2단계 공급사슬의 협력적 가격 및 재고 정책
Cooperative Pricing and Ordering Policies in a Single-Manufacturer-Single-Retailer Supply Chain

김정규, 홍유신, 박준혁, 고상진
Division of Mechanical and Industrial Engineering
POSTECH
(m819, yhong, sacarlee, sangjink)@postech.ac.kr

Abstract

We investigate pricing and ordering policies in a supply chain consisting of a single manufacturer and a single retailer. Demand at the retailer depends on the retail price and is assumed to be constant over time for the fixed price. The retailer places orders according to an EOQ policy and the manufacturer produces the order quantity according to a lot-for-lot policy. The retailer and the manufacturer cooperates each other to maximize the average profit for the supply chain. A mathematical model is presented and a solution procedure is developed to determine the optimal retail price and order quantity.

1. Introduction

과거 수년 동안 공급 사슬 관리를 위한 방법으로써 전통적인 EOQ모형을 기반으로 하는 다양한 연구들이 수행되어 왔다. 이러한 연구들 사이에서 우리의 관심은 재고와 가격결정 사이의 상호작용을 연구하는 가격-재고(Price-inventory) 모형에 놓여있다. 전통적 EOQ모형은 수요를 고정된 요소로써 고려하며 가격에 독립적이라고 가정한다. 그러나 실제 오늘날의 경쟁적 기업환경하에서 수요는 가격에 매우 민감하게 반응하며 많은 기업들은 이러한 변동성을 고려하여 시장 점유율을 높이고 수익을 확대 하기 위해 노력하고 있다. 따라서 경제적 재고 관리를 위해서는 가격과 수요에 대한 문제를 복합적으로 고려 하는 것이 필요하다. 이러한 관점으로부터 이 논문은 단일 재조업체와 소매점으로 구성된 2단계 공급사슬에서 재고와 가격결정을 통합적으로 고려하여 최적화하는 방법을 모색하는데 목적이 있다.

가격-재고 모형을 다루는 많은 논문들이 있다. Kunreuther와 Richard(1971)는 선형 가격-수요 함수에 대해 EOQ 모형을 기반으로 Price-inventory 모형을 소개했다. Arcelus와 Srinivasan(1985)은 가격 탄력성이 고정된 수요 함수(constant price-elasticity demand function)에 대하여 ROI(Return on investment)의 관점에서 모형을 수립했다. Abad(1988a,1988b)는 선형, 고정 탄력 수요에 대해 최적 가격과 주문량을 결정하기 위한 방법론을 제시했고, 이를 Quantity discount case로 확장했다. Burwell et al.(1991)은 이를 다시 Shortage를 허용하는 모형으로 확장했다. Rosenberg(1991)는 수요 함수가 L-concave라는 가정하에 ETF(Economic theory of the firm), Profit, ROII(Return on investment)를 위한 각각의 모형을 제시하고 그 특성을 비교하였다. Lee(1993)는 고정 탄력 수요 함수에 대해 GP를 이용한 접근법을 사용하여 최적 가격과 주문량을 제시하였다. Burwell et al.(1997)은 Freight discount를 고려한 논문을 발표하였다. 이상의 소개된 논문들은 단지 단일 소매점 측면의 Price-inventory 모형에 대하여 연구되었다.

최근 SCM에 대한 관심이 증가하면서, 공급사슬에 포함된 기업들간의 협력과 통합에 대한 문제가 연구 되고 있다. Abad (1994)는 공급자, 구매자 사이에 수직적 통합을 이루었을 때, 공급자와 구매자가 같은 재고 수행 비를 가질 경우 lot-for-lot 정책이 최적임을 보였다. 또한 그는 양측이 고정 위협이 존재하는 협력관계를 유지할 경우에 대하여서도 게임이론을 이용하여 이를 모형화 하고 이에 대하여 Pareto efficient solution 과 Nash bargaining solution을 제시하였다. Parla와 Wang(1994)은 고정 마진 가격 정책을 사용할 때, 단일 공급자-구매자로 구성된 공급사슬과 관련된 모형을 개발하였다. Weng(1995)은 협력관계에 놓여있는 공급자-구매자의 2채널 공급사슬에 대해 포괄적으로 논의 하고 이의 관리를 위한 접근방안을 제시하였다. 그러나 그는 이 논문에서 최적해를 도출하기 위한

