

2D2) 면오염원에 대한 확산방정식의 분석해

Analytical Solution of the Advection-Diffusion Equation for Area Sources

박영산·백종진¹⁾

서울대학교 기후환경시스템연구센터, ¹⁾서울대학교 지구환경과학부

1. 서론

점, 선, 그리고 풍향의 수직 방향으로 무한한 크기를 갖는 면오염원에 대한 확산방정식의 분석 해는 잘 알려져 있다(Seinfeld and Pandis, 1998; Huang, 1979; Lebedeff and Hameed, 1975). 그러나 면오염원이 유한한 크기를 갖는 경우의 분석 해에 대한 연구는 보고된 바 없는데 본 연구에서는 중첩의 방법을 이용하여 특별한 가정 없이 그 해를 구하였다.

2. 연구 방법

점오염원에 대한 정상상태의 확산방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$u(z) \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(x, z) \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(z) \frac{\partial c}{\partial z} \right) + Q \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - h) \quad (1)$$

여기서 c 는 오염농도, Q 는 오염발생량이며 δ 는 델타함수이다. 점오염원의 위치는 $(x=x_s, y=y_s, z=h)$ 이다. 풍속(u), 연직 방향과 풍향의 수직 방향의 확산계수(K_z, K_y)는 다음과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned} u(z) &= az^p \\ K_z(z) &= bz^n \\ K_y(x, z) &= \frac{1}{2} u \frac{d\sigma_y^2}{dx} \end{aligned} \quad (2)$$

이미 알려진 점오염원에 대한 분석 해를 풍향(x)과 풍향의 수직 방향(y)으로 적분하였다. 면오염원이 y 방향으로 무한한 경우는 그 분석해가 여러 단계의 과정이 필요한 상사이론(similarity theory)을 적용한 결과(Lebedeff and Hameed, 1975)와 완전히 일치하였다. 풍향(x_1 에서 x_2 까지)과 풍향의 수직(y_1 에서 y_2 까지) 방향으로 유한한 면오염원에 대한 지표면에서의 농도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c(x, y, z=0) &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} c(x-x_s, y-y_s, z) dx dy, \\ &= \frac{Q\alpha}{2a\nu\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{a}{b\alpha^2} \right)^{1-\nu} \{ [f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)] - H(x_2, x) [f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)] \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{y-y_0}{R\sqrt{2}} \right)^{2\nu} \Gamma \left(\frac{1}{2} - \nu, \frac{(y-y_0)^2}{2R^2(x-x_0)} \right) + (x-x_0)^\nu \operatorname{erf} \left(\frac{y-y_0}{R\sqrt{2(x-x_0)}} \right), \\ \alpha &= 2 + p - n, \quad \nu = \frac{1-n}{\alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

이며, Γ 는 감마함수, erf 는 오차함수이고, $H(a, b)$ 는 Heaviside 단위 계단함수로서 $a > b$ 일 때 $H(a, b) = 0$ 이고 그 외 경우에는 $H(a, b) = 1$ 이다. 수직표준편차, σ_y 는 $\sigma_y = R x^{1/2}$ 로 가정하였다(Hanna et al., 1977). R 은 상수이다. 오염원의 풍상 측 경계($x_1=0$)와 연직 상부($z \rightarrow \infty$)에서의 농도는 0, 지표면에서의 플럭스는 Q 라고 설정하였다.

3. 결과 및 고찰

면오염원의 크기가 x, y 방향 모두 L 일 때, y 방향 중심을 지나는 풍하 측의 농도변화를 $x=L$ 지점에서의 농도에 대한 비로 나타내면 수식으로 비교적 간단하게 표현되며 그림 1과 같다. 면오염원 내부에서는 거리에 따라 농도가 증가하지만 오염원 바깥에서는 그 농도가 급격히 감소한다. ν 가 작은 경우(또는 m 이 큰 경우, 즉 연직확산 계수가 높이에 따라 증가하는 경우)는 상층에서 확산이 활발하여 지표면 농도가 매우 낮고 거리에 따라 일정한 반면 ν 가 큰 경우(또는 m 이 작은 경우, 즉 연직확산 계수가 높이에 따라 거의 일정한 경우)는 농도가 상대적으로 높으면서 거리에 따라 점점 감소한다. 농도비는 상수 R 에 또한 민감하게 변하였지만 오염원 크기(L)에는 거의 무관하였다. 결국, 풍하 측 농도는 대기 상태(여기서는 ν 와 σ_y)에 따라 다른 형태를 보임을 알 수 있다.

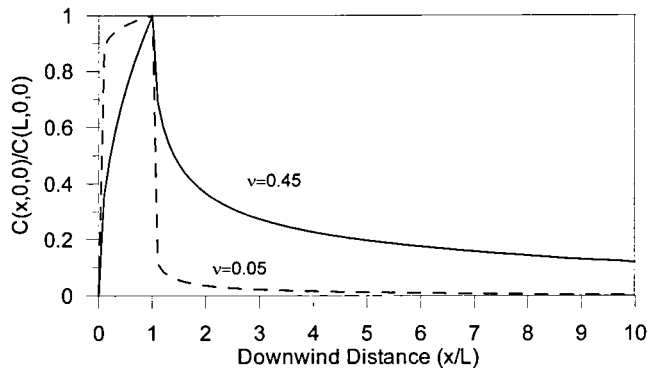


Fig. 1. Distribution of surface concentration along the wind direction. The source extends from $x=0$ to $x=L$. The solid curve is for $\nu=0.45$ and the dashed line is for $\nu=0.05$.

사 사

이 연구는 한국과학재단의 SRC 프로그램에 의해 기후환경시스템연구센터로부터 지원을 받았다.

참 고 문 헌

Hanna, S.R. et al. (1977) AMS workshop on stability classification schemes and sigma curves-Summary of recommendations, Bull. Amer. Meteor. Soc., 58, 1305-1309.
 Huang, C.H. (1979) A theory of dispersion in turbulent shear flow, Atm. Env., 13, 453-463.
 Lebedeff, S.A. and S. Hameed (1975) Steady-state solution of the semi-empirical diffusion equation for area sources, J. Appl. Meteor., 14, 546-549.
 Seinfeld, J.H. and S.N. Pandis (1998) Atmospheric Chemistry and Physics, John Wiley & Sons, 1326 pp.