

# 가변 샘플링 간격(VSI)을 갖는 선택적 누적합 (S-CUSUM) 관리도 A Selectively Cumulative Sum (S-CUSUM) Control Chart with Variable Sampling Intervals (VSI)

임태진 <이론 분야>

승실대학교 산업·정보시스템공학과 tjlim@ssu.ac.kr

## Abstract

This paper proposes a selectively cumulative sum (S-CUSUM) control chart with variable sampling intervals (VSI) for detecting shifts in the process mean. The basic idea of the VSI S-CUSUM chart is to adjust sampling intervals and to accumulate previous samples selectively in order to increase the sensitivity. The VSI S-CUSUM chart employs a threshold limit to determine whether to increase sampling rate as well as to accumulate previous samples or not. If a standardized control statistic falls outside the threshold limit, the next sample is taken with higher sampling rate and is accumulated to calculate the next control statistic. If the control statistic falls within the threshold limit, the next sample is taken with lower sampling rate and only the sample is used to get the control statistic. The VSI S-CUSUM chart produces an 'out-of-control' signal either when any control statistic falls outside the control limit or when  $L$ -consecutive control statistics fall outside the threshold limit. The number  $L$  is a decision variable and is called a 'control length'. A Markov chain model is employed to describe the VSI S-CUSUM sampling process. Some useful formulae related to the steady state average time-to signal (ATS) for an in-control state and out-of-control state are derived in closed forms. A statistical design procedure for the VSI S-CUSUM chart is proposed. Comparative studies show that the proposed VSI S-CUSUM chart is uniformly superior to the VSI CUSUM chart or to the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart with respect to the ATS performance.

**Key Words:** CUSUM, ATS, Control chart, adaptive scheme, Markov chain

## 1. 서론

관리도는 공정평균이나 공정산포의 변화를 일으키는 공정의 이상상태를 신속하게 감지하고자 사용된

다. 가장 많이 사용되어온 슈하트(Shewhart) 관리도는 공정평균의 큰 변화는 민감하게 감지하지만, 작은 변화에는 둔감한 것으로 알려져 있다. 누적합(CUSUM) 관리도[1, 5]와 지수이동평균(EWMA) 관리도[4]는 공정평균의 작은 변화에도 민감한 것으로 인정받아왔다. 최근에는 적응형(adaptive) 관리도[2, 6]가 개발되어 기존 관리도의 성능을 더욱 향상시키게 되었다.

선택적 누적합(S-CUSUM) 관리도[3]는 누적형 관리도와 적응형 관리도의 착안점을 모두 이용하여 개발된 것으로서, 임계한계(threshold limit)를 설정하여 현재 관리통계량의 상태를 기준으로 다음 관리통계량의 누적여부를 결정한다. 적응형 관리도는 달리 샘플링 크기나 샘플링 간격은 일정하게 유지하면서, 단지 관리통계량의 계산방식만을 바꾸기 때문에 관리도의 운용이 간편한 장점이 있다.

본 논문에서는 S-CUSUM 관리도에 가변 샘플링 간격(VSI)을 적용함으로써 이상신호 발생까지의 시간을 더욱 단축시킬 수 있는 VSI S-CUSUM 관리도를 제안하고, 그 통계적 특성을 규명하고자 한다.

제2절에서는 VSI S-CUSUM 관리도의 운영방법을 설명하고, 마코프(Markov)연쇄로 샘플링 프로세스를 모형화한다. 제3절에서는 관리상태에서의 평균 신호 발생시간(ATS) 식을 유도하고, 유용한 통계적 특성을 도출한다. 제4절에서는 VSI S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 방안을 제시하고, 제5절에서는 기존의 적응형 CUSUM 관리도 및 EWMA 관리도와의 비교연구를 통하여 VSI S-CUSUM 관리도의 민감도를 보인다.

## 2. VSI S-CUSUM 관리도

VSI S-CUSUM 관리도는 표준화된 관리통계량을 사용하며, 관리한계  $k$ , 관리 길이  $L$ , 임계한계  $w$ , 표본크기  $n_0$ , 샘플링 간격  $h_1, h_2$  등 여섯 가지의 설계모수를 갖는다. 표본크기는 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도와 동일하게  $n_0$ 로 설정하지만, 샘플링 간격은 관리통계량의 위치에 따라 짧은 간격  $h_1$  과 긴 간격  $h_2$  두 가지를 사용한다. 표준화된 통계량을 계산하여 관리하며, 관리통계량이 관리한계  $k$ 를 벗어나거나  $L$ 개의 연속된 관리통계량이 임계한계  $w$ 를 벗어나면 이상신호를 발생한다.

주어진 관리한계  $k$ 와 임계한계  $w$ 에 대하여,

관리통계량  $Z_i$ 의 영역을 다음과 같이 상호 배타적이고 포괄적인 (mutually exclusive and exhaustive) 세 영역으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{Z_i; |Z_i| \leq w\}, \\ I_2 &= \{Z_i; w < |Z_i| \leq k\}, \\ I_3 &= \{Z_i; |Z_i| > k\} \end{aligned} \quad (1)$$

영역  $I_1$ ,  $I_2$ , 및  $I_3$ 을 각각 일치영역, 의심영역, 불일치영역이라 하자. VSI S-CUSUM 관리도에서는 관리통계량이 의심영역에 속하면 짧은 샘플링 간격  $h_1$ 으로 다음 샘플링을 행하고 표본을 누적하여 관리통계량을 계산한다. 반면 관리통계량이 일치영역에 속하면 긴 샘플링 간격  $h_2$ 로 다음 샘플링을 행하고 다음 표본만으로 관리통계량을 계산한다.

공정의 목표값을  $\mu_0$ , 표준편차를  $\sigma$ 라 하면,  $i$ 번째 샘플링 간격  $h_{(i)}$ 와 관리통계량  $Z_i (i \geq 1)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 편의상  $Z_0 \in I_1$ 으로 간주한다.

$$h_{(i)} = \begin{cases} h_2, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ h_1, & \text{if } Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (i \geq 1) \quad (2)$$

$$Z_i = \begin{cases} \sqrt{n_0} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ \sqrt{j n_0} \frac{(\sum_{m=i-j+1}^i \bar{X}_m / j - \mu_0)}{\sigma}, & \text{if } Z_{i-j} \in I_1, Z_{i-j+1}, \dots, Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (3)$$

단,  $L$ 개의 연속된  $Z_i$ 가 의심영역에 속하면 이상신호가 발생되므로  $j \leq L$ 로 제한된다.

공정특성치는 정규분포를 따르고, 공정은 관리상태  $N(\mu_0, \sigma^2)$ 에서 시작하며, 이상원인이 발생하면 공정평균이  $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 로 이동한다고 가정하자. 관리통계량에 누적된 표본크기가  $j n_0$ 이고, 공정평균이  $\delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 만큼 이동하였다면, 관리통계량이 영역  $I_1, I_2, I_3$ 에 각각 속할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(j, \delta) &= \Phi(w - \delta\sqrt{j}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{j}), \\ p_2(j, \delta) &= 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{j}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{j}), \\ p_3(j, \delta) &= 1 - p_1(j, \delta) - p_2(j, \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

단,  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규 누적확률분포를 나타낸다.

다음으로 VSI S-CUSUM 관리도의 운영특성을 규명하기 위하여 상태를 정의하고, 마코프연쇄를 구성한다. 한 번의 샘플링을 행할 때 다음과 같이 네 가지의 경우를 고려한다.

○: 관리통계량이 일치영역에 속함  
△: 공정은 관리상태이며 관리통계량은 의심영역에 속함

▲: 공정은 이상상태이며 관리통계량은 의심영역에 속함

◆: 관리통계량이 불일치 영역에 속함

관리통계량이 불일치영역에 속하면 이상신호가 발생하므로 과도(transient)상태에서는 고려할 필요가 없다. 가장 최근의  $L-1$ 개 관리통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 을 고려하여 다음 통계량  $Z_i$ 를 결정하는데, 관리통계량이 일단 일치영역에 속하게 되면 그 이전의 표본은 더 이상 사용하지 않으므로 경우를 고려할 필요 없이  $\star = \circ \cup \triangle \cup \blacktriangle$ 로 나타낼 수 있다. 따라서  $i$ 번째 샘플링 시점에서 다음과 같이 총  $M \equiv L(L+1)/2$ 개의 과도상태와 하나의 흡수상태를 정의한다[3].