명확한 방법론을 제시하지는 않았다. 이러한 논문들은 모두 공급자가 제한 없는 (infinite) 생산률을 가진다고 가정하기 때문에 사실상 중간단계의 도매업자에 적합할 뿐, 그들의 접근방식은 공급자가 제조업체로써 한정적 생산율을 가지는 상황에는 적합하지 않다고 할 수 있다. 이와 관련하여, Reyniers (2001)는 수직적 통합 관계의 제조업체와 소매점 사이에서 제조업체의 생산률이 수요와 같다는 제한적 가정하에 최적해를 구하기 위한 방법을 제시했다. 또한 최근 Chen과 Chen(2006)은 제조업체가 한정적(finite) 생산률을 가지고 동시에 생산된 제품이 시간이 흐름에 따라 감소(deteriorate) 된다는 것을 가정하며 다중 생산품, 다단계 공급체인에 대하여 논의 하였다. 그러나 이 연구에서 그들은 목적 함수에 대해 Hessian matrix condition이 만족될 때 최적해를 구할 수 있다고 언급했지만, 사실 그들의 증명은 선형 수요 함수에서 조차 완전 하지 못하다.

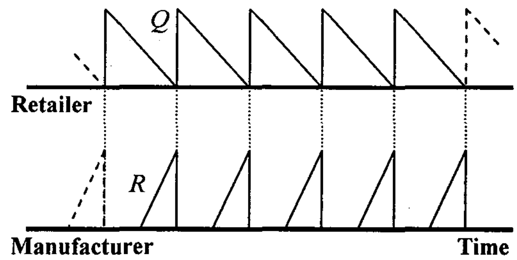
이 논문은 가격에 대해 선형 감소하는 수요함수를 가정하고 단일 제조업체와 소매점으로 구성된 2단계 공급 사슬에 대하여 최적 가격과 최적 주문량을 결정하기 위한 수리적 모형과 방법론을 제시한다. 이 논문의 남은 부분은 2절에서는 필요한 가정과 모형을 제시하고, 3절에서 이에 관한 간단한 수치 예제를 보인 후 4절에서 결론을 맺는 것으로 구성되어 있다.

2. Model

단일 제조업체와 단일 소매점으로 구성된 공급 사슬을 고려하자. 소매점은 제조업체에게 전통적 EOQ 정책에 따라 주문하고 제조업체는 lot-for-lot 정책에 따라 주문된 량을 생산하고 배송한다. 수리적 모형의 개발을 위해 다음의 기호가 정의된다.

R	: 제조업체의 연간 생산률
c	: 제조업체의 단위 생산비
S	: 제조업체의 셋업비
A	: 소매점의 주문비
h_m	: 제조업체의 연간 단위당 재고비
h_r	: 소매점의 연간 단위당 재고비

소매점에서 관측되는 최종 고객 수요는 결정적이고 가격(p)에 선형 감소하는 함수로 가정되며, $D(p)=a-bp$, $a,b>0$에 의해 정의 된다. 또한 $R \geq D(0)$ 로 가정하며 이것은 제조업체의 생산률이 소매점의 수요를 충분히 공급할 수 있을 정도로 크다는 것을 의미한다. [그림 1]은 공급사슬을 구성하는 제조업체와 소매점의 재고 궤적을 보여준다.



