

수학영재 판별 토론

방 승 진 (아주대학교)

sjbang@ajou.ac.kr

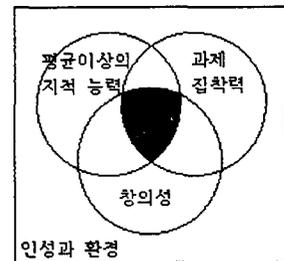
<http://cafe.naver.com/mathclub>

효율적인 수학 영재 교육 프로그램은 수학 영재의 심리적 특성에 적절한 내용과 과정을 선정하고 포함시킨 것으로 시의적절한 것이어야 한다. 수학영재를 판별하는 일은 마련된 수학영재 프로그램에 맞는 수학영재를 선발하는 작업이다,

1. 수학 영재란?

영재교육에 있어서 가장 중요한 것은 영재에 대한 정의이다. 영재에 대한 조작적 정의가 없으면 영재의 선발, 교육과정, 교육방법, 교육평가가 다르게 구성되어 질 수 있기 때문이다.

Terman은 인지조건만으로 영재성을 규정하고, Ward는 학습능력, 사고력, 모방성 및 욕구 등 복합적인 요인을 포함하여 정의하였으며, Gallagher는 지능과 아울러 창의성, 특수재능, 동기 등 심리적 요인을 포함하여 정의하였으며, Renzulli(1978)는 고도의 일반적인 지적 능력, 창의성, 과제집착력이라는 세 가지 요인이 개인의 인성과 주변 환경의 영향을 받아 특정 분야에서 특출한 과업 수행을 해 낼 수 있는 역량과 그 가능성을 영재성이라고 말한다.



<그림 1> 렌줄리의 영재성 구성요인

(1) 수학 영재성 : 고도의 일반적인 지적 능력, 창의성, 과제집착력이라는 세 가지 요인이 개인의 인성과 주변 환경의 영향을 받아 특정 분야에서 특출한 과업 수행을 해 낼 수 있는 역량과 그 가능성을 영재성이라고 말한다. 따라서 수학 영재성이란 수학이라는 특수 학문 분야에 국한하여 나타내는 영재성을 말한다.

(2) 수학적 재능과 재능아 : 각 교과나 특정한 분야의 영재성이 이미 탁월한 성취 결과로 나타난 능력을 재능이라고 말하며, 재능아란 자기 나이 또래에서 탁월한 성취를 보이고 있으며 특별한 재능이 있다고 인정된 아동을 말한다.

(3) 수학 영재 : 수학분야에서 이미 탁월한 성취를 나타내 보인 재능아는 물론, 아직 탁월한 성취를 보이지는 않았지만 그러한 성취를 보일 잠재적 가능성(영재성)을 가지고 있는 자까지를 포함하여 말한다.

이런 수학 영재아는 정규 교육 과정이 제공하는 것 이상의 변별적인 교육 프로그램이나 그들에게 적합한 별도의 도움을 필요로 한다. 수학 영재교육의 목적은 수학 영재성(수학에 대한 소질과 적성, 창의성, 과제집착 성향)을 수학적 재능으로 발휘하여 성취할 수 있도록 돕는 것이다.