상태 벡터:  $(Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1})$ 의 위치를 나타냄

상태 (1,1): ( $\star, \dots, \star, \star, \star, \circ$ )

상태 (2,1): ( $\star, \dots, \star, \star, \circ, \triangle$ )

상태 (2,2): ( $\star, \dots, \star, \star, \circ, \blacktriangle$ )

상태 (3,1): ( $\star, \dots, \star, \circ, \triangle, \triangle$ )

상태 (3,2): ( $\star, \dots, \star, \circ, \triangle, \blacktriangle$ )

상태 (3,3): ( $\star, \dots, \star, \circ, \blacktriangle, \blacktriangle$ )

...

상태 (L,1): ( $\triangle, \triangle, \dots, \triangle, \triangle, \triangle$ )

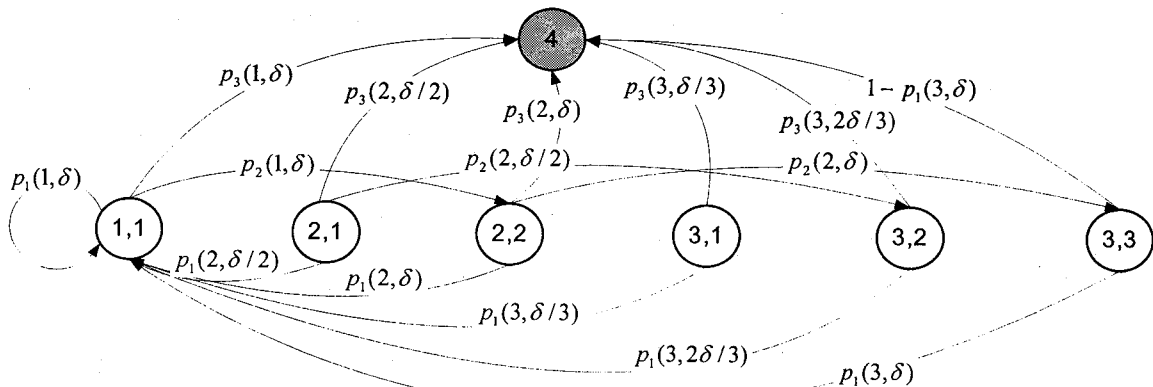
상태 (L,2): ( $\triangle, \triangle, \dots, \triangle, \triangle, \blacktriangle$ )

...

상태 (L,L): ( $\blacktriangle, \blacktriangle, \dots, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle$ )

상태 (L+1) (흡수상태): 이상신호 발생. 즉, 관리통계량이 불일치영역에 속하거나, 연속된  $L$ 개의 관리통계량이 의심영역에 속함.

일예로서  $L=3$ 인 경우의 상태전이도는 [그림 1]과 같다.



[그림 1] VSI S-CUSUM 관리도의 상태전이도 ( $L=3$ )

이상의 상태 정의에 따라 아래의  $(M+1) \times (M+1)$  전이행렬을 갖는 마코프연쇄로 VSI S-CUSUM 관리도의 샘플링 프로세스를 설명할 수 있다.

$$P_\delta = \begin{pmatrix} Q_\delta(I - Q_\delta)1_M \\ 0^T & 1 \end{pmatrix},$$

단,  $1_M$ 은  $(M \times 1)$ 단위벡터,  $Q_\delta$ 는 과도상태에 대한  $M \times M$  전이행렬을 나타내며, 그 원소는 다음과 같다.

$$q_{\delta(j,k)(1,1)} = p_1(j, k\delta/j), \quad j, k = 1, \dots, L \quad (5a)$$

$$q_{\delta(j,k)(j+1,k+1)} = p_2(j, k\delta/j), \quad j, k = 1, \dots, L-1 \quad (5b)$$

단, 위의 경우를 제외한 나머지 상태전이확률은 모두 0이 된다.

초기상태확률은 공정이 관리상태를 오랫동안 지속해왔다는 전제 하에서 정상상태(steady state) 확률로서 정의하므로, 초기상태는  $(1,1), (2,1), \dots, (L,1)$  등  $L$ 개의 상태만이 고려된다. 관리상태에서는 평균이동이 발생하지 않으므로( $\delta=0$ ) 사용된 표본크기가 식 (4)의 계산에 영향을 미치지 않는다. 따라서 표본크기와 무관하게  $p_i(j,0) = p_i(0)$ 로 나타낼 수 있다. 관리상태 하의 과도상태 전이행렬을  $Q_0$ 이라 하면, 다음과 같은 원소로 구성된다.

$$q_{0(j,1)(1,1)} = p_1(0), \quad j = 1, \dots, L \quad (6a)$$

$$q_{0(j,1)(j+1,1)} = p_2(0), \quad j = 1, \dots, L-1 \quad (6b)$$

위의 경우를 제외한 나머지 상태전이확률은 모두 0이 된다.

관리상태 하의 정상상태 확률벡터  $\pi_0 = (\pi_{1,1}, \pi_{2,1}, \dots, \pi_{L,1})^T$ 는 다음 연립식의 해를 구하여 계산할 수 있다.

$$\pi_0^T Q_c = \pi_0^T, \quad \pi_0^T 1_L = 1, \quad (7)$$

단, 행렬  $Q_c$ 는 이상신호가 발생하지 않았다는 전제 하의 조건부 전이행렬을 나타내며 다음과 같은 원소로 구성된다.

$$q_{c(j,1)(1,1)} = \frac{p_1(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, \quad j = 1, \dots, L \quad (8a)$$

$$q_{c(j,1)(j+1,1)} = \frac{p_2(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, \quad j = 1, \dots, L \quad (8b)$$

식 (7)으로부터 구한 해를 대입하여 전체의 과도상태에 대한  $M \times 1$  초기상태확률 벡터를  $\pi = (\pi_{1,1}, \pi_{2,1}, 0, \pi_{3,1}, 0, 0, \dots, \pi_{L,1}, 0, \dots, 0)^T$ 와 같이 설정하면, 정상상태의 평균 런길이(ARL)와 ATS는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$ARL_\delta = \pi^T (I - Q_\delta)^{-1} 1_M, \quad (9)$$

$$ATS_\delta = \pi^T (I - Q_\delta)^{-1} h_M, \quad (10)$$

단,  $h_M = (h_2, h_1, \dots, h_1)^T$ 인  $M \times 1$  샘플링 간격 벡터를 나타낸다.

### 3. VSI S-CUSUM 관리도의 통계적 특성

VSI S-CUSUM 관리도의 설계에 필요한 통계적 특성을 살펴본다. 먼저, S-CUSUM 관리도에 대한 기존 연구결과는 다음과 같다[3].

[보조정리 1] 관리상태 하의 ARL 벡터를

$$ARL_{R,0} \equiv (I - Q_0)^{-1} 1_L = (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{L,1})^T$$

이라 하면, 각각의 원소는 다음과 같다.

$$a_{i,1} = \sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j / D_0, \quad (11)$$

$$\text{단, } D_0 = |I - Q_0| = 1 - p_1(0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(0)^j, \quad (12)$$

[보조정리 2] 식 (7)로부터 계산된 정상상태 확률은 다음과 같다.

$$\pi_{i,1} = \frac{[p_2(0) / \{p_1(0) + p_2(0)\}]^{i-1}}{\sum_{j=1}^L [p_2(0) / \{p_1(0) + p_2(0)\}]^{j-1}} \quad (i = 1, \dots, L). \quad (13)$$

다음으로 관리상태 하의 ATS 벡터를 다음과 같이 계산할 수 있다.