[그림 1] **Inventory trajectories for the SC**

우리의 목적은 공급사슬에서의 결합 이익을 최대화 하는 최적 가격과 소매점의 최적 주문량을 결정하는 것이다. 구매자의 주문량이 Q 라 하자, 그때 공급사슬의 평균 결합 이익 함수(average joint profit function)는 다음에 의해 표현 된다.

$$\Pi(p,Q)=$$
$$(p-c)D(p)-\frac{(S+A)D(p)}{Q}-\frac{Q}{2}\left(h_r+h_m\frac{D(p)}{R}\right) \quad (1)$$

(1)을 최대화 하는 최적 가격과 주문량을 동시에 결정 하기란 쉽지 않다. 그러므로 우리는 연속적 결정방법(Sequential procedure)을 사용 하여 이를 구한다. 먼저 Q가 주어졌다고 가정한다. 이에 대하여 식(1)의 1, 2차 도함수는 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dp}\Pi(p,Q|Q)$$
$$=D(p)+\left(p-c-\frac{S+A}{Q}-\frac{h_m Q}{2R}\right)\frac{dD(p)}{dp} \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\Pi(p,Q|Q)$$
$$=2\frac{dD(p)}{dp}+\left(p-c-\frac{S+A}{Q}-\frac{h_m Q}{2R}\right)\frac{d^2D(p)}{dp^2} \quad (3)$$
$$=-2b<0$$

여기서, $d^2\Pi(p,Q|Q)/dp^2<0$ 이기 때문에 $\Pi(p,Q|Q)$는 p 안에서 오목(concave)인 함수이다. 그리고 Q가 주어 졌을 때 최적 가격은 $d\Pi(p,Q|Q)/dp=0$ 의 해를 구함으로써 구할 수 있다. 이 해는 다음과 같다.

$$p^*(Q)=\frac{1}{2}\left\{\frac{h_m Q}{2R}+\left(\frac{a}{b}+c\right)+\frac{(S+A)}{Q}\right\} \tag{4}$$

여기서 $p^*(Q)$ 가 다음의 두 조건, $p^*(Q)\geq c$, $D\{p^*(Q)\}\geq 0$ 을 만족해야 함은 분명한 사실이다. 이때 우리는 양의 값을 가지는 모든 Q 에 대해 $p^*(Q)\geq c$ 가 만족함을 쉽게 알 수 있다. 또한 식(4)의 $p^*(Q)$ 를 두 번째 조건인 $D\{p^*(Q)\}=a-bp^*(Q)\geq 0$ 에 대입하여 계산 하면 다음의 부등식이 얻어진다.

$$f(Q)\equiv\frac{h_m}{2R}Q^2-\left(\frac{a}{b}-c\right)Q+(S+A)\leq 0 \tag{5}$$

여기서, M 이 $f(Q)$ 의 판별식 이라고 할 때, $M=(a/b-c)^2-4(h_m/2R)(S+A)$ 로 표현 되며, $f(Q)=0$ 은 $M\geq 0$ 이 만족될 때 두 개의 양의 해를 가진다. 이 두 해를 각각 Q_L 과 Q_U ($0<Q_L\leq Q_U$)로 정의하자. 이때 최적 주문량은 부등식(5)를 만족하기 위해 $Q_L\leq Q^*\leq Q_U$ 사이에 존재 하여야 한다. 반대로 만약 $M<0$ 이라면, 부등식(5)를 만족하는 최적 주문량은 존재할 수 없고 제시된 문제는 최적해가 존재하지 않는다.

식 (4)의 $p^*(Q)$ 를 식(1)에 대입함으로써, 평균 결합 이익 함수는 식(6)에서 보여지는 것처럼 Q 의 함수로써 표현 될 수 있다. 이 함수를 $\Pi_1(Q)$ 이라 하자.

$$\Pi_1(Q)\equiv \tag{6}$$

$$\Pi\left(p^*(Q),Q\right)=\frac{b}{4}\left\{\frac{h_m Q}{2R}-\left(\frac{a}{b}-c\right)+\frac{(S+A)}{Q}\right\}^2-\frac{h_r Q}{2}$$

