준모수적 관점에서 정리하였다. 또한, PH모형 및 추정 방법론을 기술하였다. 3장에서 다양한 가정하에서의 모의실험을 진행하고, 결론 및 further studies에 대해 기술한다.

II. 추정 방법론

Dichotomous choice CV 서베이를 통한 WTP의 분포를 추정하는 다양한 방법론이 제안되었으며, 이를 정리하면 크게 모수적 방법, 비모수적 방법, 준모수적 방법이 존재한다. 이를 간단히 정리하고, 본 논문에서 제안하고자 하는 recurrent data에 대한 additive hazard regression model을 적용하는 방법에 대해 제안하고자 한다.

1. 모수적 방법 (Parametric Method)

가장 대표적인 접근법은 WTP 변수에 대해 적절한 모델을 가정하는 방법이다. CV 관점에서는 많이 사용되는 분포는 linear probit 모델이다. 즉, 개인 i에 대해, W가 다음과 같은 가정을 한다.

$$W(X_i,\varepsilon_i,\beta)=w(X_i,\beta)+\varepsilon_i=\beta' X_i+\varepsilon_i$$

이때, $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$이고, $w(X_i,\beta)=\beta' X_i$이고, C_i가 설문에서 제시된 bid value일 경우 "yes"의 확률은 다음과 같이 나타난다.

$$\Pr(Yes)=\Pr(W_i>C_i)=1-\Lambda[C_i-\beta' X_i]=1-\Phi(\frac{C_i-\beta' X_i}{\sigma})$$

모수 β는 우도함수를 이용하여 추정할 수 있으며, 우도함수 L는 다음과 같이 구체화될 수 있다.

$$L=\sum_1^n \mathrm{I}(\mathrm{W_i}>\mathrm{C_i})\Pr(yes)+I(W_i\le C_i)(1-\Pr(yes))$$

이때, WTP의 조건부 평균과 조건부 median은 모두 $\beta' X_i$이다. 이외에 $W(X_i,\varepsilon_i,\beta)=\exp(\beta' X_i+\varepsilon_i)$로 가정하는 경우도 있으며, logarithm를 취한 후 상술된 과정을 거치는 추정을 한다.

2 준모수적 방법 (Semi-Parametric Method)

WTP에 대한 모수적 가정은 분포에 대한 강한 restriction이 있으므로, 이를 완화하기 위한 다양한 방법론이 제시되고 있다. 특히, Chen과 Randall (1997)이 제안한 준모수적 방법 (SNP, Semi-Nonparametric Method)이 가장 많이 사용되고 있다. 우선 W에 대해 다음과 같은 구조를 가정하고 있다.

$$W(X_i,\varepsilon_i,\beta)=\exp[w(X_i,\beta)]\varepsilon_i=G(X_i,\beta)\varepsilon_i$$

이때, $G(X_i,\beta)$는 WTP의 nonstochastic portion이며, ε_i는 측정되지 않는 에러항목이다. 이때, bid값 C_i에 대해 single bounded CV 설문에 의한 Yes 확률은 다음과 같다.

$$\Pr(yes)=P(G(X_i,\beta)\varepsilon_i\ge C_i)=\Pr(\varepsilon_i\ge\frac{C_i}{G(X_i,\beta)})$$
$$=1-\Lambda(\frac{C_i}{G(X_i,\beta)})$$

Chen과 Randall은 특정한 모델 가정을 약화시키기 위해서, 미지의 함수인 $G(\cdot)$와 $\Lambda(\cdot)$에 대해 함

수 추정량을 사용하였다. 즉, 비확률적인 부분인 G에 대해서는 Fourier Flexible Form(FFF)을 사용하였으며, 확률적 부분인 Λ에 대해서는 Gallant와 Nychka (1987)의 준모수적 추정량을 사용하였다.

3 비모수적 방법 (Nonparametric Method)

분포무관하게 WTP W의 분포 추정을 위한 방법으로는 Turnbull의 추정량이 가장 많이 사용되고 있다. Turnbull의 추정량은 베르누이 시행에 근거를 두고 있다. 즉, F_W를 WTP 변수 W의 분포함수라 할 때, bid값 b_k에 대한 "Yes"의 확률은 다음과 같다.

$$\Pr(Yes) = \Pr(WTP_i > b_k) = 1 - F_W(b_k)$$

T_k를 bid 값 b_k에 대해 응답한 총 인원, N_k를 Yes로 응답한 인원이라고 하면, $\widehat{F_W}(b_k) = N_k / T_k$와 같이 추정된다. 이를 모든 bid 값에 대해 적용시키면 WTP의 분포함수를 추정할 수 있다. 비모수적 방법의 단점은 제시할 수 있는 bid값의 한계로 인해 최대 bid값의 상단은 추정이 어려워, WTP의 mean이나 median이 정확한 일종의 lower bound가 된다는 측면이 있다.