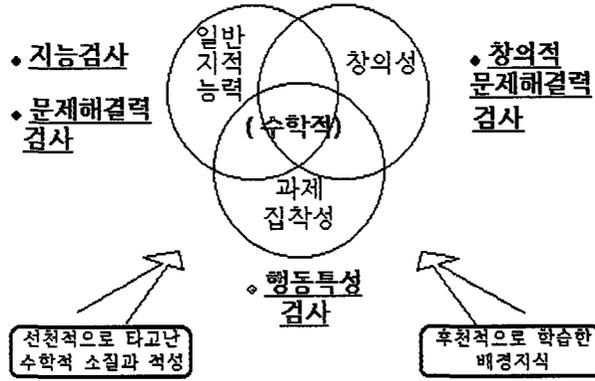
2. 수학영재의 판별

영재의 판별이란 누가 영재이다 아니다를 보장해주는 공개적이고 최종적인 판결이 되어서는 안된다. 수학교육적인 측면에서의 영재 판별은 수학 영재성을 갖고 있는 수학 영재아들의 잠재적인 능력을 계발시켜 재능을 발휘할 수 있도록 하기 위한 수학 영재교육 프로그램에 참가하는 것이 유익한 학생을 선발하는 기능이어야 한다. 이미 수학적인 특별한 재능을 가지고 있다할지라도 그 개인의 참가의지나 욕구, 지적, 정의적, 신체적 행동 수준이 개설하고자 하는 영재교육 프로그램의 목적과 부합하지 않아 해당 프로그램에 참가하는 것이 오히려 유익하지 못하다고 판단된 학생들은 개별사사를 통해 별도로 도와주어야 한다. 따라서 여기서 말하는 영재의 판별은 영재교육 프로그램을 받을 사람과 그렇지 않을 사람을 가려내는 작업에 국한한다.

판별은 영재성에 대한 조작적 정의를 바탕으로 한 검사도구에 근거하되 프로그램의 목적과도 일관성이 있어야 하며 판별에 따른 여러 가지의 논란을 극복할 수 있어야 한다. 특히, 대상자를 선정함에 있어서 고난이도의 지적 문제해결력을 위주로 하기보다는 창의적인 문제해결력(특히, 사고과정의 융통성과 아이디어의 독창성)과 수학적 과제에 대한 정의적인 성향을 모두 고려하는 판별이 되어야 할 것이다.

<표 1> 수학 영재성 판별의 원칙

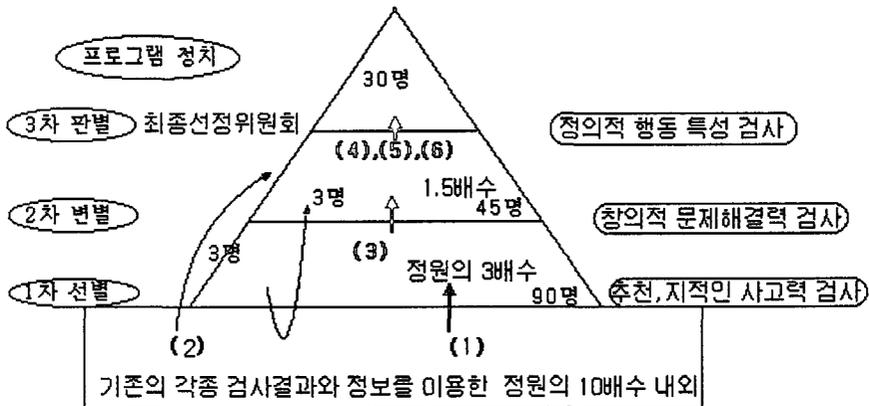
구 분	~에서	~로
판별의 목적	최종적인 판단과 규명	잠재적 영재성의 개발과 적절한 교육 프로그램에의 배치를 위함
판별의 철학	소수의 우수아를 중심으로 한 제외성의 원칙	개인의 특성과 장점을 강조하는 포괄성의 원칙
판별의 기준	단일한 증거와 방법	다양하고 복합적인 증거와 방법
판별 단계	한번의 종합적 총점제	다단계의 절차와 특성별 강조점
판별자	소수의 전문가와 행정 책임자	부모, 학생, 교사 등의 의견까지도 최대한 반영
수집하는 정보의 종류	효과적인 한, 두 가지	가치 있는 다양한 종류
평가의 방법	단답식 또는 선다형의 일회적 지필 검사	장기간에 걸친 수행과정을 직접 관찰할 뿐만 아니라 포트폴리오나 창작물과 같은 평소의 업적물을 참고한 질적인 개별 사례 연구 포함
평가의 내용	습득된 지식의 양이나 사고과정, 기본적 문제해결 능력	습득한 지식을 활용하고 새로운 자료를 조작할 수 있는 능력과 발휘된 창의적이고 구체적인 행동 산출물과 교육 장면에서의 태도와 성격적 특성 포함