이 식(6)을 Q 에 대해 미분 함으로써 우리는 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dQ}\Pi_1(Q)\\&=\frac{b}{2}\left\{\frac{h_m Q}{2R}-\left(\frac{a}{b}-c\right)+\frac{(S+A)}{Q}\right\}\left\{\frac{h_m}{2R}-\frac{(S+A)}{Q^2}\right\}-\frac{h_r}{2}\\&=\frac{1}{2Q^3}\left[\frac{h_m^2 b}{4R^2}Q^4-\left\{h_r+h_m\frac{(a-bc)}{2R}\right\}Q^3\right.\\&\qquad\left.+(a-bc)(S+A)Q-b(S+A)^2\right]\end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)에서 계수의 부호 변화가 3번이기 때문에 데카르트(Descartes)의 부호법칙에 따라 $d\Pi_1(Q)/dQ=0$ 은 하나 또는 3개의 양의 근을 가진다. 또한 $\lim_{Q\to\infty}\Pi_1(Q)=\infty$, $\lim_{Q\to\infty}d\Pi_1(Q)/dQ=\infty$, $\Pi_1(Q_U)=-h_rQ_U/2<0$, $d\Pi_1(Q_U)/dQ=-h_r/2<0$ 이기 때문에, $d\Pi_1(Q_0)/dQ=0$ 을 만족하는 양의 근, $Q_0(>Q_U)$ 가 적어도 하나는 반드시 존재한다. 비슷하게, $\lim_{Q\to 0^+}\Pi_1(Q)=\infty$, $\lim_{Q\to 0+}d\Pi_1(Q)/dQ=-\infty$, $\Pi_1(Q_L)=-h_rQ_L/2<0$, $d\Pi_1(Q_L)/dQ=-h_r/2<0$ 이기 때문에 $Q_L\leq Q\leq Q_U$ 를 만족하는 범위 내에서 $d\Pi_1(Q)/dQ=0$ 은 2개의 해를 갖거나 해를 갖지 않는 다는 것을 알 수 있다. 여기서 $d\Pi_1(Q)/dQ=0$ 이 $Q_L\leq Q_1<Q_2\leq Q_U$ 를 만족하는 두 개의 양의 해, Q_1 과 Q_2 를 가질 때 $\Pi_1(Q)$ 을 최대화 시키는 최적해는 $Q^*=Q_2$ 가 된다. 이때, $\Pi_1(Q^*)$ 가 양의 값을 가진다면 이 시스템은 순익을 발생시킬 수 있고, 그 최대값은 Q^* 와 식(4)의 $p^*(Q^*)$ 에 의해 결정된다. 그러나 만일 $\Pi_1(Q_2)$ 가 음의 값을 가진다면, 이 시스템은 최적해를 갖지만 손실만을 발생 시키게 되므로 사업성이 없다고 볼 수 있다. 또한 한편으로 $Q_L\leq Q\leq Q_U$ 의 범위 내에 $d\Pi_1(Q)/dQ=0$ 을 만족 시키는 어떤 해도 존재하지 않는다면, $Q^*=Q_L$ 이 $\Pi_1(Q)$ 을 최대화 시키는 최적 주문량이 된다. 그러나 이 최적해에 대하여 $\Pi_1(Q^*)=-h_rQ_L/2<0$ 이기 때문에 역시 이 해로부터도 양의 이익은 성취되지 않으며, 따라서 공급사슬을 운용해선 안 된다.

3. Numerical Examples

이 수치예제는 셋업비와 주문비의 변동에 따른 결과의 변화를 관찰하기 위하여 수행 되었다. 실험이 진행되는 동안 $S+A$ 를 제외한 다른 모수들은 $R=3000\ units/year$, $c=\$50$, $h_m=\$5$, $h_r=\$8$, $a=2000$, $b=30$ 으로 고정 되었으며, 실험은 $S+A$ 의 세 값에 대하여 수행 되었다. 먼저 $S+A$ 가 \$500 의 값을 가질 때 최적 주문량과 평균 결합 이익은 $Q^*=154.77$, $\Pi(p^*,Q^*)=\$709.01$ 로 양의 순익을 가지는 것을 관찰 할 수 있다. 이로부터 $S+A$ 의 값이 증가할 경우 직관적으로도 알 수 있듯이 평균 결합 이익은 감소 하게 되는데, $S+A$ 가 \$1500 의 값을 가질 경우 최적 주문량은 $Q^*=Q_2=234.35$ 로