4 준모수적 방법 II (Proportional Hazard Model)

Dichotomous choice CV 서베이를 통해 얻은 자료는 특정 bid값에 대해 지불의사를 묻는 형식이므로, 이는 결국 현시상태자료 (current status data)로 간주할 수 있다. 현시상태자료는 특정 관측 시점 C에서 특정 현상이 관측되었는가를 알 수 있으므로, 자료 형태는 세가지의 지표형태인 $(C, \Delta = I(C \le W), X(\cdot))$로 나타난다. 이때, $\Delta = 1$이면, 응답이 Yes인 경우 (WTP가 제시된 값보다 큼) 이고, $\Delta = 0$이면 No인 경우 (WTP가 제시된 값보다 작음)이다.

현시상태자료는 자료는 구간절단자료 (interval censored data)의 특수한 경우로서 많은 연구가 진행되었다. 특히, 개인의 응답에 기초하기 때문에 covariate의 관측이 가능하여, $W(t|X)$의 hazard function을 $\lambda(t|X)$라 할때, 비례 위험 모형 (proportional hazard model)의 가정 및 이때의 W의 조건부 생존함수 (Survival Function)은 다음과 같다

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t)\exp(\beta_0 X(t))$$
$$S(t|X) = [S_0(t)]^{\exp(\beta_0 X(t))}$$

이때, $\lambda(t|X) = \Pr(t \le W < t + dt|X)/\Pr(W > t|X)$, $S(t|X) = \Pr(W > t|X)$이다. 즉, $\lambda_0(t)$는 WTP 분포에서 설명변수의 영향이 제거된 baseline hazard function이고, β_0는 설명변수 $X(t)$의 영향력을 나타내는 미지의 회귀계수이다. 추정하고자 하는 estimator는 covariate의 영향력을 제외한 baseline survival 함수 $S_0(t) = \exp(-\int_0^t \lambda_0(u)du)$와 β이고, 이를 통해 특정 설명변수의 값 $X(t)$에서의 지불가능 값의 기댓값을 구할 수 있다.

현시상태자료의 추정방법은 그 중요성에 비해서 매우 제한되어 있다. 이는 현시상태자료가 매우 제한적인 정보만을 제시하고 있기 때문에, 최대우도추정량이 가장 많이 쓰이는 방법이지만 최적화 과정을 거쳐야 한다. 본 고에서는 Huang (1996)에서 제시한 소위 profile likelihood 방법론을 사용하고자 한다. 모의실험에서는 평균 WTP의 추정시 Bid Value가 균등하게 WTP를 조사하기 어려우므로, 단순히 Bid Value에 기반한 WTP의 평균 값과 Boundary의 확률을 보정한 WTP 값도 제시하고자 한다.

이를 좀 더 구체적으로 기술하면 다음과 같다. 우선, log maximum likelihood function은

$$\log L = \sum_{1}^{n} I(W_i > C_i)\Pr(yes) + I(W_i \le C_i)(1-\Pr(yes))$$
$$= \sum \Delta\{[S_0(t)]^{\exp(\beta x)} + (1-\Delta)[1-S_0(t)^{\exp(\beta x)}]\}$$

와 같으며, optimization은 각 bid value들에서 baseline hazard function $S_0(t)$를 구한 후에, 이를 통하여 β를 추정하는 procedure로 진행된다.

III. 모델 적용 및 결론

비례 위험 모형의 적용 가능성을 알아보기 위하여 일련의 모의실험을 진행하였다. 모의실험을 위한 모형은 비례위험가정을 따르는 모형과 선형모형, 조건부 기댓값이 2차형식인 모형을 가정하였다. sample size는 100개, 200개, 300개 중에서 택하여 진행하였으며, 1000번의 iteration을 하였다.

첫 번째 모형 가정은 WTP 분포가 (2)를 가지는 것으로 가정하며, 이때 조건부 X에 따른 조건부 기댓값은 $E(W|X) = 1/\exp(X)$이다.

$$\lambda(t|X) = 1 \cdot \exp(\beta \cdot X), \qquad X \sim U(0, \sqrt{12}) \tag{2}$$

W 추정을 위한 설문의 Bid value는 평균이 1인 지수분포에서 random number를 발생시켜 이를 0.1 간격으로 이산화시킨후, 이를 W의 값과 비교하였다. 모의실험 결과는 다음과 같다. X에 변화에 따른 WTP W의 조건부 기댓값은 $E(W|X) = \exp(-\beta X)$이다. 이 기댓값에 log를 취하면 이는 log-linear 모델 가정과 일치함에 주목하자. 이때, X의 평균인 $\sqrt{3}$에서의 WTP값은 $\beta = 1$인 경우는 0.176921, $\beta = 2$인 경우는 0.135335이다.

<표> 모의실험 : (2) 번 모형

평균 WTP 추정치	# of Sample : 100개 True=0.176921	# of Sample : 300개 True=0.176921	# of Sample : 200개 True=0.135335
Linear Probit	0.3552469 (0.0718488)	0.3642866 (0.0424749)	0.4132959 (0.0535591)
Log-Linear Probit	0.1884694 (0.0494847)	0.1816768 (0.0286639)	0.2139172 (0.0390141)
Proportional Hazard (Not Corrected)	0.1265858 (0.0433148)	0.1300272 (0.0261266)	0.1029658 (0.0311253)
Proportional Hazard (Corrected)	0.2453574 (0.0803934)	0.2407118 (0.0459445)	0.2655370 (0.0718397)

위의 표를 보면, True Value에 가장 근접하는 방법론은 Log-Linear Model이다. Proportional Hazard Model은 약간의 Bias가 있지만, Sample이 많을 수록 줄여가는 모습을 보이고 있다. Linear Probit 모형은 기본적인 가정이 많이 않아 매우 Bias가 큼을 알 수 있다.

