韓國數學敎育學會 주최 제 11회
國際數學英才敎育세미나 프로시딩
2006. 2. 9-23

Proceedings of the 11th International Seminar on
Education of Gifted Students in Mathematics
February 2006. 9-23

중국과 영국의 수학 시험에 대한 비교 연구[1)]

Jiansheng Bao (Soochow University)

본 논문은 중국과 영국의 두 견본 수학 시험의 특성을 비교하기 위해서 Bao라는 저자가 개발한 복합적인 어려운 모델을 사용하고 있다. 몇몇 어려움을 겪는 정도 상에서 다섯 가지 어려움을 겪는 요소를 활용하여 첫 번째 연구결과를 설명하였다. 그리고 나서 첫 번째 연구결과에 따라 두 나라의 수학 문제 해결의 유형과 교육과정 배경을 분석하였다.

1. 서 론

동아시아와 서양 국가 사이의 수학 성취의 차이점에 관해서 많은 연구자들은 동아시아 학생들이 시종일관 서양의 학생들보다 더 잘 수행하는 이유를 설명하려고 한다. 첫 번째 연구결과들을 몇 가지 나열해보면 다음과 같다.

가. 학생들이 열심히 공부하고 성취하도록 하는 유교적인 문화 전통의 영향(Wang, 1996; 1998)

나. 수학 교육과정에서 세계의 수업(Ginsberg et al., 2005)

다. 기초 수학에 대한 교사의 심도 깊은 이해(Ma, 1999)

라. 방과 후 교수와 학습에 더 많이 할애된 시간(Fuligni and Stevenson, 1995)

마. 성취를 향한 더 긍정적인 태도와 공부가 학문적인 성공을 위한 주요 수단이라는 더 강력한 믿음을 가지기(Chen and Stevenson, 1995)

Park(2004)는 재조사하여 국제적인 수학과 과학 비교 연구에서 동아시아 학생들의 성공에 기여하는 몇 가지 요인에 대하여 토론하였다. 그것은 수 체계, 선택적인 수준별 교육 환경, 시험에 대한 학생들의 태도, 그리고 교사 교육이였다.

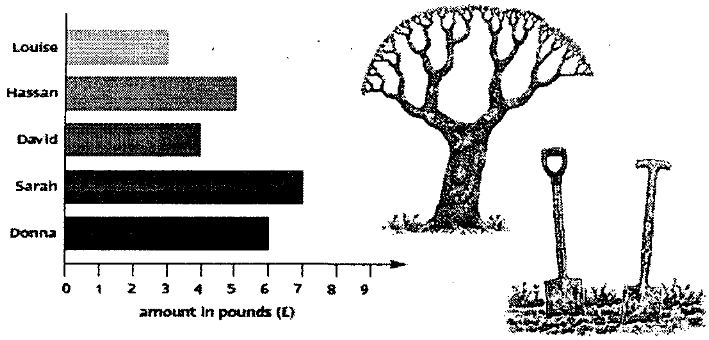
이 논문의 목적은 중국과 영국의 몇몇 시험을 통해 수학 문제에서 어려움을 겪는 특성들을 비교하는 것이다. 그리고 나서 중국과 영국의 중학교 학생들의 문제 해결 유형의 다른 점에 대해서 토론한다. 우선 영국 초등학교 3학년 Assess and Review Test와 중국 Suzhou시의 고등학교 입학 시험에서 두 개의 견본 문항을 살펴보자.

견본 A : (GCSE 2001, 영국)

다섯 명의 아이들이 나무를 심기 위해서 돈을 모으고 있다. 다음은 지금까지 모은 양을 막대 그림으로 나타낸 것이다.

---

1) 이 논문은 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구> 제10권 1호(통권 25호)에 게재된 논문인 A Comparative Study of Mathematics Tests in China and UK를 번역한 것입니다.



그들의 목표는 모두 합해서 40이 되는 것이다. 그 목표에 도달하기 위해서 얼마 더 필요한가?

견본 B : (HSEE 2001, 중국)

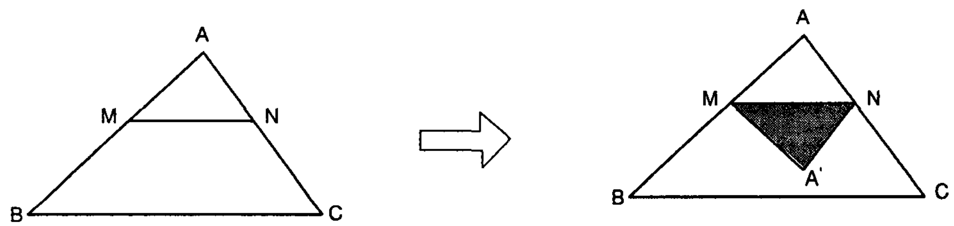
넓이가 $25\,cm^2$, $\overline{BC}=10cm$, $\angle B$와 $\angle C$는 예각이고 변 AB위를 움직이는 점 M(A, B와는 다른 점)이 주어진 $\triangle ABC$(<그림 1>)가 있다. 점 M을 지나고 선분 BC와 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점이 N인 선분 MN을 긋는다. $\overline{MN}$의 길이를 xcm로 놓자.

(1) x를 사용하여 $\triangle AMN$의 넓이를 나타내어라.

(2) $\overline{MN}$을 기준으로 $\triangle AMN$을 대칭이동 시켜라. 점 A의 대칭점을 A'로 놓고 $\triangle A'MN$과 사각형 $BCNM$의 겹쳐진 면적을 ycm^2이라고 하자.

a. x를 정의역으로 놓고 x에 의한 y방정식을 찾아라.

b. 겹쳐진 면적 y의 최대값을 구하고 그 때의 x값을 구하여라.



(1) (2)

두 개의 견본은 그 시험에서 가장 어려운 마지막 문항이지만 매우 달라 보인다. 견본 A의 풀이는 두 단계만 필요하다.

