단위작업 편성 문제의 Worst Case 분석
Worst Case Analysis of Tree Algorithm for Minimum Batch Cover Problem

장준호, 장수영

포항공과대학교 산업경영공학과(junho@postech.ac.kr, syc@postech.ac.kr)

초록

In this paper, we consider the problem of batch processing of orders, where either a single order or a pair of orders which satisfies specific conditions may be grouped in the same batch. The objective of the problem is to minimize the number of batches formed to accommodate all orders. We prose an approach based on a known algorithm proven to be optimal for special class of problems with tree structure and show the approach to have the worst case ratio of $2-\frac{2}{n}$.

1. 서론

철강, 화학 산업과 같은 소재 산업에서의 생산은 대부분 일정한 수량의 배치(batch)로 이루어진다. 이러한 배치 생산 공정에서는 주어진 다양한 주문들을 비슷한 성질의 주문들로 집약하여 가능한 작은 수의 배치만을 이용하여 모든 주문들을 만족시키는 것이 생산 공정의 효율성을 높이는데 중요한 요인이 된다.

이러한 문제는 일반적으로 무방향 그라프(Undirected Graph) $G=(V,E,w(v))$ 를 이용하여 모형화 될 수 있다(Hwang and Chang., 2005). $G=(V,E,w(v))$ 는 유한개의 노드(node)들의 집합인 V, 엣지(edge)들의 집합인 E, 그리고 각 노드 $v\in V$ 들의 가중치 함수 $w(v)$ 로 이루어진다. 각 노드 $v\in V$ 는 각 주문에 대응하며, $w(v)$ 는 각 주문의 수량을 의미한다. 엣지 $e=(u,v)\in E$ 는 두 개의 개별 주문이 집약되어 하나의 배치로 생산이 가능할 경우 정의한다. 배치는 배치의 구성에 따라 하나의 주문으로만 이루어진 호모지니어스(homogeneous) 배치와 엣지에 의해서 상호 연결된 2개 이상의 주문으로 이루어진 헤테로지니어스(heterogeneous) 배치로 구분할 수 있다.

본 연구에서는 단일 주문으로 구성된 호모지니어스 배치와 서로 다른 2개의 주문으로 이루어진 헤테로지니어스 배치만을 이용하여 모든 주문의 수량을 만족시키면서 배치의 개수를 최소화하는 문제를 다룬다. 이 문제는 다항시간근사해법군(PTAS)까지 불가능한 MAX-SNP-hard 문제로 알려져 있으며, G 가 나무(tree) 구조를 가지는 특수한 경우에 대한 최적 알고리즘이 제안되었다(Chang and Chang, 2006).

본 연구에서는 나무 구조 다항시간최적 알고리즘을 이용한 근사해법 알고리즘들의 최악비율(worst case ratio)이 $2-\frac{2}{n}$ 을 넘지 않음을 보인다.

2. 문제의 정의와 기본성질

노드 v 의 호모지니어스 배치가 구성된 양을 나타내는 변수는 x_v 로 엣지 $e=(u,v)$ 의 헤테로지니어스 배치가 구성된 양은 2차원 벡터 $y_e=(y_e(u),y_e(v))$ 로 각각 정의하자. 여기서 $y_e(u)$ 는 노드 u 에 해당하는 주문량을 $y_e(v)$ 는 노드 v 에 해당하는 주문량을 의미한다. $E(v)$ 는 각 노드 v 의 인접한 엣지들의 집합이다. 노드 v 의 디그리(degree)는 $d(v)$ 로 표현한다. 그러면 우리 문제는 다음과 같은 수리 모형으로 나타낼 수 있다.

Minimum Batch Cover (BC)

$$\textbf{\textit{Min}} \quad \sum_{v\in V}\lceil x_v/\lambda\rceil+\sum_{e\in E}\lceil y_e(u)+y_e(v)/\lambda\rceil$$

$$\textbf{s.t.} \quad x_v+\sum_{e\in E(v)}y_e(v)=w(v),\ \forall v\in V.$$

$$x_v, y_e(v)\ge 0,\ \forall v\in V$$

위 문제는 일반적인 경우 다항시간근사해법군이 존재하지 않으나 그라프가 나무 구조를 갖는 특수한 경우 최적알고리즘이 존재한다.

알고리즘 1. 나무 구조 최적 알고리즘

단계 1. 디그리가 1인 노드 중 가중치가 배치 크기가 λ보다 큰 경우 남은 가중치가 λ보다 작아질 때까지 호모지니어스 배치를 만든다.