두 번째 모형 가정은 W와 X가 linear인 경우를 가정하였다. 이때, 조건부 X에 따른 기댓값은 E(W|X)=100+2X이다. 따라서, 평균 WTP 값은 100이다.

$$WTP = 200 + 2 \cdot X + \varepsilon, \qquad X \sim U(-30, 30), \quad \varepsilon \sim U(-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}) \tag{3}$$

Bid Value는 100에서 280간을 20 간격으로 질문한 것으로 가정하였으며, 이는 평균인 200을 중심으로 매우 고르게 Bid Value를 선택한 이상적인 linear sample이다. 두번째 Bid Value 모형은 100,110, 120, 130, 140, 250, 260, 270, 280, 290로 구성하였다. 이 구성은 양쪽에 대칭으로 bid value가 있지만 평균인 200을 포함하지 않는 형태이다.

<표> 모의실험 : (3) 번 모형 (True Value = 200)

평균 WTP 추정치	# of Sample : 100개	# of Sample : 200개	# of Sample : 100개 (Bid Values 2번째)
Linear Probit	199.6699938 (4.7892130)	199.8383394 (3.0643187)	191.2103261 (28.3554352)
Log-Linear Probit	200.1544508 (4.7487566)	200.0000518 (3.1560332)	196.9352402 (22.8225296)
Proportional Hazard (Not Corrected)	164.1945609 (9.5810544)	168.1555481 (8.2666306)	169.8515870 (6.4814428)
Proportional Hazard (Corrected)	208.2850272 (49.5385539)	205.276 (33.9264937)	226.3317429 (28.6155716)

Linear 가정 하에서의 식 (3)의 모형에 대한 평균 WTP를 살펴보면, Linear Probit 혹은 Log-Linear Probit은 매우 좋은 performance를 보이고 있다. PH의 수정된 값도 약간의 편의가 있지만 평균값이 200 이므로 큰 Bias로 보이지는 않지만, 표준편차가 보정되면서 커짐을 알 수 있다.

본 고에서는 WTP의 추정을 위해 비례 위험 모형을 가정하였다. CVM에서는 많은 경우 평균 WTP가 필요하며, 설명변수와 covaraite에 대해서 일정한 방향성을 가지는 경우가 많아 parametric한 가정하에서도 좋은 추정결과를 보이고 있다. 그러나, WTP가 설명변수와 nonlinear한 형태로 존재할 경우에 기존의 linear한 경우가 좋지 않은 결과치를 보일 수 있다는 가정하에 비례위험 모형을 적용하였다.

모의실험에서 볼 수 있듯이 조건부 WTP의 변화가 지수형태일 경우 log-linear probit이 가장 좋은 performance를 보였으며, 예상대로 linear probit은 bias가 매우 큼을 알 수 있다. linear 형태의 조건부 기댓값은 linear probit, log-linear probit, PH model 등이 전반적으로 적절한 기댓값을 도출하고 있음을 알 수 있다.

장기적으로, linear probit이나 log-linear probit의 가정에서 크게 벗어나는 경우에 대한 고찰이 계속적으로 진행되어야 할 것이다. 이는 WTP 자체가 분포를 보는 것이 아니라, 특정 평균 값을 보기 때문에 모델 간의 정확한 비교가 되지 않으며, 이러한 점에서 비모수적 방법론이 전반적으로 좋은 performance를 보일 것이라고 예상되기 때문이다.

참 고 문 헌

[1] H.Z. Chen and A. Randall, "Semi-nonparametric estimation of binary response models with an application to natural resource valuation", J. Econ. 76, 323-340 (1997).

[2] J. Crookerand J.A. Herriges, "Parametric and semi-nonparametric estimation of Willingness-to-pay in a contingent valuation framework", Environ. Res. Econ. 27 (4), 451-480 (2004).

[3] A.R. Gallant and D.W. Nychka, "Semi-nonparametric maximum likelihood estimation", Econometrica 55, 363-390 (1987).

[4] M.W. Hanemann, "Welfare evaluations in contingent valuation experiments with discrete responses", Amer. J. Agri. Econ. 66, 103-118 (1984).

[5] M.W. Hanemann and B. Kanninen, *The statistical analysis of discrete-response CV Data*, Working Paper No. 798, 1999.

[6] J. Huang, "Efficient Estimation for the Proportional Hazards Model with Interval Censoring", the Annals of Statistics 24, No. 2, 540-568 (1996).

[7] K. E. McConnell, "Models for referendum data : The structure of discrete choice models for contingent valuation", J. Envioron. Econom. Management 18, 19-34 (1990).

[8] B. Turnbull, "The empirical distribution function with arbitrarily grouped, censored, and truncated data", J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 38, 290-295 (1976)