<그림 2> 영재성의 각 요인을 측정하는 도구

정원이 30명인 수학 영재교육 프로그램의 경우를 예로 들어 설명하기로 한다. 교육 프로그램의 정원을 기준으로 정한 것은 영재교육에 대한 인식의 전환이 일어나고 행, 재정적인 지원이 늘어남에 따라 교육 프로그램에 참가를 지원하는 학생들의 수가 달라질 수 있기 때문이다. 만약 표본 집단이나 지원자의 일정 비율을 기준으로 하면 그 수가 매년 달라지게 될 것이다. 여기서의 비율이나 배수는 각 교육기관의 형편에 따라 적절히 조절할 수 있다. 예를 들어, (1)의 비율을 정원의 20%로 하든지 (2)의 배수를 정원의 5배로 늘릴 수도 있다.

특히 주목하고자 하는 것은 수학 영재성의 정의에 기초한 다양하고 타당한 판별도구를 사용하되 여러 가지의 판별도구들이 판별의 절차상 어느 곳에서 사용되고 또한 그 결과들이 어떻게 활용되어 질 수 있을 지에 대한 것이다.



<그림 3> 수학 영재교육 대상자 선발 절차

3. 수학생재 판별문항의 개발방향

수학생재 판별문항을 개발하기 위해서는 문제를 해결하는 사고적인 과정에 대한 연구가 필요하다. G. Polya도 언급했듯이 문제해결은 명제적 지식이 아닌 방법적 지식이므로 실제적인 연구가 필요한 분야이다. 외국의 경우는 이에 대한 많은 노력이 있어왔다. 일반적으로 문제풀기는 문제제기(Problem Proposing)와 문제풀이(Problem Solving)의 상호작용에 의해 이루어진다.

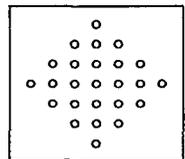
문제풀기는 수영이나 스키, 혹은 피아노 연주와 같이 실제적인 연습을 필요로 하는 기술이다. 왜냐하면 이것은 모방과 연습을 통해서만 얻어지는 것이기 때문이다. 수영을 배우고자 할 때 물 속에 들어가야 하는 것처럼 문제 연구가가 되기 위해서는 문제를 만들고 풀어야 하는 것이다.

우리 나라에서의 문제해결은 문제해결전략의 연구를 뜻할 정도로 이론적인 연구는 되어있지만 문제해결의 본질에 가까운 사례 연구는 전무한 실정이다. 특히 표준화 된 수학생재 검사도구는 한국교육개발원에서 개발한 수학생재판별도구 하나 뿐이며 후속 연구가 시급한 실정이다. 수학생재판별은 상당히 힘든 문제로 수학생재가 무엇인지에 대한 정의부터 문제가 된다. 그전에는 상당히 우수한 아동만을 영재로 생각하였으나 지금은 그 범위가 상당히 광범위하게 확대되어 상위 15%의 학생을 영재교육의 대상으로 생각하고 있다. 수학문제해결력에서 수학적 창의성에 중점을 둔 판별문항의 개발이 시급하며 피라미드식으로 교육을 겸한 수학생재판별이 필요하다.

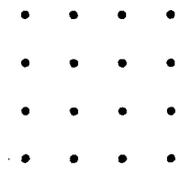
결국 수학생재판별문항은 우리가 어떤 수학적 사고능력을 측정하려고 하는가에 따라 문항의 형태는 틀려질 것이다.

수학적 사고능력은 크게 나누어 창의적 문제해결력 분야로 직관적 통찰능력, 정보의 조직화 능력, 공간상상력, 반성적 사고능력 등과 수학적 창의성 분야로 유창성, 융통성, 독창성 등으로 나눌 수 있다. 창의적 문제해결력 분야는 일반적으로 수학경시대회와 상황이 비슷하므로 자세히 다루지 않고 수학적 창의성 분야만 설명해 보겠다. 수학적 창의성을 측정할 때에는 위의 3가지를 한 문제의 답안을 갖고 하는 것이 보통이다. 다음은 수학적 창의성을 측정하는 문제의 예이다.