[정리 1] 관리상태 하의 ATS 벡터를

$$ATS_{R,0} \equiv (I - Q_0)^{-1} h_L = (t_{1,1}, t_{2,1}, \dots, t_{L,1})^T$$

이라 하면,

$$t_{1,1} = \left[ h_1 \sum_{j=1}^{L-1} p_2(0)^j + h_2 \right] / D_0, \quad (14a)$$

$$t_{i,1} = [h_1 \{1 - p_1(0)\} + h_2 p_1(0)] \sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j / D_0, \quad (2 \leq i \leq L) \quad (14b)$$

[증명]

[그림 2]에 나타난 바와 같이 상태  $(1,1)$ 에서 시작하여 상태  $(1,1)$ 로 돌아오는 주기의 확률은

$$p_1(0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(0)^j \text{이다. 따라서 식 (12)의 } D_0 \text{은 상태}$$

$(1,1)$ 에서 시작하여 상태  $(1,1)$ 로 다시 돌아오지 않고 흡수상태로 전이할 확률을 나타내고, 역수  $1/D_0$ 은 평균 주기수를 나타낸다. 식 (11)  $a_{(i,1)}$ 의

분자항  $\sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j$ 은 한 주기당 상태  $(i,1)$ 에서 시작하여 과도상태에 머문 기대회수를 나타낸다. 상태  $(1,1)$ 에서 시작한 경우에는 이때의 샘플링 간격  $h_2$ 에 나머지 과도상태에서 머문 시간

$h_1 \sum_{j=1}^{L-1} p_2(0)^j$ 이 합쳐져 주기당 과도상태에 머문 평균시간이 되므로 식 (14a)를 얻는다. 상태  $(i,1)$  ( $i \geq 2$ )에서 시작한 경우에는 주기당 과도상태에 머문 회수  $\sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j$ 이 각각 상태  $(1,1)$ 을 거치는 경우  $h_2 p_1(0)$ 과 아닌 경우  $h_1 \{1 - p_1(0)\}$ 로 나뉘므로 식 (14b)를 얻는다. ■

샘플링 간격  $h_1 = h_2 = 1$ 인 경우, 식 (14)의 ATS는 식 (11)의 ARL과 같아진다. 다음으로 식 (9)와 (10)의 이상상태 하의 ARL과 ATS를 구하는

과정을 살펴본다. [그림 3]에 예시된 바와 같이 전체  $M = L(L+1)/2$ 개의 상태 중 자기 자신으로 돌아올 수 있는 상태는  $(1,1), (2,2), \dots, (L,L)$  등  $L$ 개 뿐이다. 이들을 '유효상태'라 명명하자. 또한 이들 유효상태는 초기상태로부터 상태  $(1,1)$ 을 거쳐야 도달할 수 있다. 이에 착안하여 전이행렬  $Q_\delta$ 를 다음과 같이 두 부분으로 나눈다: ① 초기상태로부터 상태  $(1,1)$ 까지의 전이 ② 상태  $(1,1)$ 로부터 유효상태까지의 전이.

다음의 정리들은 이상상태 하의 ARL과 ATS를 계산하는 알고리즘의 기초를 제공한다.

[정리 2] 유효상태 간의 전이행렬을  $Q_{E,\delta}$ 라 하면

$$D_\delta = |I - Q_\delta| = |I - Q_{E,\delta}|$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^L \left[ p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right], \quad (15)$$

단,  $\prod_{j=1}^0 (\cdot) \equiv 1$ 로 정의한다.

[증명]

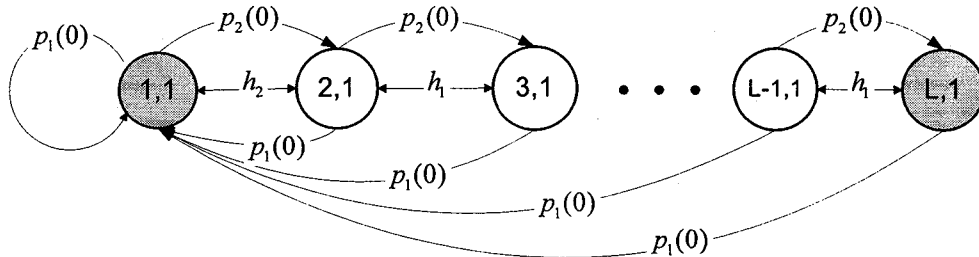
[그림 3]에 예시된 바와 같이 상태  $(1,1)$ 에서 시작하여 상태  $(1,1)$ 로 돌아오는 주기의 확률은  $\sum_{i=1}^L \left[ p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right]$ 이다. 따라서 행렬값  $D_\delta$ 는 상태  $(1,1)$ 에서 시작하여 상태  $(1,1)$ 로 돌아오지 않고 흡수상태로 전이하는 확률을 나타내므로 유효상태 외에는 무관하다. ■

[정리 3] 이상상태 하의 ARL 벡터를

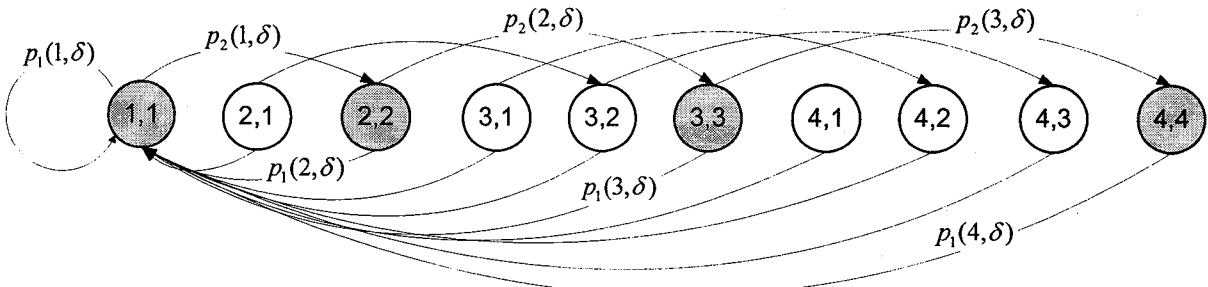
$$ARL_\delta = (I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{1}_M$$

$$= (a_{1,1}(\delta), a_{2,1}(\delta), a_{2,2}(\delta), \dots, a_{L,L}(\delta))^T$$

라 하면,



[그림 2] 관리상태 하의 상태전이도



[그림 3] 이상상태 과도상태 간의 상태전이도 ( $L=4$ )

$$a_{1,1}(\delta) = \sum_{i=1}^L u_i(\delta) / D_\delta, \quad (16)$$

$$a_{i,1}(\delta) = v_i(\delta) a_{1,1}(\delta) + e_i(\delta), \quad (2 \leq i \leq L) \quad (17)$$

단,

$$u_1(\delta) = 1, \quad u_i(\delta) = \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta), \quad (2 \leq i \leq L) \quad (18)$$

$$v_1(\delta) = 1,$$

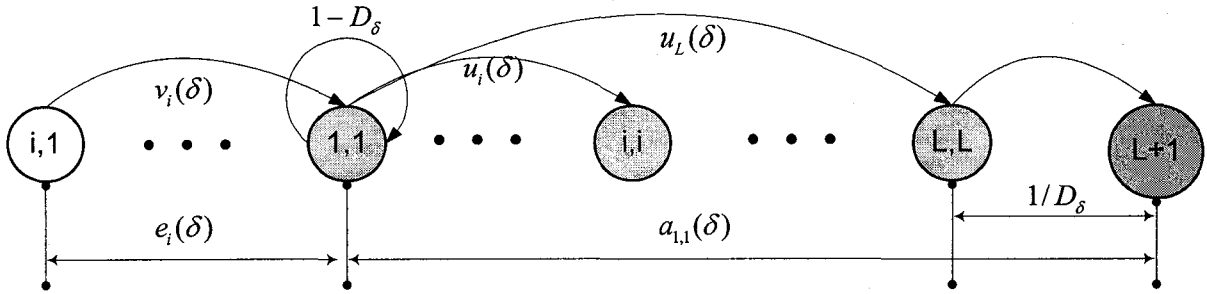
$$v_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[ p_1(i+j-1, \frac{j\delta}{i+j-1}) \times \prod_{m=1}^{j-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right] \quad (2 \leq i \leq L) \quad (19)$$

$$e_1(\delta) = 0,$$

$$e_i(\delta) = \sum_{j=2}^{L-i+1} \left[ \prod_{m=1}^{j-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right], \quad (2 \leq i \leq L) \quad (20)$$

[증명]