결정되고 평균 결합 이익은 $\Pi(p^*, Q^*) = -\$176.76$ 로 음의 값을 가지게 된다. 또한 $S + A = \$2500$ 일 때, 최적 주문량은 $Q^* = Q_L = 151.14$ 에 의해 결정 되며 역시 평균 결합 이익은 $\Pi(p^*, Q^*) = -\$604.59$ 로 음의 값을 가지게 된다. 이 수치 예제로부터 우리는 2절에서 설명한 최적해의 결정으로부터 관찰 될 수 있는 세 가지의 경우에 대해 확인할 수 있으며, 또한 셋업비와 주문비의 합이 어떤 경계치(이 예제에서 경계 치는 $S + A = \$1243$)를 넘어설 때 이 공급 사슬을 운용하는 것이 경제적이지 못하다는 것을 알 수가 있다.

4. Summary and Conclusions

이 논문은 제조업체와 소매점으로 구성된 2채널 공급사슬의 가격-재고 모형에 대해 논의 했다. 수요는 가격에 의해 선형 변화하는 것으로 가정되었으며 소매점은 전통적인 EOQ 모형을 사용하고 제조업체는 lot-for-lot 정책을 사용한다. 최적 가격, 주문량을 제시하기 위한 분석적 해법이 제안 되었다. 추후, 보다 일반적인 모형에 대한 작업이 필요할 것이다. 예를 들어 셋업비용이 상대적으로 높을 때 lot-for-lot 정책 보다는 한번의 생산 배치당 여러 번의 주문을 처리 하는 방식이 보다 유효하다고 볼 수 있다. 또한 선형으로 가정된 수요함수를 고정 탄력 함수(constant elasticity function)로서 가정하는 모형으로의 확장 역시 가능하다 할 수 있다.

References

1. Abad, P.L., 1988a, Joint Price and Lot-Size Determination When Supplier Offers Incremental Quantity Discounts, The Journal of the Operational Research Society 39(6), 603-607.
2. Abad, P.L., 1988b, Determining Optimal Selling Price and Lot size When the Supplier Offers All-Unit Quantity Discounts, Decision Sciences 19, 622-634.
3. Abad, P.L., 1994, Supplier Pricing and Lot Sizing When Demand is Price Sensitive, European Journal of Operational Research 78, 334-354.
4. Arcelus, F.J, and G. Srinivasan, 1985, A ROI-Maximizing EOQ Model under Variable Demand and Markup Rates, Engineering Costs and Production Economics 9, 113-117.
5. Burwell, T.H., D.S. Dave, K.E. Fitzpatrick and M.R. Roy, 1991, An Inventory Model with Planned Shortage and Price Dependent Demand, Decision Sciences 22, 1187-1191.
6. Burwell, T.H., D.S. Dave, K.E. Fitzpatrick and M.R. Roy, 1997, Economic Lot Size Model for Price-Dependent Demand under Quantity and Freight Discounts, International Journal of Production Economics 48, 141-155.
7. Chen, J.M. and T.H. Chen, 2006, The Profit-Maximization Model for a Multi-item Distribution Channel, Transportation Research Part E, In press.
8. Kunreuther, H. and J.F. Richard, 1971, Optimal Pricing and Inventory Decisions for Non-Seasonal Items, Econometrica 39(1), 173-175.
9. Lee, W.J., 1993, Determining Order Quantity and Selling Price by Geometric Programming: Optimal Solution, Bounds, and Sensitivity, Decision Sciences 24, 76-87.
10. Parlar, M. and Q. Wang, 1994, Discounting Decisions in a Supplier-Buyer Relationship with Linear Buyer's Demand, IIE Transactions 26(2), 34-41
11. Reyniers, D.J., 2001, The effect of vertical integration on consumer price in the presence of inventory costs, European Journal of Operational Research 130, 83-89.
12. Rosenberg, D., 1991, Optimal Price-Inventory Decisions: Profit vs. ROII, IIE Transactions 23(1), 17-22.
13. Weng, Z. K., 1995, Channel Coordination and Quantity Discounts, Management Science 41(9), 1509-1522.