1. 이것은 오른쪽 그림에 있는 구슬의 개수를 세는 문제입니다. 구슬은 모두 몇 개입니까? 여러분이 생각할 수 있는 모든 방법을 답안지의 그림에 나타내 보세요. 될 수 있는 한 많은 방법을 나타내는 것이 좋습니다.



2. 다음과 같이 가로, 세로 방향으로 한 칸이 1인 16개의 점이 찍혀있습니다. 이 16개의 점 안에 넓이가 2인 모양을 한 개씩 그려봅시다. 모양의 가짓수는 많을수록 좋습니다. 만약 설명이 필요하다면 옆이나 아래 공간에 쓰세요. (단, 한 점에서만 만나든지 둘로 쪼개어진 도형은 안됩니다.)



4. 개방형 접근 방법

교수-학습 방법에서의 개방형 접근법 또는 탐구형 접근법이라고 일컫는 방법은 학생들로 하여금 수학을 행하고 수학적으로 사고하게 한다. 따라서, 수학 지도를 위해 개방형 접근법을 사용하는 것은 학생들의 수학적 사고력을 개발하고, 수학에 대한 교사와 학생의 신념을 변화시킬 수 있다. 특히, 수학적 잠재력을 가진 학생들에게는 그들의 창의적인 능력을 훈련하고, 다른 학생들과 그들의 통찰을 공유할 기회를 제공한다.

개방형 접근법은 개방형 문제(일반적으로 개방형 문제란 답을 구하는 방법이 유일하지 않거나 정답이 여러 개 있을 수 있는 문제들을 말한다)를 가지고 수업이 진행되며, 주어진 문제를 해결하는 과정과 결과에서 무엇인가 새로운 것을 발견하는 경험을 제공하게 된다. 또한 이 접근법은 이전에 학습했던 학생들 자신의 지식, 기능, 사고 방법을 총합적으로 적용하거나 또는 이를 바탕으로 새로운 아이디어를 창출하게 한다. Becker와 Shimada(1997)는 개방형 접근법을 적용함으로써 학생들은 학생들은 문제 상황을 수학적화할 수 있고, 그것을 다룰 수 있다고 주장한다. 다시 말하면, 학생들은 문제 상황을 분석하는데 있어서 자신들이 배웠던 수학을 동원하고 그 상황을 수학적으로 다루기 위해서 그것을 재해석하며, 그리고 나서 그들이 좋아하는 테크닉을 적용함으로써 자신들이 좋아하는 사고 방식으로 문제의 (중요한) 측면을 밝혀낸다고 주장하면서 개방형 접근법의 장점과 단점을 다음과 같이 지적하고 있다.

장 점	단 점
① 학생들은 수업에 적극적으로 참여하고 자신들의 생각을 더욱 자주 발표한다.	① 유의미한 수학적인 문제 상황을 만들거나 준비하기가 어렵다.
② 학생들은 자신들의 지식과 기능을 광범위하게 사용할 기회를 더 많이 가진다.	② 교사들은 문제를 성공적으로 제시하기가 어렵다. 가끔 학생들은 어떻게 반응해야 하는지를 이해하는데 어려워하거나 수학적으로 유의미하지 않은 답을 제시하기도 한다.
③ 비록 부진아일지라도 문제에 대하여 자신에게 유의미한 방식으로 반응할 수 있다.	③ 몇몇 능력 있는 학생들도 자신들의 답에 대하여 불안해할 수 있다.
④ 학생들은 본질적으로 증명하도록 동기화 된다.	④ 학생들은 정리하는데 어려움이 있기 때문에 자신들의 학습이 만족스럽지 않다고 느낄 수도 있다.
⑤ 학생들은 발견하는 기쁨을 누리게 되고, 동료 학생들의 인정을 받게 된다.	