[그림 4]에 나타난 바와 같이  $u_i(\delta)$ 는 상태  $(1,1)$ 로부터 유효상태  $(i,i)$ 까지 직접 이르는 확률을 나타내므로 식 (18)과 같다. 따라서 식 (16)의  $a_{1,1}(\delta)$ 는 상태  $(1,1)$ 에서 시작하여 흡수상태로 들어가기까지의 기대 전이회수를 나타낸다. 또한  $v_i(\delta)$ 는 초기상태  $(i,1)$ 로부터 상태  $(1,1)$ 까지 이르는 확률을 나타내므로 식 (19)와 같다. 마지막으로  $e_i(\delta)$ 는 초기상태  $(i,1)$ 로부터 상태  $(1,1)$ 에 이르기 전까지의 기대 전이회수를 나타낸다. 따라서 초기상태  $(i,1)$ 에서 시작하여 흡수상태로 들어가기까지의 기대 전이회수는 식 (17)과 같이 구할 수 있다. ■



[그림 4] 과도상태 전이의 분해

[정리 4] 이상상태 하에서의 ATS 벡터를

$$ATS_{\delta} = (I - Q_{\delta})^{-1} h_M \\ = (t_{1,1}(\delta), t_{2,1}(\delta), t_{2,2}(\delta), \dots, t_{L,L}(\delta))^T$$

라 하면,

$$t_{1,1}(\delta) = \left[ h_2 u_1(\delta) + h_1 \sum_{i=2}^L u_i(\delta) \right] / D_{\delta}, \quad (21)$$

$$t_{i,1}(\delta) = u_i(\delta) t_{1,1}(\delta) + h_1 e_i(\delta), \quad (2 \leq i \leq L) \quad (22)$$

[증명]

상태 (1,1)에서 머문 시간은  $h_2$  이고, 나머지 과도상태에서 머문 시간은  $h_1$  이므로 식 (16)과 (17)로부터 자명하게 구해진다. ■

이상의 결과를 종합하여 정상상태 ATS를 계산하는 알고리즘을 다음과 같이 정리할 수 있다.

#### ATS 계산 알고리즘

[단계 0] 설계변수  $k, w, L, n_0, h_1, h_2$  와 평균 이동 폭  $\delta$  를 정한다.

[단계 1] 식 (4)의 전이확률  $p_i(j, m\delta/j)$  를 계산한다. ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, L; m = 1, \dots, j$ )

[단계 2] 식 (13)의 정상상태 확률  $\pi_{i,1}$  을 계산한다. ( $1 \leq i \leq L$ )

[단계 3] 식 (15)의  $D_{\delta}$  를 계산한다.

[단계 4] 식 (18)의  $u_i(\delta)$  를 계산한다. ( $1 \leq i \leq L$ )

[단계 5] 다음과 같은 크기  $(L-i+1)$  벡터를 계산한다. ( $2 \leq i \leq L$ )

$$b_i^T(\delta) = \left( 1, p_2(i, \delta/i), p_2(i, \delta/i)p_2(i+1, \frac{2\delta}{(i+1)}), \dots, \prod_{m=1}^{L-i} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right)$$

$$c_i^T(\delta) = \left( p_1(i, \delta/i), p_1(i+1, 2\delta/(i+1)), \dots, p_1(L, (L-i+1)\delta/L) \right)$$

[단계 6]  $v_1(\delta) = 1, e_1(\delta) = 0$  으로 놓는다.

$$v_i(\delta) = c_i^T(\delta) b_i(\delta), \quad e_i(\delta) = b_i^T(\delta) 1_{L-i+1} \text{ 을 계산한다. } (2 \leq i \leq L)$$

[단계 7] 식 (21)과 (22)로부터  $t_{(i,1)}(\delta)$  를 계산한다. ( $1 \leq i \leq L$ )

#### 4. VSI S-CUSUM 관리도의 통계적 설계

앞에서 도출한 통계적 특성을 이용하여 VSI

S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 절차를 제안한다. 먼저 유의수준  $\alpha$  를 지정하면, 관리상태 하의 ARL은 다음과 같이 결정된다.

$$ARL_0 = \pi_0^T (I - Q_0)^{-1} 1_L = \pi_0^T ARL_{R,0} \equiv 1/\alpha \quad (23)$$

정규분포를 따르는 경우, 관리한계  $k_0$  인 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도에서는  $\alpha = 2\Phi(-k_0)$  와 같다. 여기서  $\pi_0$  와  $ARL_{R,0}$  는 관리 길이  $L, p_1(0)$  및  $p_2(0)$  만의 함수이다. 따라서  $L$  과  $k$  가 정해지면, 식 (23)으로부터 임계한계  $w$  를 결정할 수 있다. 관리한계  $k = 3.1$  과  $k = 4.0$  에 대하여 임계한계를 계산한 결과는 <표 1>과 같다.

다음으로 관리상태 하의 ATS에 대한 제약을 다음과 같이 부과한다.

$$ATS_0 = \pi_0^T (I - Q_0)^{-1} h_L = \pi_0^T ATS_{R,0} \equiv h_0/\alpha \quad (24)$$

따라서  $L, k, w, h_1$  등이 정해지면 식 (24)로부터  $h_2$  를 구할 수 있다. 다음의 정리로부터 주어진  $L$  과  $k$  에 대하여 최소의  $ATS_{\delta}$  를 갖는  $h_1$  을 쉽게 결정할 수 있다.

[정리 5] 현실적으로 실현 가능한 최소의 샘플링 간격을  $h_{\min}$  이라 하자. 주어진  $L$  과  $k$  에 대하여 최소의  $ATS_{\delta}$  를 갖는  $h_1$  은 다음과 같이 결정된다.

$$h_1^* = \begin{cases} h_{\min}, & \text{if } ATS_{\delta} < h_0 ARL_{\delta}, \text{ for } h_1 < h_0; \\ h_0, & \text{if } ATS_{\delta} > h_0 ARL_{\delta}, \text{ for } h_1 < h_0 \end{cases} \quad (25)$$

[증명]

먼저 앞의 정리들로부터  $ATS_0$  와  $ATS_{\delta}$  를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ATS_0 = A_{0,1} h_1 + A_{0,2} h_2, \quad (26)$$

$$\text{단, } ARL_0 = A_{0,1} + A_{0,2}, \quad (27)$$

$$ATS_{\delta} = A_{\delta,1} h_1 + A_{\delta,2} h_2, \quad (28)$$

$$\text{단, } ARL_{\delta} = A_{\delta,1} + A_{\delta,2}. \quad (29)$$

따라서 제약식  $ATS_0 = h_0 ARL_0$  로부터 다음과 같이  $h_2$  를 나타낼 수 있다.

$$h_2 = (h_0 ARL_0 - A_{0,1} h_1) / A_{0,2} \quad (30)$$

이를  $ATS_{\delta}$  의 식에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$ATS_{\delta} = A_{\delta,2} h_0 ARL_0 / A_{0,2} + (A_{\delta,1} - A_{\delta,2} A_{0,1} / A_{0,2}) h_1 \quad (31)$$

즉,  $ATS_{\delta}$  는  $h_1$  의 선형함수가 된다. 만약

$A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2}$  항이 양수이면  $ATS_{\delta}$ 는  $h_1$ 에 대하여 증가함수가 되므로 최적의  $h_1$ 은 최소 샘플링 간격  $h_{min}$ 이 된다. 반대의 경우 최적의  $h_1$ 은 최대값  $h_0$ 가 된다. 또한 식 (31)에 식 (27)과 (29)를 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$ATS_{\delta} - h_0ARL_{\delta} = \left( A_{\delta,1} - \frac{A_{\delta,2}A_{0,1}}{A_{0,2}} \right) (h_1 - h_0)$$

따라서  $h_1 < h_0$ 인 임의의  $h_1$ 에 대하여  $ATS_{\delta} < h_0ARL_{\delta}$ 이면  $A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2}$ 는 양수가 되므로 최적의  $h_1$ 은  $h_{min}$ 이 된다. 반대로  $ATS_{\delta} > h_0ARL_{\delta}$ 이면 최적의  $h_1$ 은  $h_0$ 가 된다. ■