S_1 : 막대그림에서 이미 모은 양의 합계를 구한다.(3+5+4+7+6=25)

S_2 : 필요한 돈을 구한다. (40-25=15)

예시 문항의 문제 해결 과정을 보기 위해 순서도를 사용할 수 있다.

<그림 1> 견본 A의 문제 해결 과정

첫 번째 견본과 비교해 볼 때, 견본 B는 다음처럼 훨씬 더 많은 단계가 필요하다.

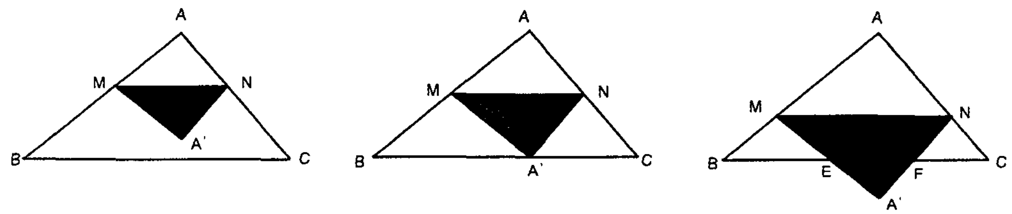
S_1 : $MN // BC \Rightarrow \angle AMN = \angle ABC$, $\angle ANM = \angle ACB$(T_0와 T_1 : 평행선들 위에 놓인 직선은 다른 각과 같은 대응하는 각들을 만든다.)

S_2 : $\triangle AMN$과 $\triangle ABC$가 닮음을 보여라.(T_2 : 두 삼각형의 두 각이 같으면 서로 닮았다.)

S_3 : $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{BC}\right)^2$임을 보여라.(T_3 : 두 닮은 삼각형의 닮음비가 $a:b$이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$이다.)

S_4 : $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4}x^2$임을 보여라. 이것이 (1)의 해다.(비례의 성질 T_4)

S_5 : 점 A의 위치에 따라 다음 그림과 같은 세 가지 경우가 있다.



(3) (4) (5)

S_6 : 점 A'가 변 BC위에 있으면(<그림 4>) 선분 MN은 밑변이 BC인 $\triangle ABC$의 높이를 이등분한다. (합동인 삼각형들의 성질 T_5)

S_7 : $x = \frac{BC}{2} = 5$임을 보여라.(T_0와 T_6 : 삼각형의 한 변과 평행한 직선은 삼각형의 그 변들을 비례해서 나눈다.)

S_8 : $y = \frac{1}{4}x^2 = \frac{25}{4}$(단계 S_4)

S_9 : 점 A'가 사각형 $BCNM$의 내부에 있으면 (<그림 3>) $0 < x < 5$이고 $y = \frac{1}{4}x^2$ (단계 S_4와 S_7)

S_{10} : $0 < x \le 5$일때, $y = \frac{1}{4}x^2$은 단조적으로 증가함으로 y는 $x = 5$일때, 최대값 $\frac{1}{4} \times 5^2 = \frac{25}{4}$를 갖는다.(2차함수의 성질 T_6)

S_{11} : 점 A'가 사각형 $BCNM$의 외부에 있으면 (<그림 5>) $5 < x < 10$임을 보여라.(단계 S_7과 T_0)

S_{12} : $y = S_{\triangle A'MN} - S_{\triangle A'EF}$임을 보여라.(T_0)

S_{13} : $EF // MN$임을 보여라.(T_0)

S_{14} : $\triangle A'EF \sim \triangle A'MN$임을 보여라. (T_0, T_1, T_2)

S_{15} : $\triangle A'EF \sim \triangle ABC$임을 보여라. (단계 S_2와 T_7 : 두 삼각형이 또 다른 삼각형과 닮으면 서로 모두 닮았다.)

S_{16} : 밑변이 BC인 $\triangle ABC$의 높이가 $h = 5$임을 보여라.(T_0와 삼각형의 넓이 공식 T_8)

S_{17} : $\triangle A'EF \sim \triangle ABC$이므로 $\frac{S_{\triangle A'EF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{h_2}{5}\right)^2$ 이다.(밑변이 EF인 $\triangle A'EF$의 높이를 h_2로 놓는다. 단계 S_{14}, T_3)

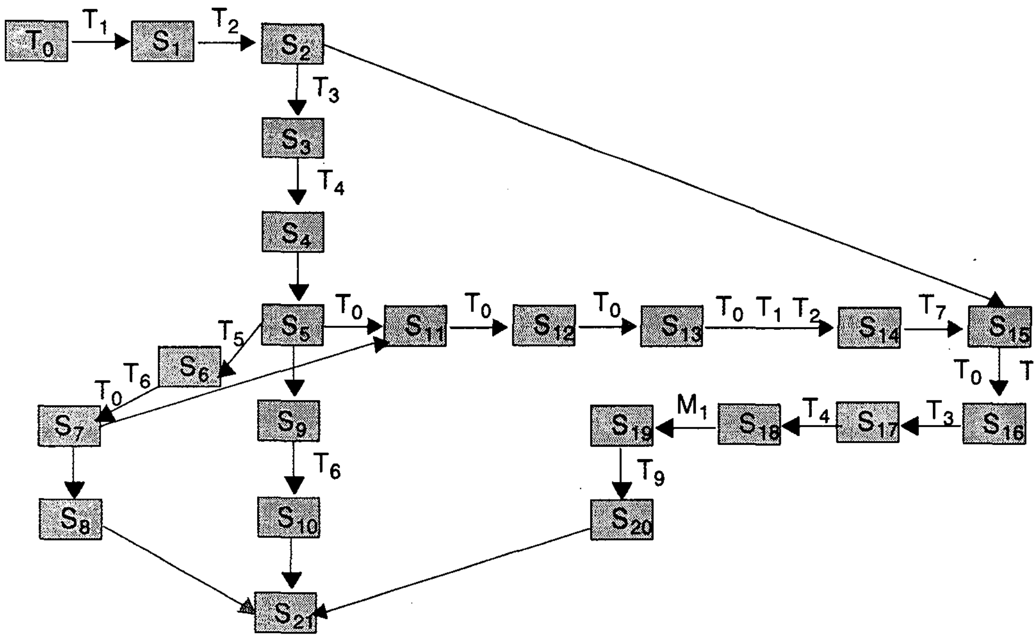
S_{18} : $y = -\frac{3}{4}x^2 + 10x - 25$, $5 < x < 10$ 임을 보여라.(비례의 성질 T_4를 따르면 방정식을 간단히 만들 수 있다.)