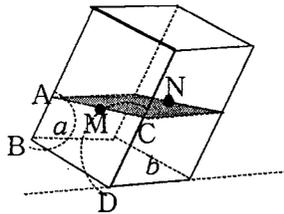
수조(水槽) 문제

직각기둥 모양의 투명한 수조(水槽)에 물이 조금 채워져 있다. 물이 든 수조의 밑면의 한 모서리를 테이블에 고정된 상태에서 수조를 기울이면, 직육면체의 면들과 물의 표면에 의해 다양한 크기의

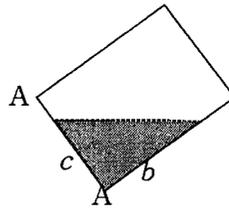
몇 가지 기하학적인 모양이 만들어진다. 그 모양과 크기는 기울기의 정도에 따라 변할 것이다. 이들의 모양과 크기와 관련하여 가능한 많은 불변의 관계(규칙)를 발견하도록 하라. 네가 발견한 것들을 적어라.

다음의 예들은 위 문제에 대한 몇 가지 가능한 답이다.

1. <그림 2.1>에서와 같이, 밑면에서 물의 표면(수면)까지의 수직인 변의 길이를 각각 a, b 라고 하자. 그러면 $a + b$ 는 일정하다.
2. <그림 2.1>에서 선분 AC의 중점 M은 고정점이고, M과 선분 AC의 대변의 중점 N을 연결한 선분은 고정된 선분이다.
3. 수면 아래에 있는 플라스크의 옆면들의 총 넓이는 일정하다.
4. <그림 2.2>에서와 같이, 플라스크가 기울어졌을 때, $b \times c$ 는 일정하다.
5. 수면의 모양은 직사각형이다.



<그림 2.1>



<그림 2.2>

다음은 위 문제에 대한 초등학교 6학년 아동들의 반응을 조사한 표이다.

<표 2.1>

39명 학생들의 개별, 그룹별 발견 요약												
발견 (결과)목록	규칙 번호	학생의 발견(규칙)	그룹 번호							발견한 학생수		
			1	2	3	4	5	6	7		8	9
일정한 합	1	$a + b$ 는 일정하다.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	6
	2	수면 위의 모서리의 길이의 합은 일정하다.			*							1
변화	3	한 모서리는 다른 모서리가 증가하는 양만큼 감소한다.				*	*					4
	4	한 모서리가 증가할 때, 다른 모서리는 감소한다.										2
	5	모서리의 길이는 변한다.				*	*					5
	6	수면의 모서리의 길이는 점점 커진다.			*		*					0
	7	한 모서리가 0이 될 때, 다른 모서리는 그것의 본래 길이의 2배가 된다.										1
범위	8	모서리 길이의 한계는 15cm이다.							*	*	*	9

39명 학생들의 개별, 그룹별 발견 요약				
수면의 모양	9	수면(윗면)과 밑면은 직사각형이다.	*	0
	10	수면은 직사각형 또는 사각형이다.	* * *	3
	11	밑면의 모양은 일정하다.	* * *	4
	12	옆면의 모양은 사다리꼴에서 삼각형으로 바뀐다.	* * *	7
	13	옆에서 본 것은 사다리꼴이다.		1
	14	수면의 모양은 변한다.	*	9
	15	어떤 예에서, 밑면은 점점 작아진다.	* * *	4
넓이	16	옆면의 총 겉넓이는 변하지 않는다.	* * * *	3
	17	수면의 넓이는 변한다.	*	9
	18	수면의 넓이는 점점 커진다.	* * *	5
넓이	19	수면의 넓이를 제외한 넓이는 변하지 않는다.	*	1
넓이	20	총 겉넓이는 변한다.	*	4
	21	플라스크를 기울일 때, 밑면의 넓이는 윗면의 넓이보다 작다.		1
부피	22	부피는 변하지 않는다.	* * * * * * * *	13
	23	물이 자기등을 이룰 때, 부피는 (밑넓이)×(높이)와 같다.		1
기타	24	수평으로 보여질 때, 하나의 고정점이 있다.	* *	1
	25	물의 무게는 변하지 않는다.	* * *	0
	26	각은 변한다.	* * *	6
	27	옆면의 각의 합은 일정하다.	* * *	0
	28	수면은 수평이다.	* * *	
	29	물의 형태는 사각기둥이다.	* * *	1
	30	물의 형태는 직육면체에서 삼각기둥으로 변한다.	* * *	2
	31	물의 형태는 변한다.	* * *	5
32	기타	* * *	4	
각 조에서 관찰한 총 규칙의 수			8 4 2 5 7 7 3 4 10 8	114