<표 1> 관리한계  $k = 3.1$ 과  $k = 4.0$ 에 대한 임계한계 ( $k_0 = 3.0$ )

$k = 3.1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
00	$w = k_0$	2.17096	1.66327	1.35319	1.14150	0.98660	0.86785	0.77371	0.69717	0.63369
10	0.58018	0.53446	0.49496	0.46051	0.43019	0.40332	0.37935	0.35784	0.33844	0.32086
20	0.30486	0.29023	0.27682	0.26448	0.25309	0.24255	0.23277	0.22366	0.21518	0.20725
30	0.19982	0.19286	0.18631	0.18015	0.17434	0.16885	0.16366	0.15875	0.15409	0.14966
40	0.14546	0.14145	0.13764	0.13401	0.13054	0.12722	0.12405	0.12102	0.11811	0.11532
50	0.11265	0.11008	0.10762	0.10524	0.10296	0.10076	0.09865	0.09661	0.09464	0.09274
60	0.09090	0.08913	0.08742	0.08576	0.08416	0.08260	0.08110	0.07964	0.07823	0.07686
70	0.07553	0.07424	0.07299	0.07178	0.07060	0.06945	0.06833	0.06724	0.06619	0.06516
80	0.06416	0.06318	0.06223	0.06131	0.06040	0.05952	0.05867	0.05783	0.05701	0.05621
90	0.05543	0.05467	0.05393	0.05321	0.05250	0.05180	0.05112	0.05046	0.04981	0.04918
100	0.04856	0.04795	0.04735	0.04677	0.04620	0.04564	0.04510	0.04456	0.04403	0.04352
110	0.04301	0.04252	0.04203	0.04155	0.04109	0.04063	0.04018	0.03974	0.03930	0.03888
120	0.03846	0.03805	0.03764	0.03725	0.03686	0.03648	0.03610	0.03573	0.03537	0.03501
130	0.03466	0.03431	0.03398	0.03364	0.03331	0.03299	0.03267	0.03236	0.03205	0.03175
140	0.03145	0.03116	0.03087	0.03058	0.03030	0.03003	0.02975	0.02949	0.02922	0.02896
150	0.02870	0.02845	0.02820	0.02796	0.02772	0.02748	0.02724	0.02701	0.02678	0.02656
160	0.02634	0.02612	0.02590	0.02569	0.02548	0.02527	0.02506	0.02486	0.02466	0.02447
170	0.02427	0.02408	0.02389	0.02370	0.02352	0.02334	0.02316	0.02298	0.02280	0.02263
180	0.02246	0.02229	0.02212	0.02196	0.02180	0.02164	0.02148	0.02132	0.02116	0.02101
190	0.02086	0.02071	0.02056	0.02041	0.02027	0.02013	0.01999	0.01985	0.01971	0.01957
$k = 4.0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
00	$w = k_0$	1.93757	1.45656	1.16930	0.97515	0.83422	0.72699	0.64259	0.57442	0.51824
10	0.47117	0.43120	0.39685	0.36703	0.34094	0.31792	0.29747	0.27921	0.26280	0.24800
20	0.23457	0.22234	0.21117	0.20093	0.19151	0.18282	0.17478	0.16732	0.16039	0.15393
30	0.14789	0.14225	0.13696	0.13200	0.12732	0.12292	0.11877	0.11485	0.11114	0.10763
40	0.10429	0.10113	0.09812	0.09526	0.09253	0.08993	0.08745	0.08508	0.08281	0.08064
50	0.07856	0.07657	0.07466	0.07283	0.07107	0.06938	0.06775	0.06619	0.06468	0.06323
60	0.06183	0.06048	0.05917	0.05791	0.05670	0.05552	0.05438	0.05328	0.05222	0.05119
70	0.05019	0.04922	0.04829	0.04738	0.04649	0.04564	0.04480	0.04400	0.04321	0.04245
80	0.04170	0.04098	0.04028	0.03960	0.03893	0.03828	0.03765	0.03704	0.03644	0.03585
90	0.03528	0.03473	0.03419	0.03366	0.03314	0.03264	0.03214	0.03166	0.03119	0.03073
100	0.03029	0.02985	0.02942	0.02900	0.02859	0.02819	0.02779	0.02741	0.02703	0.02666
110	0.02630	0.02595	0.02560	0.02526	0.02493	0.02461	0.02429	0.02397	0.02367	0.02336
120	0.02307	0.02278	0.02250	0.02222	0.02194	0.02167	0.02141	0.02115	0.02090	0.02065
130	0.02040	0.02016	0.01992	0.01969	0.01946	0.01924	0.01902	0.01880	0.01858	0.01837
140	0.01817	0.01797	0.01777	0.01757	0.01738	0.01719	0.01700	0.01681	0.01663	0.01645
150	0.01628	0.01611	0.01594	0.01577	0.01560	0.01544	0.01528	0.01512	0.01497	0.01481
160	0.01466	0.01451	0.01437	0.01422	0.01408	0.01394	0.01380	0.01367	0.01353	0.01340
170	0.01327	0.01314	0.01301	0.01289	0.01276	0.01264	0.01252	0.01240	0.01229	0.01217
180	0.01206	0.01194	0.01183	0.01172	0.01162	0.01151	0.01140	0.01130	0.01120	0.01110
190	0.01100	0.01090	0.01080	0.01070	0.01061	0.01051	0.01042	0.01033	0.01024	0.01015

이상의 결과를 토대로 VSI S-CUSUM 관리도의 통계적 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

[단계 0] 비교하고자 하는 Shewhart  $\bar{X}$ -관리도의 설계모수  $n_0, h_0, k_0$ 와  $ARL_0, h_{min}, \delta$  등을 정한다. 관리한계  $k$ 의 최대값  $k_{max}$ 와 증분  $\Delta k$ 를 결정한다. 경험상 관리한계  $k$ 의 최대값  $k_{max} = k_0 + 1$ , 증분  $\Delta k = 0.1$ 로 설정하는 것이 바람직하다.

[단계 1]  $L = 1, k = k_0 + \Delta k$ 로 초기화 한다.

[단계 2] 식 (23)의 해  $w$ 를 계산한다.

[단계 3]  $h_1 = h_{min}$ 으로 놓고 식 (24)의 해  $h_2$ 를 계산한다.

[단계 4]  $L, k, w, h_1, h_2$ 와  $\delta$ 를 대입하여  $ARL_\delta$ 와  $ATS_\delta$ 를 계산하고, 식 (25)를 기준으로 최적의  $h_1$ 을 결정한다. 만약  $h_1^* = h_0$ 이면  $h_2^* = h_0$ 로 놓는다. 최적해를 저장한다.

[단계 5]  $ATS_\delta$ 가 감소하는 한  $L$ 을 1씩 증가시키면서 [단계 2]~[단계 4]를 반복한다.

[단계 6] 주어진  $k$ 에 대해 최적해가 구해지면  $k = k + \Delta k$ 로 증가시키고  $L = 1$ 로 재설정한다. [단계 2]~[단계 5]를 반복한다.

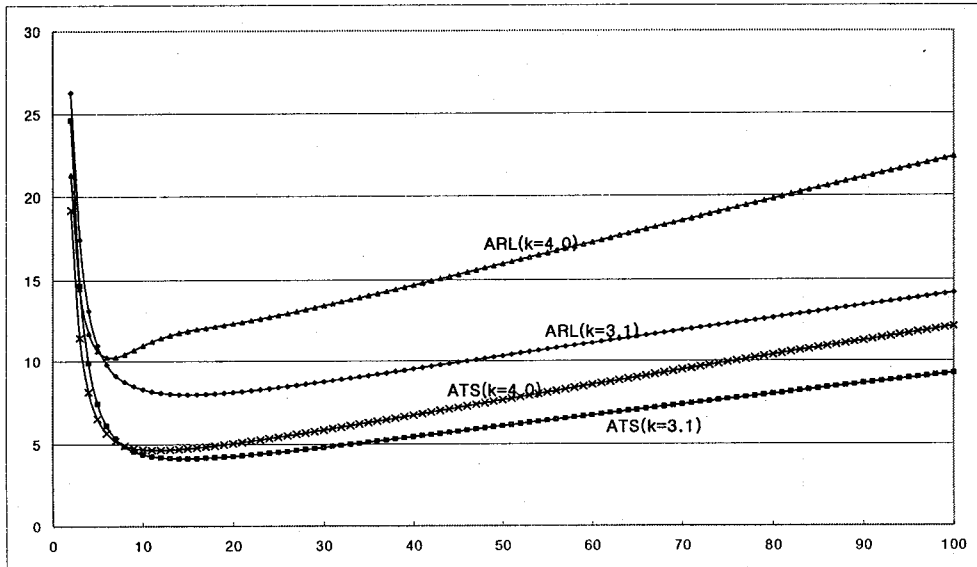
[단계 7]  $k = k_{max}$ 이면 종료하고, 최소의  $ATS_\delta$ 를 갖는  $L, k, w, h_1, h_2$ 를 최적해로 한다.