S_{19} : 방정식 $y = -\frac{3}{4}x^2 + 10x - 25$ 을 $y = -\frac{3}{4}(x - \frac{20}{3})^2 + \frac{25}{3}$ 로 다시 써라.(완전제곱식 방법 M_1)

S_{20} : $y_{\max} = \frac{25}{3}$ ($x = \frac{20}{3}$ 일 때)를 구해라.(이차함수의 최대값 정리 T_9)

S_{21} : S_8, S_{10}, S_{20}의 결과를 비교해보면, y의 최대값은 $x = \frac{20}{3}$ 일 때 $y = \frac{25}{3}$ 이다.(끝)

견본 B의 문제해결과정을 보기 위해서 순서도를 사용한다.



<그림 2> 견본 B의 문제해결과정

견본 A와 견본 B(<그림 1>과 <그림 2>)의 과정을 비교해 볼 때, 큰 차이점을 찾기란 쉽다. 예를 들어 중국의 예는 훨씬 더 많은 단계를 가지고 많은 정리와 다른 방법을 포함한 더 많은 수학적 지식을 필요로 한다. 두 개의 견본 문항이 같은 학년 수준에 있을지라도 어려움을 겪는 특성과 정도가 확실히 같은 것은 아니다. 이는 다음과 같은 연구 과제를 제시해 준다.

○ 수학시험에서 어려움을 겪는 특성과 정도를 어떻게 평가할 것인가?
○ 중국과 영국 사이에 수학시험에서 어려움을 겪는 특성과 정도의 차이점은 무엇인가?
○ 이런 차이점은 수학 문제 해결의 유형에 어떤 영향을 미치는가?

이 연구의 조사방법론으로는 저자 Bao(Bao, 2002a; 2002b)가 또 다른 관련 연구에서 떠맡았던, 중국과 영국의 수학 교육과정을 비교한 복합적으로 어려움을 겪는 모형으로 개발된 한 가지를 사용할 것이다. 이 연구의 첫 번째 결과들은 두 수학 교육과정 사이에 현저한 차이점이 있다는 것을 보여준다. 예를 들어 중국 수학 교육과정은 수학의 이용을 탐구하는 활동들보다 수학적 지식과 방법의 이해에 더 많은 중요성을 부여한다. 즉 중국 교과서에서는 학생들의 일상생활과 관련된 수학 문제가 거의 없다. 더구나 중국 수학 교육과정에서 "two basics"의 수준은 영국 수학 교육과정에서 발견된 것보다 훨씬 더 앞선 것이다. 그러나 이 논문에서 우리는 중국과 영국에서 수학시험이 유사한 경우가 있는지 없는지, 그것이 학행들의 문제해결에 어떤 영향을 미치는지 알아보고자 한다.

2. 복합적으로 어려움을 겪는 모형

수학 시험의 어려움을 겪는 정도를 측정하기 위해서 학생들이 옳게 반응하는 평균 비율인

어려움을 겪는 지표를 사용한다. 그러나 어려움을 겪는 지표는 다른 나라들에서 다른 시험을 비교 연구하는데 적합한 도구는 아니다. 사실 어려움을 겪는 지표가 측정하는 것은 수학시험의 어려운 정도가 아니라 학생들의 수행하는 정도이다. 더욱이 시험 문항의 어려움을

겪는 지표는 단지 얼마나 많은 학생들이 문항에 옳게 대답했는지만 보여 줄 수 있다. 그것은 문항에 대한 어려움을 겪는 특성을 나타낼 수는 없다.

어떤 연구자들은 수학 시험을 비교하는 새 모형을 찾고자 했다. Ginsberg, Leinwand, Anstrom, Pollock & Witt(2005)는 세 가지 방법으로 각각 수학 문제의 특성을 기술하였다. 그것은 해에 도달하는 대략적인 단계의 수, 알려지지 않은 다양한 중간물의 해결을 포함한 해결전략, 공식이나 정의를 단순히 실생활에 적용하거나(예를 들어, 수학적 지식의 직접적이고 명백하며 평범한 적용) 대신에 문제 풀이에 비일상적인 전략이나 접근을 포함한 해결 전략이다.

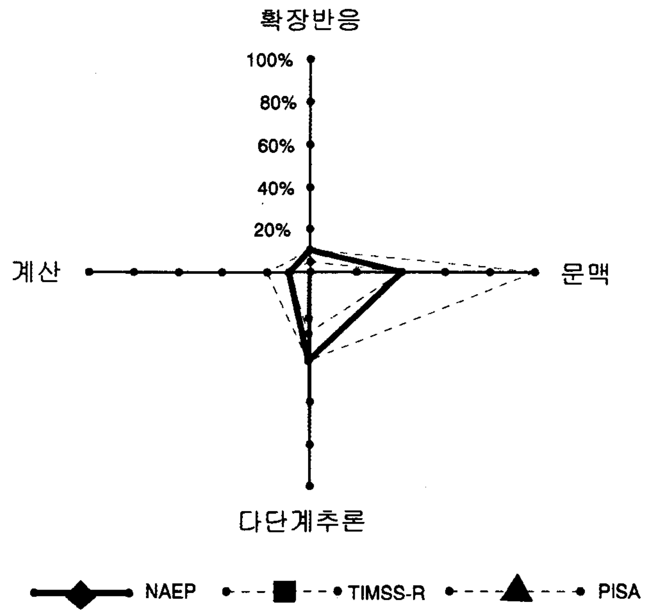
Heinze, Cheng & Yang(2004)은 시험문항을 세 가지 수준의 능력으로 나누었다.