단계 2. 디그리가 1인 노드와 이웃 노드를 이용하여 가능한 많은 가중치를 소화(cover)하는 헤테로지니어스 배치를 만든다. 만약 노드의 남은 가중치가 없으면 엣지를 제거한다.

단계 3. 모든 가중치를 소화할 때까지 단계 2를 계속한다.

정리 1. 주어진 그라프 G 가 나무 구조를 가질 때, 알고리즘 1은 다항시간 안에 최적해를 구할 수 있다(Chang and Chang (2006)).。

다음 성질은 일반적인 그라프 G 에서도 최적해가 나무 구조를 가짐을 보여준다.

성질 1. 나무 구조를 가지는 최적해가 반드시 존재한다(Chang and Chang (2006)).。

3. 휴리스틱 기법의 최악비율

성질 1이 성립하기 때문에 우리는 일반적인 그라프 G 에서 나무 구조를 찾은 후 알고리즘 1을 적용시키는 근사해법군을 생각해볼 수 있다.

알고리즘 2. 근사해 알고리즘

단계 1: 스패닝(spanning) 나무를 만든다.

단계 2: 알고리즘 1을 적용한다.

알고리즘 2는 단계 1의 스패닝 나무를 만드는 방법에 따라 다양한 결과가 나올 수 있다. 문제의 경우가 G 라고 주어졌을 때 최적 목적식 값을 OPT(G), 알고리즘 2의 목적식 값을 T(G)라고 하자. 그리고 호모지니어스 배치만을 이용하여 문제를 풀었을 때의 목적식 값을 h(G)라고 하자. OPT(G)와 h(G) 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

성질 2. 노드의 개수를 n이라고 했을 때, OPT(G)와 h(G)의 Gap은 n-1보다 항상 작거나 같다.

증명. 배치의 개수는 서로 다른 2개의 주문이 헤테로지니어스 배치를 구성하면서 최대 1개가 줄어들 수 있다. 헤테로지니어스 배치는 엣지당 최대 1개가 생성될 수 있고 노드 개수가 n개인 나무는 n-1개의 엣지를 가지고 있다. 따라서 호모지니어스 배치만을

이용한 h(G)에서 n-1을 뺀 값보다 OPT(G)는 항상 크거나 같다.。

가설 1. 만약 OPT(G)가 h(G)보다 작다면, 모든 T(G)는 h(G)보다 항상 작다.。

성질 3. OPT(G)와 any T(G)의 Gap은 n-2를 넘지 않는다.

증명 성질 2와 가설1에 의해 성립한다.。

정리 2. 알고리즘 2의 최악비율은 $2-\frac{2}{n}$ 을 넘지 않는다.

증명.

OPT(G)가 노드 개수 n보다 크거나 같을 때 (경우 1)와 OPT(G)가 노드 개수 n보다 작을 때(경우 2)로 나누어 성질 3을 이용하여 증명한다. 그리고 $R=2-\frac{2}{n}$ 을 만족하는 아래의 예가 존재하기 때문에 R은 타이트(tight)한 상한(bound)이다.

예. 노드 개수는 n, 배치 크기는 λ, ε*은* $n*\varepsilon<\lambda$*인 작은 수라고 하자.*

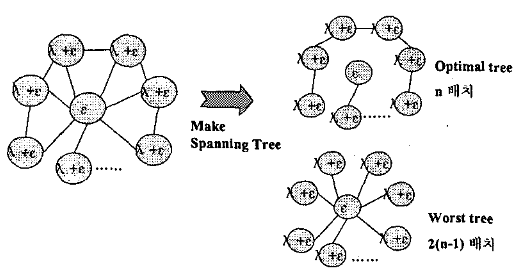

그림 1. 상한이 타이트 함을 보이는 예

4. 결론

본 연구에서는 다항시간근사해법군(PTAS)이 존재한지 않는다고 알려진 단위작업 편성 문제의 근사해법군에 대한 최악분석(worst case analysis)를 수행하여 최악비율이 $2-\frac{2}{n}$ 을 넘지 않음을 보였다. 추후 연구 방향으로는 나무 구조 이외에서 최적 알고리즘을 개발하는 방향과 주문 집약방법의 변화에 따른 문제 복잡도에 대한 연구가 있다.

참고문헌

[1] H.C. Hwang, S.Y. Chang, "Order consolidation for batch processing," *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 9, pp. 121-138, 2005

[2] 장준호, 장수영 "효율적 주문집약을 위한 단위작업 편성", 대한산업공학학회/한국경영과학회 춘계공동학술대회 논문집, 2006.