[그림 5]는  $n_0 = 1, k_0 = 3.0, h_{min} = 0.1, \delta = 1$ 인 경우,  $k = 3.1$ 과  $k = 4.0$  각각에 대하여 관리 길이  $L$ 값의 증가에 따른 최소의  $ATS_\delta$ 와 이때의  $ARL_\delta$ 의 변화를 나타낸다. 그림에 나타난 바와 같이 S-CUSUM 관리도에 VSI 특성을 부과함으로써 이상신호 발생시간을 크게 줄일 수 있음을 알 수 있다. 또한 주목할 점은  $L$ 값이 증가함에 따라 단조감소 후 단조 증가하는 경향을 나타낸다는 점이다. 이러한 특성은 위의 알고리즘의 [단계 5]에

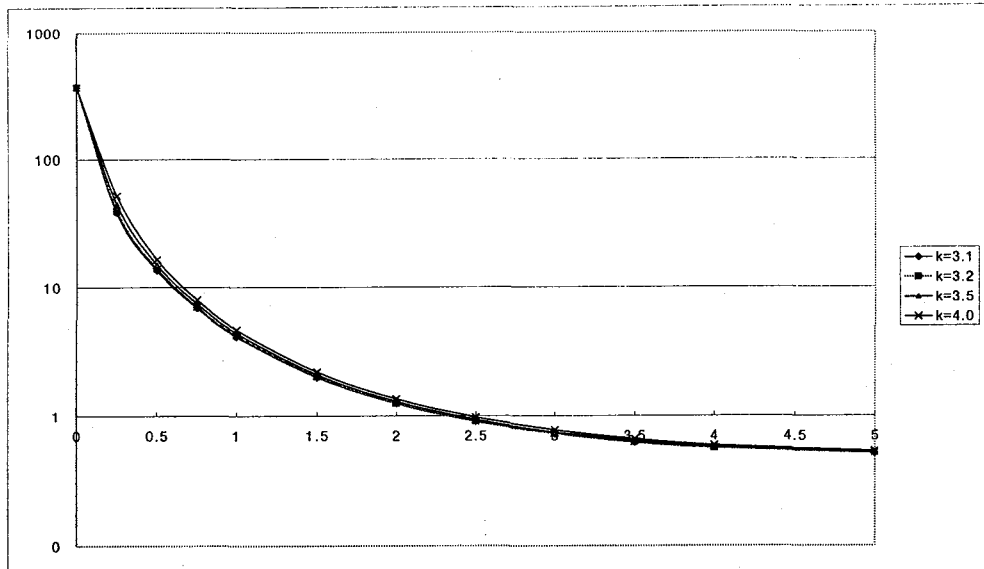
서  $ATS_\delta$ 가 감소하다가 증가하기 시작하는 직전의  $L$ 값이 최적임을 뒷받침한다.

[그림 6]은  $n_0 = 1, k_0 = 3.0, h_{min} = 0.1, \delta = 1$ 인 경우, 몇 가지 관리한계  $k$  값에 대하여  $\delta$ 에 따른 최적  $ATS_\delta$ 의 변화를 대수 척도로 나타낸 것이다. 그림에서 나타난 바와 같이 관리한계의 변화는 최적  $ATS_\delta$ 에 큰 영향을 미치지 않는다. 이러한 특성은 위의 알고리즘에서  $k_{max} = k_0 + 1$ , 증분  $\Delta k = 0.1$ 로 놓으면 충분하다는 이유를 뒷받침한다.

<표 2>는  $n_0 = 1, k_0 = 3.0, h_0 = 1.0 (ARL_0 = ATS_0 \approx 370.4), h_{min} = 0.1$ 인 경우, 다양한  $k$  값(3.1, 3.2, 3.5, 4.0)에 대하여  $\delta$ 를 0.25에서 5까지 증가시키면서 계산한 최적  $ATS_\delta$ 와  $ARL_\delta$  값을 나타낸다. 모든 경우에 있어서  $\delta$ 가 작을수록 최적 관리 길이( $L$ )는 증가하고 임계한계( $w$ )는 감소하는 경향을 보인다. 즉, 공정평균의 작은 변화에 대해서는 임계한계를 작게 설정하여 일치영역을 줄이는 것이 좋으며, 이때  $ATS_0$ 와  $ARL_0$ 를 유지하기 위해 관리 길이는 크게 잡는 것이다. 대부분의 경우  $h_1$ 의 최적해는  $h_{min}$ 으로 나타났는데, 이는 VSI 방식이  $ATS_\delta$ 를 줄이는데 효과적임을 의미한다. 실제로 최적  $ATS_\delta$ 는  $ARL_\delta$ 에 비해 눈에 띄게 개선되었음을 알 수 있다.  $ATS_\delta$ 와  $ARL_\delta$ 는  $k = 3.1$ 에서 전반적으로 가장 우수한 특성을 보였으나,  $k = 3.2$ 인 경우와 큰 차이를 보이지는 않는다. 단,  $k = 3.5$ 나  $k = 4.0$ 과 같이 넓은 관리한계를 사용하면 전반적인 ATS 성능이 저하되는 경향을 보이므로 바람직하지 않음을 알 수 있다. 마지막 열의  $E[h]$ 는 관리상태 하에서 샘플링 간격의 기댓값을 나타내며, 이들 값이 1 이상이므로 고정 샘플링 방식에 비해 더 자주 샘플링하지 않음을 의미한다.



[그림 5] 관리 길이  $L$ 에 따른  $ARL_\delta$ 와  $ATS_\delta$ 의 단조특성  
( $n_0 = 1, k_0 = 3, h_{min} = 0.1, \delta = 1$ ) ( $k = 3.1, 4.0$ )



[그림 6] 관리한계  $k$ 에 대한 최적  $ATS_\delta$ 의 둔감성 ( $n_0 = 1, k_0 = 3, h_{min} = 0.1$ )

<표 2> 다양한  $k$  및  $\delta$ 에 대한 최적  $ATS_\delta$  ( $n_0 = 1, k_0 = 3.0, h_{min} = 0.1$ )