5. 실생활에서의 수학

위의 물음에 대해서는 사람마다 각각 의견이 다를 수도 있으리라 생각한다. 실생활에서의 수학에 대한 정립된 이론이 있는 것도 아니다. 하지만 저자는 최근 매스컴을 탔던 PISA(Programme for International Student Assessment)¹⁾의 다음과 같은 평가 목적에 주목하면서 시사점을 얻을 수 있으

1) OECD가 주관하는 학업 성취도 국제 비교 연구

리라 생각하고 조사해 보았다.

OECD(Organization for Economic Cooperation and Development)에서는 ‘학교 교육을 받은 학생들이 장차 사회에 나가서 생산적인 역할을 할 준비가 되어 있는가?’를 점검하기 위해 국제적인 학업 성취도 평가를 실시한다.

참고문헌[1]의 수학적 소양(Mathematical Literacy) 영역의 정의에 의하면 학교 학급에서 전형적으로 만나는 상황(situations)이나 문제를 뛰어넘어 실세계 문제(real-world problem)에 포커스를 맞추고 규정하고 있다. 실세계에서 사람들은 쇼핑하거나, 여행하거나, 요리하거나, 개인적인 금융문제를 다루거나, 정치적인 이슈를 판단하거나 등등의 상황에서 수학을 만날 수 있다. 사실 수학의 그러한 사용은 학교 교과서에 전통적으로 등장하는 문제들을 통하여 학습되고 연습될 수 있다. 그러나 실세계 문제는, 방향이 아주 명백하지 않고 어떤 지식이 그것과 관련이 있는지 그리고 어떻게 적용될 수 있는지를 학생이 결정해야하는, **덜 구조화된 문맥(context)**에서 스킬을 적용하는 능력을 필요로 한다.

따라서 OECD/PISA의 수학적 소양(Mathematical Literacy) 영역의 정의는 다음과 같다.

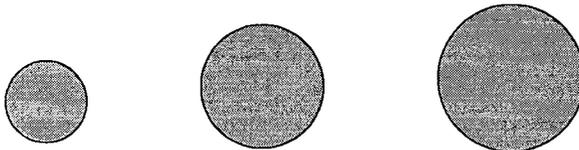
수학적 소양은 잘 구축된 판단을 하고, 건설적이고, 걱정하며, 사려깊은 시민으로서 개인의 삶의 욕구를 충족하는 수단으로 수학을 이용하는데 수학이 세계에서 역할을 함을 분별하고 이해하는 개인의 능력이다.

여기에서 저자는 ‘덜 구조화된 문맥(context)’에 주목하고자 한다. 우리나라의 제7차 교육과정을 보면 구성주의에 입각한 활동중심의 교과서 제작을 위한 많은 노력이 엿보이기는 하나 ‘덜 구조화된 문맥(context)’에 해당하는 노력은 별로 없었다고 생각된다. 다시 말해 실생활에 나타나는 것이 아니라 수학 문제집에 나온듯한 문제들로만 우리의 교과서를 채우지 않았나 하는 반성이다. OECD/PISA 문제에 대한 샘플을 제시하며 이는 한국교육과정 평가원의 교수학습센터(<http://classroom.kice.re.kr>)에서 가져온 것임을 밝혀둔다.

[샘플문제] 동전

새로운 동전 세트를 디자인하려고 한다. 세트에 포함되는 모든 동전들은 원 모양이고 은 색이지만 지름의 길이는 서로 다르다.

다음은 이상적인 동전 체계의 조건이다 :



- 동전의 지름은 15mm보다 작지 않고 45mm보다 크지 않아야 한다..

- 주어진 동전 다음으로 큰 동전을 만들 때는 그 주어진 동전의 지름보다 적어도 30% 더 크게 해야 한다.
- 화폐 제조기는 지름이 정수의 밀리미터로 된 동전들만을 생산할 수 있다(예 : 17mm는 되지만, 17.3mm는 안된다).