(Ⅰ) 기초능력(사실과 규칙을 적용하기, 예 : 계산)
(Ⅱ) 논증능력(한 단계 논증)
(Ⅲ) 논증능력(몇 가지 논증을 결합하기)

Heller & Heller(1999)은 문제에서 어려움을 겪는 21가지 특성을 열거하였다. 변하기 쉬운 목표를 명백하게 못하는 것, 비유사한 문맥, 불규칙적인 상황, 변하기 쉬운 특별한 목표, 가정을 간단히 하기 등을 포함하고 있다.

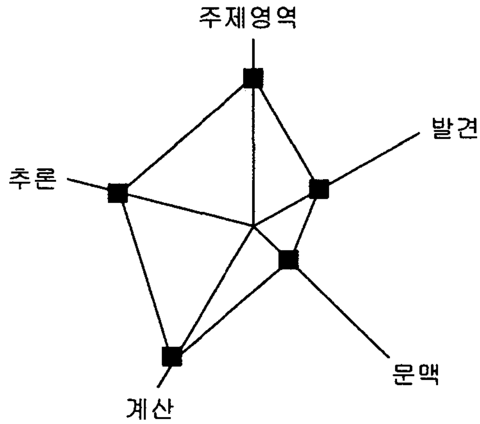
Nohara(Nohara, 2001)의 연구는 NAEP, TIMSS-R과 PISA의 시험 문항에서 어려움을 비교하는 것이다. 그는 평가의 상대적인 어려움을 초래할 수 있는 몇 가지 요소들을 확인했다. 그들 중 네 명

은 대부분 학생들이 더 어려워 하는 문항을 만들 것 같다. 이것은 응답 형태, 문항의 문맥, 다단계 추론의 요구, 계산의 양을 포함하고 있다. <그림 3>은 네 개의 선 그래프 상에 각각의 평가로 이 요소들을 함께 나타내고 있다.



<그림 3> 수학에서 어려움을 겪는 요소들

종합적인 어려움에 대한 Nohara의 모형에 기초해서, 나는 수학 시험에서 복합적인 어려움을 겪는 다섯 개의 요소(<그림 4>)를 포함한 새로운 모형을 계발하였다.



<그림 4> 복합적인 어려움을 겪는 모형(Bao, 2002a; 2002b)

그 모형에 있는 각각의 요소는 몇 가지 수준으로 더 세분화된다(<표 1>).

<표 1> 복합적인 어려움을 겪는 요소들의 어려움을 겪는 수준(Bao, 2002a, 2002b)

요소	수준			
발견	지식	이해	탐구	
문맥		개인적인 삶	공공의 일	과학적인 상황
계산		수 계산	단순한 기호 계산	복잡한 기호 계산
추론		단순한 추론	복잡한 추론 (두 단계 이상)	
주제범위	단순주제	두 개 주제	세 개 이상 주제	

위 모형은 수학 문제의 복합적인 어려움을 평가하는데 사용된다. 수학 시험의 복합적인 어려움을 평가하기 위해서 다음 공식으로 각 요소에 대한 어려움을 겪는 지표를 견적할 것이다.

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} \quad \left(\sum_j n_{ij} = n;\quad i=1,2,3,4,5;\quad j=1,2,\cdots\right) \quad (*)$$

$d_i\,(i=1,2,3,4,5)$는 다섯 개의 요소들에 대응하고 d_{ij}는 j번째 수준의 i번째 거듭 지표를 나타낸다. n_{ij}는 i번째 요소의 j번째 수준에 속한 문항수들의 합계이고, n은 시험 전체 문항의 n_{ij}의 합계이다.

3. 견본들

1996년 공공의 GCSE의 영국 견본들은 세 개의 수준인 기초수준, 중간수준, 고등수준을 포함하고 있다. 모두 140개의 문항이 있다. 중국의 견본은 삼년간의(1999~2001)

Suzhou시의 HSEE(고등학교 입학시험)이다. 모두 126개의 문항이 있다. <표 2>는 두 개의 견본에 있는 각각의 요소에서 수준에 속한 문항수와 비율을 보여주고 있다.

<표 2> 각각의 어려움을 겪는 수준에서 문항수, 비율, 가중치

요소	수준	문항수		비율		가중치	
		GCSE	HSEE	GCSE	HSEE	GCSE	HSEE
탐구	지식	87	53	62.14	42.06	1.41	1.58
	이해	49	73	35	57.94		
	탐구	4	0	2.86	0		
문맥	없음	64	106	45.71	84.13	1.66	1.27
	개인	56	6	40	4.76		
	공중	19	14	13.57	11.11		
	과학	0	0	0	0		

계산	없음		50	23	35.71	18.25	1.83	3.33
	수		73	40	52.14	31.75		
	단순한 기호	1단계	9	12	11.43	22.22		
		2단계	7	16				
	복잡한 기호	3단계	1	13	0.71	27.78		
		4단계	0	9				
		5단계	0	7				
		6단계	0	6				
추론	없음		53	28	37.86	22.22	1.73	3.33
	단순	1단계	73	29	61.43	40.48		
		2단계	13	22				
	복잡	3단계	1	15	0.71	37.30		
		4단계	0	18				
		5단계	0	5				
		6단계	0	2				
		7단계	0	1				
		8단계	0	3				
		11단계	0	2				
		14단계	0	1				
주제 범위	한개		71	28	50.71	22.22	1.55	2.83
	두개		61	33	43.57	26.19		
	세개 이상	세개	8	30	5.71	51.59		
		네개	0	14				
		다섯개	0	11				
		여섯개	0	8				
		일곱개	0	2				