		$k = 3.1$							$k = 3.2$						
$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	
0.25	107	0.0451	0.1	25.0531	51.1591	38.4761	1.0173	0.25	100	0.0410	0.1	27.5301	54.4304	39.9736	1.032
0.5	43	0.1376	0.1	8.2986	21.4384	13.5802	1.0054	0.5	39	0.1353	0.1	8.4400	22.6535	13.9339	1.0094
0.75	23	0.2768	0.1	4.2157	12.2175	6.8522	1.0024	0.75	21	0.2743	0.1	4.2531	12.8422	6.9857	1.0042
1	15	0.4302	0.1	2.7959	7.9984	4.1157	1.0014	1	13	0.4524	0.1	2.6716	8.3824	4.1808	1.0022
1.5	8	0.7737	0.1	1.7002	4.2359	2.0011	1.0005	1.5	7	0.8070	0.1	1.6467	4.4069	2.0272	1.0008
2	6	0.9866	0.1	1.4274	2.6375	1.2486	1.0003	2	5	1.0696	0.1	1.3550	2.7142	1.2578	1.0005
2.5	4	1.3532	0.1	1.1893	1.7437	0.9046	1.0001	2.5	4	1.2737	0.1	1.2258	1.8326	0.9099	1.0003
3	3	1.6633	0.1	1.0932	1.2254	0.7286	1.0001	3	3	1.5739	0.1	1.1148	1.2864	0.7289	1.0001
3.5	3	1.6633	0.1	1.0932	0.9354	0.6232	1.0001	3.5	3	1.5739	0.1	1.1148	0.9867	0.6295	1.0001
4	2	2.1710	0.1	1.0253	0.7038	0.5666	1	4	2	2.0705	0.1	1.0334	0.7329	0.5663	1
5	2	2.1710	0.1	1.0253	0.5384	0.5153	1	5	2	2.0705	0.1	1.0334	0.5471	0.5174	1
		$k = 3.5$							$k = 4.0$						
$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	
0.25	98	0.0342	0.1	33.0085	65.9990	44.8750	1.0618	0.25	105	0.0286	0.1	39.4450	87.8284	52.2158	1.0847
0.5	38	0.1209	0.1	9.4304	26.6626	15.0211	1.0176	0.5	38	0.1149	0.1	9.9157	33.9126	16.5784	1.0217
0.75	20	0.2581	0.1	4.5076	14.8577	7.3883	1.0075	0.75	19	0.2628	0.1	4.4297	18.1812	7.9557	1.0086
1	12	0.4455	0.1	2.7086	9.5625	4.3755	1.0037	1	12	0.4312	0.1	2.7899	11.4262	4.6443	1.0045
1.5	7	0.7466	0.1	1.7478	4.9906	2.0964	1.0016	1.5	6	0.8342	0.1	1.6064	5.6637	2.1990	1.0015
2	5	0.9984	0.1	1.4163	3.0865	1.2971	1.0009	2	4	1.1693	0.1	1.2846	3.4383	1.3571	1.0007
2.5	4	1.1950	0.1	1.2689	2.0964	0.9375	1.0006	2.5	3	1.4566	0.1	1.1501	2.3178	0.9777	1.0004
3	3	1.4854	0.1	1.1406	1.4728	0.7451	1.0003	3	3	1.4566	0.1	1.1501	1.7958	0.7776	1.0004
3.5	2	1.9703	0.1	1.0436	1.0516	0.6437	1.0001	3.5	2	1.9376	0.1	1.0475	1.2494	0.6613	1.0001
4	2	1.9703	0.1	1.0436	0.8303	0.5743	1.0001	4	2	1.9376	0.1	1.0475	1.0204	0.5931	1.0001
5	2	1.9703	0.1	1.0436	0.5785	0.5220	1.0001	5	2	1.9376	0.1	1.0475	0.6675	0.5314	1.0001

## 5. 비교실험

### 5.1 CUSUM 관리도와와의 비교

다양한  $\delta$ 값에 대하여 계산한 VSI S-CUSUM 관리도 ( $k = 3.1$ )의 최적  $ATS_\delta$ 를 Reynolds 등[7]의

Table 2에 나타난 VSI-CUSUM 관리도의  $ATS_\delta$ 와 비교한 결과를 <표 3>에 정리하였다. 단, CUSUM 열에서 FSI는 고정 샘플링간격(Fixed Sampling Interval), VSI는 가변 샘플링 간격(Variable Sampling Interval), 참조값은 감지하고자 하는 공정평균 목표값으로부터의 이탈도 등을 나타



낸다. 모든 경우에 있어서 VSI S-CUSUM 관리도의  $ATS_\delta$  값이 현저히 감소한 것을 알 수 있다.

실제 공정에서는 공정평균의 변화량  $\delta$ 를 정확히 알 수 없으므로, 하나의  $\delta$  값에 대응하는 최적 설계가 다른  $\delta$  값에 대해서는 좋지 않은 결과를 가져올 수 있다. 앞의 실험결과를 참고하여  $\delta < 1$ 인 경우에는 관리 길이를 길게 잡아  $L=50$ 으로,  $\delta \geq 1$ 인 경우에는  $L=10$ 으로 정하여 비교한 결과, 역시 우수한 성능을 보였다. 단, 공정한 비교를 위하여 Reynolds 등[7]이 사용한 보정된(adjusted)  $ARL_\delta$ 와  $ATS_\delta$ 를 다음과 같이 계산하여 사용하였다.

$$AARL_\delta = \pi^T[(I - Q_\delta)^{-1} - 1/2]1_M \quad (32)$$

$$AATS_\delta = \pi^T[(I - Q_\delta)^{-1} - 1/2]h_M \quad (33)$$

## 5.2 EWMA 관리도와의 비교

표준 슈하트 관리도의  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.09$ 인 경우, VSI S-CUSUM 관리도의  $k = 3.2$ 로 설정하였을 때, Lucas와 Saccucci[4]가 제안한 EWMA 관리도의 최적  $ARL_\delta$ 와 비교한 결과는 <표 4>와 같다. 앞에서와 같이  $\delta < 1$ 인 경우에는  $L = 50$ 으로,  $\delta \geq 1$ 인 경우에는  $L = 10$ 으로 정하였다. 표에서 EWMA 관리도의  $ARL_\delta$ 는 Lucas와 Saccucci[4]의 Table 3에서 각  $\delta$ 에 대한 최소값을 정리한 것이다. 모든 경우에 있어서 VSI S-CUSUM 관리도의

$ATS_\delta$ 가 감소한 것을 알 수 있다. EWMA 관리도에서는  $\delta$  값에 따라 최적 가중치  $\lambda$ 를 각각 구해야 하므로 실질적인 적용이 어려운 반면, VSI S-CUSUM 관리도는 단 두 가지 기준만을 적용하고도 우수한 효율을 나타내었다.

다음으로 Reynolds와 Arnold[8]가 제안한 VSSVSI EWMA 관리도의 ATS와 비교하였다. 그들의 Table 5와 Table 6에는  $k_0 = 3.0$ 일 때 각각  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ 에서 최적인 네 가지 형태의  $AATS_R \equiv AATS_\delta / E[h]$  값이 나와 있다. <표 2>로부터  $k = 3.1$ 일 때  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ 에서 최적인 관리 길이는 각각 43과 15이므로, 이를 사용하여 비교한 결과가 <표 5>와 같다. 전체적으로 큰 차이를 보이지는 않으나, 목표점  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ (굵은 글씨)에서는 VSI S-CUSUM 관리도의 ATS가 더 작은 것으로 나타났다. VSI S-CUSUM 관리도는  $L = 43$ 인 경우에는  $\delta \leq 0.75$ 에서 다소 우수하며,  $L = 15$ 인 경우에는  $0.75 \leq \delta \leq 1.5$ 에서 다소 우수하게 나타났다. <표 5>에서 나타난 바와 같이 VSI S-CUSUM 관리도의 ATS 성능이 VSSVSI EWMA 관리도보다 항상 우수하다고 볼 수는 없다. 그러나 VSSVSI EWMA 관리도는 운영이나 해석이 복잡하여 현장에서 쉽게 적용할 수 없는 반면, VSI S-CUSUM 관리도는 고정된 표본크기를 사용하므로 보다 적용하기 쉽다는 장점이 있다.