[문제(서술형)] 위의 조건들을 만족하는 동전 세트를 디자인하시오. 15mm 동전으로 시작해야 하고, 이 동전 세트는 가능한 한 많은 동전들을 포함하여야 한다.

가장 많이 쓰이는 복사용지는 A_4 , B_4 , B_5 용지들이다. A_4 용지의 전지는 A_0 이고 A_0 의 넓이는 $1m^2$ 이다. B_4 , B_5 용지의 전지는 B_0 로서 넓이가 $1.5m^2$ 이다. A_1 용지는 A_0 용지의 두 긴 변의 중점을 연결한 선을 따라 자른 것이고, A_2 용지는 A_1 용지의 두 긴 변의 중점을 연결한 선을 따라 자른 것이다. 같은 방법으로 A_3 , A_4 , ... 등을 만든다. B_0 용지를 이용하여 B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , ... 용지도 같은 방법으로 만든다.

1. 축소·확대가 가능한 복사기를 보면 축소·확대 방법이 적혀있다. 이들 중 다음과 같은 경우 그 배율이 어떻게 되는지 앞의 설명에 비추어 빈칸을 채우시오(단, 배율은 길이 배율이며, 참값으로 답하시오).
2. A 용지(A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_m , ...)와 B 용지(B_0 , B_1 , B_2 , ..., B_n , ...)들 간의 축소·확대 가능한 배율에 대한 성질을 기술하시오(단, m, n 은 음이 아닌 정수).

한편에서는 구성주의에 입각한 상황속의 수학(Mathematics in Context)에 대한 연구도 꾸준히 이루어지고 있다. 1991년부터 1996년까지 미국 위스콘신 대학의 교육연구소와 네덜란드 우트레흐트 대학의 프로이덴탈 연구소가 공동으로 연구 개발한 교재가 국역되어 2002년부터 현재까지 우리나라의 여러 학교 현장에서 사용되고 있다. 이 MIC 교재는 RME(Realistic Mathematical Education)를 바탕으로 한 것으로 학교 수학의 본 교재 또는 부교재로 사용되고 있다(참고 사이트[2]).

6. '실생활에서의 수학'을 실천하기 위한 방안

실생활에서의 수학을 구축하기 위해서는 덜 구조화된 문맥(context)에 좀 더 주의를 기울여야 한다. 왜냐하면 실제 상황에 가장 근접한 것은 덜 구조화되어 있기 때문이다.

이는 개방형 교수법과도 상통하는 바가 있다(참고문헌[2]). 개방형 교수법은 수학문제의 결론을 학생이 결정할 수 있도록 하기 위한 개방형 발문을 통한 교수법으로 수학 영재교육과 관련해서도 많은 연구가 행해지고 있다.

참 고 문 헌

PISA (2003). Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills - Publications 2003

(<http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>)

구광조·전평국·박성선·문성길 옮김. 개방형 교수법: 수학 지도를 위한 새로운 제안, 서울: 경문사 (원저: Jerry P. Becker/Shigeru Shimada, *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*)

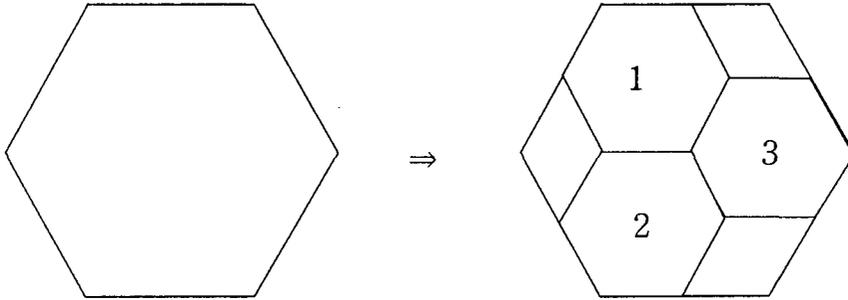
방승진(편집) (2000). 2000년도 과학분야 특기적성교육 지도교사 연수 자료집, 아주대학교 과학영재교육센터.