주석 : 1. 가중치는 (*)공식으로 계산

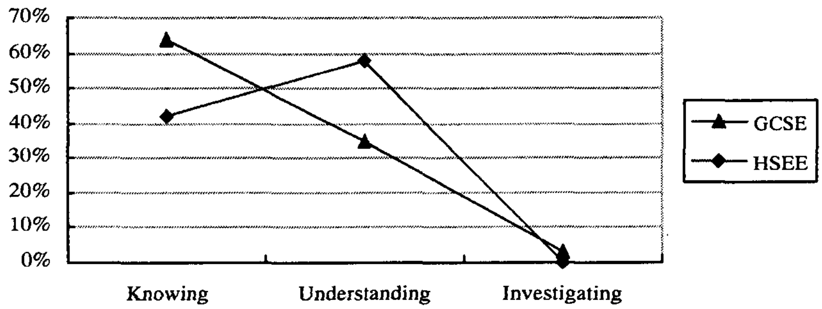
2. 비율과 가중치는 0.01범위까지 어림잡음

4. 초기의 발견들

<표 2>에 기초하여, 이장에서는 우선 GCSE와 HSEE의 각 난이도 요소에서의 난이도 수준을 비교하고 이러한 실험에서 어떤 난이도 특성들을 찾을 것이다. 그리고 나서 두 표본(GCSE와 HSEE)의 복합적인 난이도들을 분석할 것이다.

4.1 발견수준에서의 차이점들

<표 2>에서 보여주듯이, GCSE에서는 항목들의 64.14%가 "knowing"수준인 반면 HSEE에서는 40.06%가 이 수준에 속한다. 각 표본에서 "understanding"수준에 속하는 항목들의 퍼센트는 각각 35%와 57.94%이다. ; "investigating"수준에 속하는 항목들의 퍼센트는 각각 2.86%와 0이다.(<그림 5>참조)

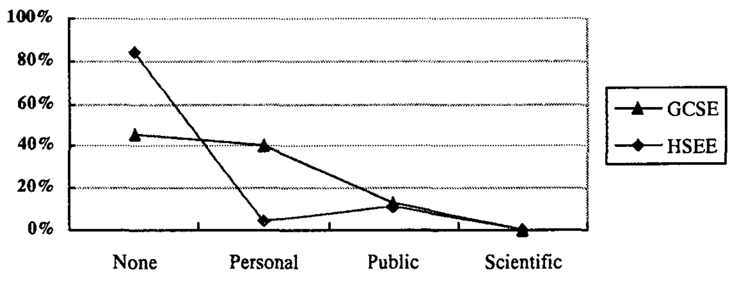


<그림 5> GCSE와 HSEE의 발견수준의 비교

<그림 5>는, GCSE와 비교하여 HSEE에서의 퍼센트가 "knowing"수준에서는 더 낮지만 "understanding"수준에서는 더 높다는 것을 보여준다. 두 표본에서 대부분의 항목들이 전통적인 수학 문제들이라는 것을 의미하는 "investigating"수준에서는 GCSE와 HSEE의 퍼센트가 거의 같다.

4.2 문맥 수준에서의 차이점들

수학문제들의 문맥은 학생들이 느끼는 친근한 정도에 따라 네 수준으로 나뉘어 질 수 있다. 가장 가까운 것은 (개인적인)일상생활이고 그 다음은 사회/직업 생활이며 가장 먼 문맥은 과학적 생활이다. 표2에서 보여준 것처럼, HSEE에서는 항목들의 84.13%가 어떤 실생활 문맥을 제공하지 않는데 반하여 GCSE에서는 단지 45.71%가 어떤 실생활 문맥을 제공하지 않았다. "personal" 문맥 수준에 속하는 항목들의 퍼센트는 각각 4.76%와 40%이다. ; "public" 문맥 수준에서의 항목들의 퍼센트는 11.11%와 13.57%이다. "scientific" 문맥과 관련한 항목은 양쪽 모두 없었다.(<그림 6>참조)



<그림 6> GCSE와 HSEE의 context 수준의 비교

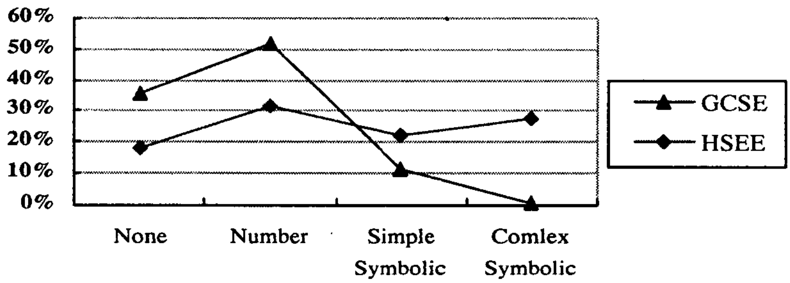
위의 그림은 실생활 상황과 관련된 항목들이 GCSE에 더 많다는 것을 보여 준다. HSEE에서는 거의 모든 항목들이 "순수 수학"문제들이다. HSEE에서 실생활 문맥 에 관련된 항목들의 몇 가지는 보통 전통적인 작업장과 관련되어 있다.

그러나 "과학적" 문맥을 가지고 있는 항목들의 퍼센트는 중국과 영국 모두에서 여전히 매우 낮다는 사실에 주목할 필요가 있다. "프로젝트 학습", "통합교과활동", "과학적 연구"와 같은 새로운 교수-학습 유형들(이러한 유형들이 우리로 하여금 과학적 상황들이 수학 시험 속에 더 훌륭하게 통합될

수 있을는지에 대한 의문을 갖게 함에도 불구하고) 이 많은 나라들에서 점점 인기를 끌고 있다. 명백하게, 여기에 대해서는 더 많은 연구가 필요하다.

4.3 계산 수준에서의 차이점들

<그림 7>은 GCSE와 HSEE에서 계산에 있어서의 다른 난이도 수준에 대한 항목들의 퍼센트들을 보여준다.