<표 3> CUSUM 및 VSI CUSUM 관리도와의  $AATS_\delta$  비교

$\delta$	VSI S-CUSUM					CUSUM(참조값=0.25)			CUSUM(참조값=1.0)		
	$L$	$k$	$w$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	FSI	VSI	감소율	FSI	VSI	감소율
0				370.3984	370.3984	370.4	370.4		370.4	370.4	
0.25	107	3.1	0.1155	51.1591	38.4761	76.3	62.8	38.7%	195.2	187.9	79.5%
0.5	43	3.1	0.1155	21.4384	13.5802	25.1	16.4	17.2%	68.0	57.5	76.4%
1	15	3.1	0.6341	7.9984	4.1157	9.4	5.2	20.9%	12.8	7.5	45.1%
1.5	8	3.1	0.6341	4.2359	2.0011	5.6	2.9	31.0%	4.8	2.4	16.6%
2	6	3.1	0.6341	2.6375	1.2486	4.0	2.0	37.6%	2.7	1.4	10.8%
3	3	3.1	0.6341	1.2254	0.7286	2.5	1.3	44.0%	1.3	1.0	27.1%
4	2	3.1	0.6341	0.7038	0.5666	1.8	1.1	48.5%	0.8	0.9	37.0%

$\delta$	VSI S-CUSUM					CUSUM(참조값=0.25)			CUSUM(참조값=1.0)		
	$L$	$k$	$w$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	FSI	VSI	감소율	FSI	VSI	감소율
0				370.3984	370.3984	370.4	370.4		370.4	370.4	
0.25	50	3.1	0.1155	63.8800	49.8563	76.3	62.8	20.6%	195.2	187.9	73.5%
0.5	50	3.1	0.1155	21.4893	13.7061	25.1	16.4	16.4%	68.0	57.5	76.2%
1	10	3.1	0.6341	8.3146	4.3753	9.4	5.2	15.9%	12.8	7.5	41.7%
1.5	10	3.1	0.6341	4.3087	2.0365	5.6	2.9	29.8%	4.8	2.4	15.1%
2	10	3.1	0.6341	2.9278	1.3979	4.0	2.0	30.1%	2.7	1.4	0.2%
3	10	3.1	0.6341	1.8062	0.9628	2.5	1.3	25.9%	1.3	1.0	3.7%
4	10	3.1	0.6341	1.3225	0.7905	1.8	1.1	28.1%	0.8	0.9	12.2%

<표 4> EWMA 관리도와의  $ATS_\delta$  비교 ( $k_0 = 3.09$ ,  $AATS_0 \approx 500$ )

$\delta$	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	$\lambda$	$ARL_{EWMA}$	감소율
0.25	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	75.0628	57.9814	0.03	74.1	21.8%
0.5	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	23.0746	14.2163	0.05	28.6	50.3%
0.75	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	14.2431	8.2539	0.1	15.5	46.7%
1	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	8.8740	4.5500	0.1	10.1	55.0%
1.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	4.5203	2.0606	0.25	5.37	61.6%
2	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	3.0438	1.4010	0.4	3.47	59.6%
2.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	2.3029	1.1155	0.5	2.47	54.8%
3	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.8569	0.9587	0.75	1.87	48.7%
3.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.5589	0.8578	0.75	1.46	41.2%
4	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.3474	0.7857	1	1.22	35.6%
5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.0955	0.6911	1	1.03	32.9%

<표 5> VSSVSI EWMA와의  $AATS_\delta$  비교 ( $\delta = 0.5$ ,  $\delta = 1.0$ )

$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AATS_\delta$	$E[h]$	$AATS_R$	VSEW1	VSEW2	VSEW3	VSEW4
0	43	0.1378	0.1	8.2899	370.40	1.0054	368.41	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	43	0.1378	0.1	8.2899	55.77	1.0054	55.47	57.70	58.82	58.66	58.99
0.5	43	0.1378	0.1	8.2899	13.58	1.0054	13.51	14.65	15.12	14.75	15.16
0.75	43	0.1378	0.1	8.2899	7.72	1.0054	7.68	7.86	7.99	7.89	7.99
1	43	0.1378	0.1	8.2899	5.63	1.0054	5.60	5.42	5.34	5.42	5.31
1.5	43	0.1378	0.1	8.2899	3.89	1.0054	3.87	3.34	3.11	3.30	3.09
2	43	0.1378	0.1	8.2899	3.10	1.0054	3.08	2.40	2.17	2.36	2.17
3	43	0.1378	0.1	8.2899	2.32	1.0054	2.31	1.53	1.38	1.51	1.41
4	43	0.1378	0.1	8.2899	1.91	1.0054	1.90	1.14	1.04	1.17	1.13
5	43	0.1378	0.1	8.2899	1.65	1.0054	1.64	0.94	0.87	1.04	1.02
$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AATS_\delta$	$E[h]$	$AATS_R$	VSEW1	VSEW2	VSEW3	VSEW4
0	15	0.4305	0.1	2.7939	370.40	1.0014	369.90	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	15	0.4305	0.1	2.7939	132.05	1.0014	131.87	109.45	112.30	111.36	111.77
0.5	15	0.4305	0.1	2.7939	22.44	1.0014	22.41	22.54	22.26	22.78	22.03
0.75	15	0.4305	0.1	2.7939	7.39	1.0014	7.38	7.78	7.91	7.81	7.89
1	15	0.4305	0.1	2.7939	4.12	1.0014	4.11	4.33	4.55	4.36	4.58
1.5	15	0.4305	0.1	2.7939	2.27	1.0014	2.27	2.39	2.45	2.44	2.50
2	15	0.4305	0.1	2.7939	1.66	1.0014	1.66	1.68	1.65	1.73	1.73
3	15	0.4305	0.1	2.7939	1.18	1.0014	1.18	1.08	1.05	1.18	1.17
4	15	0.4305	0.1	2.7939	0.97	1.0014	0.97	0.87	0.85	1.02	1.01
5	15	0.4305	0.1	2.7939	0.84	1.0014	0.84	0.79	0.77	0.96	0.95

## 6. 요약 및 결론

본 논문에서는 CUSUM 관리도와 적응형 관리도의 특성을 결합하여 VSI S-CUSUM 관리도를 제안하고, 마코프연쇄 모델을 적용하여 유용한 통계적 특성을 도출하였다. 이를 바탕으로 ATS 계산 알고리즘 및 통계적 최적설계 절차를 제시하였다. [정리 5]에서  $ATS_\delta$ 가 짧은 샘플링 간격  $h_1$ 의 선형함수임을 규명하여 최적해를 쉽게 구할 수 있었다. 일반적으로 마코프연쇄 모델은 상태의 개수가 많아지면 계산이 어려워지지만, 본 연구에서는 주요 통계 특성을 수식 형태로 도출하였다. 따라서 제안된 알고리즘은 관리 길이  $L$ 이 큰 경우에도 통계적 특성을 계산할 수 있는 장점이 있다. 비교분석 결과,

VSI S-CUSUM 관리도는 기존의 CUSUM 관리도나 EWMA 관리도에 비해 우수한 ATS 성능을 나타냈다. 또한 현존하는 가장 복잡한 관리도 중의 하나인 VSSVSI EWMA 관리도에 비견할만한 ATS 성능을 보였다. 현장에서 VSI S-CUSUM 관리도는 다음과 같이 간편하게 적용하는 방법을 제안한다. 관리한계  $k \approx k_0 + 0.1$ 로 정하고, 평균의 이동이 작을 ( $\delta < 1$ ) 공정에 대해서는 관리 길이  $L = 50$ , 평균의 이동이 큰 ( $\delta \geq 1$ ) 공정에 대해서는  $L = 10$ 으로 정하면 현장에서 쉽게 사용할 수 있을 것이다.

추후연구로는 다음과 같은 방향을 고려해 볼 수 있다.

- ① 비정규분포에 대한 적용

- ② 모표준편차  $\sigma$ 를 모르는 경우의 민감도 분석
- ③ 단측(one-sided) 공정평균 이동에 대한 적용

#### 참고문헌

- [1] Brook, D. and D.A. Evans, "An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length," *Biometrika*, Vol.59(1972), pp.639-549.
- [2] Costa, A.F.B., " $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size and Sampling Interval." *Journal of Quality Technology*, Vol.29(1997), pp.197-204.
- [3] Lim, T.J., "A Selectively Cumulative Sum (S-CUSUM) Control Chart," *J. Korean Society for Quality Management*, Vol.33, No.3(2005), pp.126-134.
- [4] Lucas, J.M. and M.S. Saccucci, "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements." *Technometrics*, Vol.32(1990), pp.1-12.
- [5] Page, E.S., "Continuous Inspection Schemes," *Biometrika*, Vol.41(1954), pp.100-114.
- [6] Prabhu, S.S., D.C. Montgomery, and G.C. Runger, "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme." *Journal of Quality Technology*, Vol.26(1994), pp.164-176.
- [7] Reynolds, M.R., R.W. Amin, and J.C. Arnold, "CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals," *Technometrics*, Vol.32(1990), pp.371-384.
- [8] Reynolds, M.R. and J.C. Arnold, "EWMA Control Charts with Variable Sample Sizes And Sampling Intervals," *IIE Transactions*, Vol.33(2001), pp.511-530.