[토론 주제]

1. 수학영재판별은 제대로 되고 있는가?
2. 판별문항개발에서의 영재교육원 간의 협력 방안은?
3. 다단계 선발을 시행하기 위한 방안은?
4. 다양한 선발은 어떻게 구현해야 하는가?
5. 영재교육원 학생들의 수행평가는 어떻게 하는가?

수학

6. $\frac{1}{x} - \frac{1}{xy} = \frac{2}{11}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 를 모두 구하여라.
7. 아래 그림은 왼쪽의 정육각형의 각 변을 2등분하고 적절히 연결하면 오른쪽처럼 3개의 작은 정육각형을 만들 수 있음을 보여주고 있다. 이와 같은 방법으로 왼쪽 정육각형의 각 변을 3등분하여 적절히 연결하였을 때 작은 정육각형을 최대한 많이 만든 그림을 그려보고, 작은 정육각형이 몇 개인지 구하여라.

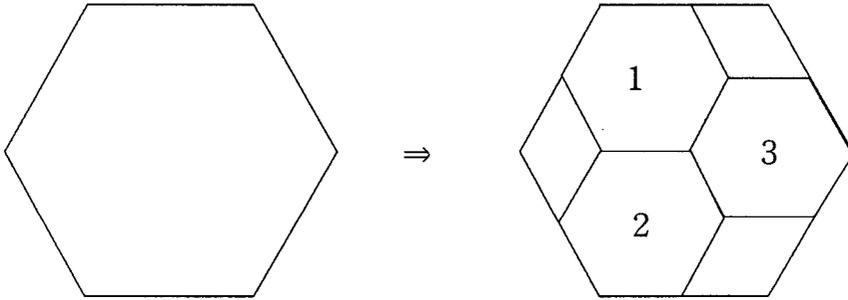


8. 19202122...939495 는 19부터 95까지의 정수를 차례로 늘어놓은 154 자리 수이다. 이 수의 자리수 중 95 개를 없애서 남은 수(즉, 59 자리 수)가 가장 크게 할 때, 남은 수의 처음 15 자리 수를 모두 구하여라.
9. 삼각형 ABC는 예각 삼각형으로 \overline{AB} 가 가장 긴 변이다. \overline{AB} 의 연장선상에 B가 AD 사이에 있게 점 D를 $\overline{BD} = \overline{BC}$ 가 되게 잡을 때, $\angle ACD$ 가 둔각임을 보여라.
10. 다음 수들을 두 개의 그룹으로 나누어 각 그룹의 합을 구했을 때, 두 합의 차이가 가장 작게 하려면 어떻게 나누어야 하겠는가?

17. 5. 67. 6. 24. 31. 46. 19

수 학

6. $\frac{1}{x} - \frac{1}{xy} = \frac{2}{11}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 를 모두 구하여라.
7. 아래 그림은 왼쪽의 정육각형의 각 변을 2등분하고 적절히 연결하면 오른쪽처럼 3개의 작은 정육각형을 만들 수 있음을 보여주고 있다. 이와 같은 방법으로 왼쪽 정육각형의 각 변을 3등분하여 적절히 연결하였을 때 작은 정육각형을 최대한 많이 만든 그림을 그려보고, 작은 정육각형이 몇 개인지 구하여라.



8. 19202122...939495 는 19부터 95까지의 정수를 차례로 늘어놓은 154 자리 수이다. 이 수의 자리수 중 95 개를 없애서 남은 수(즉, 59 자리 수)가 가장 크게 할 때, 남은 수의 처음 15 자리 수를 모두 구하여라.
9. 삼각형 ABC는 예각 삼각형으로 \overline{AB} 가 가장 긴 변이다. \overline{AB} 의 연장선상에 B가 AD 사이에 있게 점 D를 $\overline{BD} = \overline{BC}$ 가 되게 잡을 때, $\angle ACD$ 가 둔각임을 보여라.
10. $N_k = 131313 \cdots 131$ 은 $k+1$ 개의 1 과 k 개의 3이 번갈아 배열된 자연수이다. 모든 자연수 k 에 대하여 N_k 는 31의 배수가 아님을 보여라.