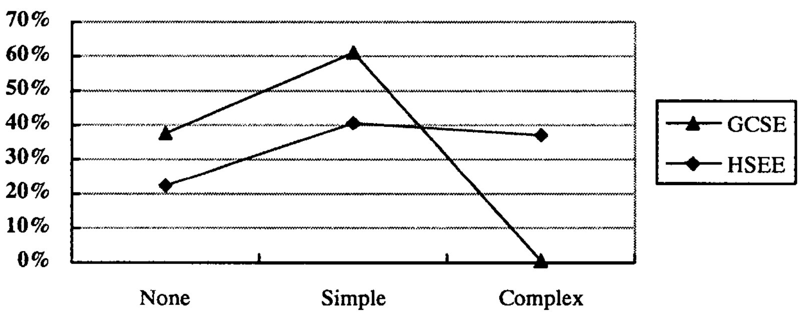


<그림 7> GCSE와 HSEE의 계산 수준 비교

위 그림에 따르면, GCSE와 HSEE에는 "복잡한 상징적 계산"을 필요로 하는 더 많은 항목들이 있다.

4.4 추론 수준에서의 차이점들

수학적 추론은 전통적인 중국의 수학 교육과정(특히 기하 교육과정)에서 강조되는 부분이다. 이어지는 그림에서 볼 수 있듯이, GCSE의 표본들과 비교해서 HSEE에는 수학 추론에 있어서 매우 강한 감각이 있다.

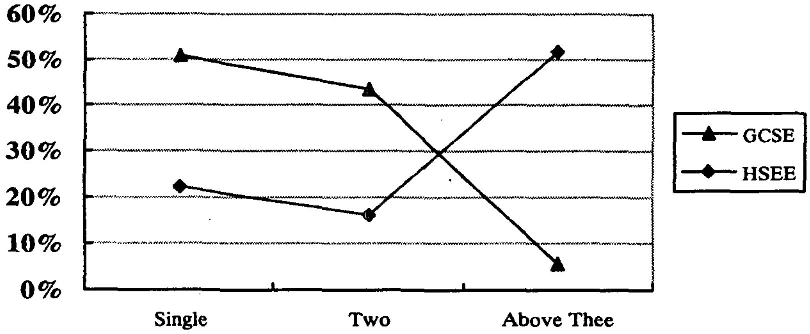


<그림 8> GCSE와 HSEE에서의 추론 수준의 비교

<표 2>로부터 우리는 GCSE에는 "복잡한 추론 수준"에 속하는 단 하나의 항목만이 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 HSEE에는 32 개의 항목들이 3 단계 이상의 형식적인 수학적 추론을 필요로 한다. HSEE에서 하나의 항목에 의해서 요구되어 지는 가장 많은 추론 단계들의 수는 14이다. 아마도 그 항목을 해결하기 위해서 학생들은 많은 시간이 걸릴 것이다.

4.5 주제 범위 수준에서의 차이점들

이 논문에서, "주제 범위"란 하나의 항목에 포함된 수학 주제의 수를 가리킨다. 이어지는 그림은 <표 2>에 기초한다.



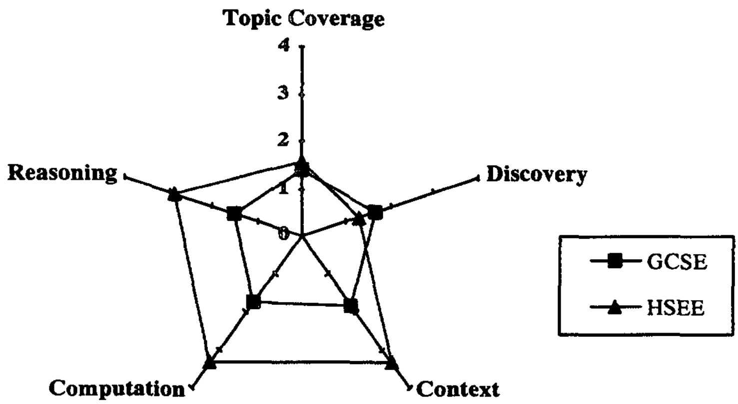
<그림 9> GCSE와 HSEE에서의 주제 범위 수준의 비교

<그림 9>는 GCSE의 절반이상의 항목들이 단지 "하나의 주제"만을 가지고 "3개의 주제"를 가지는 항목들은 5.71%도 채 되지 않는다는 것을 보여준다. 그러나 HSEE에서는 절반 이상의 항목들이 적어도 3개의 다른 수학 주제들을 포함한다.

4.6 복합 난이도들의 차이점들

위의 다섯 개의 절에서, 우리는 GCSE와 HSEE의 표본들을 가지고 다른 요소에서의 난이도 수준을 비교하였다.

이 절에서는, 이 두개의 표본들(GCSE와 HSEE)을 하나의 전체로 비교하기 위해 복합적인 난이도 모형을 사용할 것이다. 이어지는 그림은 <표 2>에 기초한 것이다.



<그림 10> GCSE와 HSEE에서의 복합적인 난이도 비교

<그림 10>으로부터, 우리는 다음과 같이 GCSE와 HSEE에서의 비교에 대한 몇 가지 초기의 발견들을 요약할 수 있다.

"발견"수준에서는, 중국의 표본이 영국의 것보다 약간 더 높음에도 불구하고, GCSE와 HSEE에서 대부분의 항목들은 실제로 전통적인 수학 문제들이다. 두 표본(GCSE와 HSEE)모두 우리가 "수학적 조사연구"라고 부를 만한 항목들은 거의 없다.

"context"수준에서는, 중국의 시험들은 영국의 것보다 더 낮다. HSEE의 표본들은 학생들의 일상생활과 관련된 상황을 가지고 있는 문제들은 거의 없고, GCSE의 항목들은 실세계 상황 (특히 학생들의 개인적 생활과 관련한 상황) 에 더 많이 놓여져 있다.

"계산", "추론"과 "주제 적용범위" 수준에서는, 중국의 시험들이 영국의 것보다 매우 높았다. 세 가지 요소들이 전통적인 중국 수학의 "두 개의 기초"를 이루는 주된 요소이기 때문에, 중국 수학 교수(teaching)는 매우 강한 "두 개의 기초"를 가지는 것처럼 보인다.

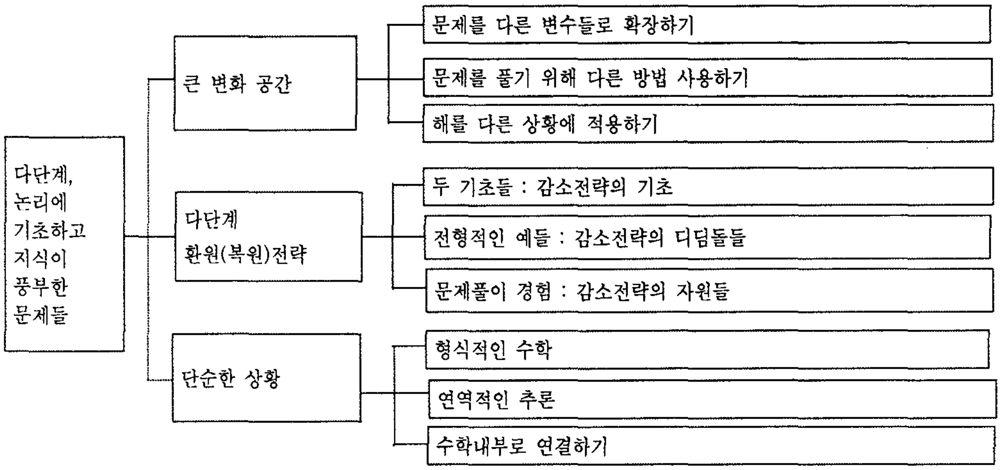
다섯 개의 난이도 요소들에 근거하여, 하나의 전체로서 중국의 표본은 영국의 것보다 훨씬 더 어려운 것처럼 보인다.

5. 문제해결 방식들

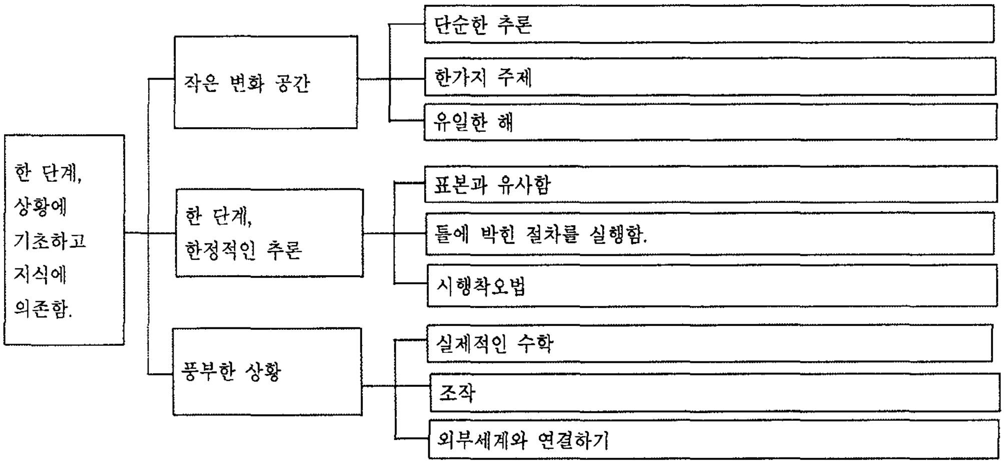
중국과 영국의 수학 교육과정과 수업 속에 또한 나타나는 중국과 영국 시험들의 앞서의 차이점은 확실히 이들 두 나라의 학생들의 수학 문제 풀이 방식에 영향을 끼칠 것이다.

중국에서는, 단계가 많고 논리에 기초하며 정보가 풍부한 수학 문제들이 수학 문제풀이의 다음 특징들을 이끈다.

- 학생들은 보통 문제를 푸는 동안 세 가지 다른 활동들을 거칠 필요가 있다. : 문제를 다른 변수들로 확장하는 것, 문제를 풀기위해 다른 방법을 사용하는 것, 다른 상황에 그 해를 적용하는 것. 이것은 몇몇의 중국 수학 교사들에 의해서 "문제풀이의 3부곡"이라고 불리워진다.
- 어렵고 새로운 문제를 풀기 위한 기본 전략은 이미 해결되었거나 더 쉬운 문제로 그것을 단순화시키는 것이다. 이것은 "단순화 전략"이라고 불리워진다. 단순화 전략을 사용하기위해서, 학생들은 수학적 내용의 각각의 영역에서 몇 가지 전형적인 예들을 기억하고 있어야 한다. 이러한 전형적인 예들은 문제를 푸는 동안 기초석이 될 것이다.
- 학생들이 문제를 푸는 방식은 어느 정도는 "순수 수학자"의 작업과 유사하다. : 형식적 연역, 이론에 기초한 추론, 다단계의 복합적인 상징화, 수학적인 지식의 풍부함, 그러나 현실적인 문맥이 아닌.



<그림 11> 중국의 수학 문제풀이의 특징들



<그림 12> 영국의 수학 문제풀이의 특징들

한편, 영국 문제풀이 자들의 방식은 그들의 상대편인 중국과는 매우 다르게 보인다.

영국교과서와 시험들에 있는 대부분의 수학문제들의 풀이들은 추론과정이 없거나 단순한 추론만을 지닌 한 두 단계만을 필요로 한다. 학생들의 연습문제들은 교과서에 나와 있는 문제들이나 수업시간에 선생님에 의해서 제시된 문제들과 종종 유사하다. 대부분의 상황에서 학생들이 해야 하는 것은 틀에 박힌 절차를 연습하거나 "시행착오법"을 사용하는 것이다. 어떤 문제들이 몇 가지 변수들을 가지고 있음에도 불구하고, 바뀐 것은 보통 수학내용이나 방법이 아니라 실제적인 상황으로의 변화뿐이다.

다른 수학 문제들은 수학 문제해결에 있어서 학생들의 태도에 영향을 미칠 수 있다. 어떤 발견들은 "어떤 수학문제를 푸는 옳은 방법은 단 한가지이다.-보통 가장 최근의 수업시간에 선생님이 제시했던 규칙", "수학문제들은 단 하나의 옳은 답을 가진다." 그리고 "그들이 공부했던 수학을 이해하는

학생들은 5분이 채 되지 않아 할당된 문제를 풀 수 있을 것이다." 등과 같은 서구 학생들의 전형적인 신념들을 보여 준다.

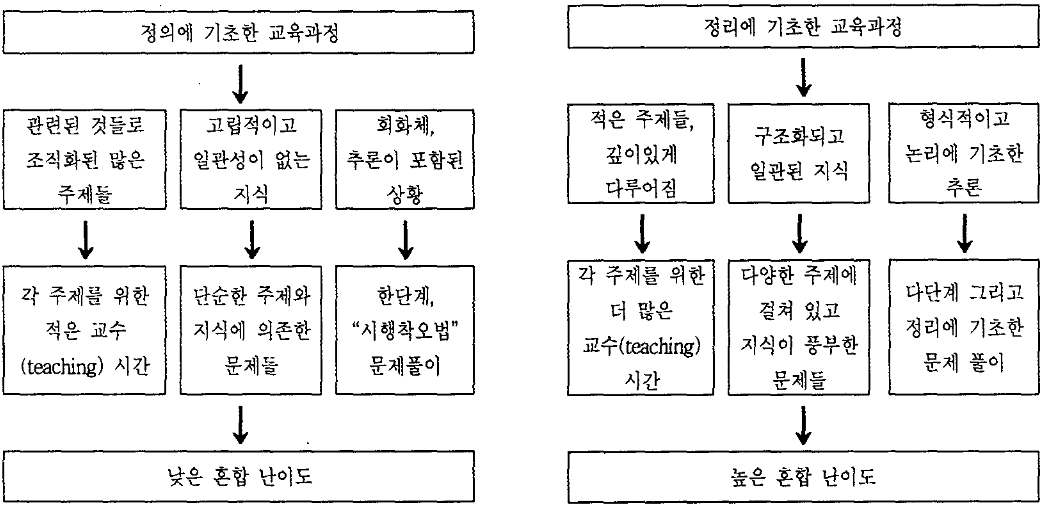
6. 교육과정의 배경

중국과 영국의 수학 시험들 속의 수학 문제와 문제 풀이에서의 몇몇 차이점들은 중국과 영국의 수학교육과정의 차이점들로부터 조사되어질 수 있다. 한 예로, 우리는 표3에서 MEP(Mathematics Enhancement Programme, 2001)과 PEP(People's Education Press, 2001)의 8학년 교과서들의 모든 장들의 목록을 작성하였다.

<표 3> MEP와 PEP 교과서의 내용들(8학년)

MEP 교과서(영국)	PEP교과서(중국)
8학년 A	대수 II
1. 수학적 도표	8장. 인수분해
2. 인수들	9장. 추론적 표현
3. 피타고라스의 정리	10장. 수의 진화
4. 반올림과 측정	11장. 제곱근의 표현
5. 데이터 분석	기하 II
6. 망과 겉넓이	3장. 삼각형들
7. 비와 비례	4장. 사각형들
8. 대수 : 괄호들	5장. 닮음
9. 산술 : 분수들와 퍼센트들	
10. 확률 - 두 사건	
11. 각, bearings(북쪽에서부터 시계방향으로 측정된 각)과 함수	
8학년 B	
12. 공식들	
13. 돈과 시간	
14. 직선 그래프	
15. 다각형	
16. 원과 원기둥	
17. 측정의 단위	
18. 속도, 거리와 시간	
19. 닮음	
20. 질문과 분석	

두 교과서를 비교해 보면, MEP 교과서는 전형적인 "정의에 기초한 교육과정"이고 PEP교과서는 전형적인 "이론에 기초한 교육과정"이라는 것을 알 수 있다.



(1) MEP 교과서 (2) PEP 교과서

<그림 13> 중국과 영국 수학 교과서의 특징들

<그림 13>에서 보여 지듯이, MEP 교과서는 8학년에서 주제와 관련한 많은 chapter들을 가지고 있다. 대부분의 chapter에서 학생들은 단지 몇 가지 기본적인 수학 개념들과 절차들을 배우고 그것들을 어떤 틀에 박힌 연습문제들을 푸는데 사용한다.

그러나, 전통적인 중국의 수학교과서들에서 상황은 많이 바뀐다. 한 권의 교과서에는 단지 몇 개의 chapter만이 있고 인접한 chapter들은 보통 문제를 해결하는데 있어서 종종 이전의 몇 가지 지식을 사용하도록 요구할 정도로 밀접하게 관련되어 있다. 각 chapter의 모든 주제들은 깊이 있고 이론적이며 배우고 가르치는데 더 많은 시간을 필요로 한다. 특히 기하 교과서들에는 수학 개념의 형식적 정의와 더불어 보통 많은 정리(theorem)들이 있다.(예를 들어, 기하책Ⅱ에는 전부 84개의 정리가 들어 있다.) 이러한 정리들은 학생들로 하여금 이해하는 것을 요구할 뿐만 아니라 수학 증명을 위한 논증 또는 "정리에 기초한 추론"으로서 가치를 가진다. 예를 들어, 이 논문의 첫 부분에 제시된 중국 표본 시험 항목(sample B)을 되돌아보자. 한 문제를 풀기 위해서 학생들은 적어도 9개의 정리들을 적용해야만 한다. 그래서 우리는 중국 수학 교과서들은 전형적인 정리에 기초한 교육과정이라고 말할 수 있다.

중국과 영국의 교육과정의 다른 유형들은 교육과정 목적의 차이점을 이끈다. 중국 수학 교육과정은 기본지식과 개념, 조직화된 교육과정 주제들의 잘 짜여진 뼈대에 관련된 주제에 대한 독특한 사고 기술들의 숙달을 목표로 한다.(Bao, 2004)