韓國數學敎育學會 주최 제 11회
國際數學英才敎育세미나 프로시딩
2006. 2. 1-7

Proceedings of the 11th International Seminar on
Education of Gifted Students in Mathematics
February 2006. 1-7

# 수학적 가능성 및 창의성 개발[1)]

Linda Jensen Sheffield (Kentucky University)

## 개 관

문제를 해결하는 계산 기능과 기계적인 절차를 암기하는 능력만으로는 오늘날 세상을 살아가기에는 충분치 못하다. 이러한 능력도 중요한지만, 더욱 중요한 것은 문제를 인식하고 명확하게 하며 다양한 해결 방법을 고안해 내며, 추론하고 결과를 입증하며 해결 결과에 대해 의사소통하는 것이다. 이는 생득적인 능력이 아닐 뿐만 아니라 자연스럽게 신장될 수도 없다. 재능있고 발전 가능성이 있으며 창의적인 수학자의 자질을 갖도록 하기 위해서 이러한 능력들은 육성되고 교육되어야 한다.

## 수학적 창의성이란 무엇인가?

창의성은 과거에 이룩해 놓은 불변의 지식을 기억하고 반복되어져야 한다고 여기는 전통적인 학교 수학의 이미지에서는 찾아볼 수 없다. 학교 수학의 이러한 자화상은 학생들이 기성의 법칙을 있는 그대로 따라함으로써 일련의 기술들을 지루하게 학습하는 수업이 전개되는 결과를 초래하였다. 이러한 맥락에서, 학생들에게 필요한 수학적 창의성의 요소는 무엇인지를 이해하거나 규명하기란 불가능한 일일 것이다. 그러나 강력하고 창조적인 수학자가 되기 위하여 수학이란 추론하고 전략을 개발하고 문제를 해결하는 인간의 활동-수학화를 권장하는 활동, 창의적인 수학적 사고를 수반하는 과정-임을 인식해야만 한다. 학생들은 개념과 절차를 알고 있어야 할 뿐만 아니라 수학이 어떻게 만들어지고 새로운 개념을 학습하고 특정한 혹은 다양한 방법으로 문제를 해결하기 위해 수학이 어떻게 활용 되는지를 인식해야만 한다. 수학적 창의성을 신장시키기 위하여, 학생들은 풍부한 과제 또는 문제를 경험하게 해야 한다. 그러한 교실에 있는 창의적인 교사는 모든 것을 아는 전문가로써의 이미지에서 학생들로 하여금 스스로 사고하고 스스로 의사결정을 하는 자율적인 학습자로 여길 수 있도록 학생들을 자극하는 전문가로써의 이미지로 탈바꿈해야한다.

## 창의적의 수학자를 위한 풍부한 과제

혁신적 산출물, 개성과 창의성은 수학 학습 및 교수와 직결된 것이 아니고 학생들과 교사 모두의

1) 이 논문은 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구> 제10권 1호(통권 25호)에 게재된 논문인 Developing Mathematical Promise and Creativity를 번역한 것입니다.

수학적 힘을 신장시킬 수 있는 쪽에 중점을 둔 특징들이다. 학생들에게 세상의 이치를 이해하게 하고 수학적인 개념을 탐구함으로써 창의적인 학생이 되도록 하기 위해서, 교사는 다양한 방법을 통해 다양한 수준으로 탐구되어질 수 있는 풍부하고 흥미있는 문제를 활용해야 한다. 이러한 것들 중 몇몇은 컴퓨터 논리와 프랙탈과 같은 최근의 연구 분야뿐만 아니라 피타고라스 정리, 파스칼 삼각형, 마방진과 같은 수 백 년 동안 탐구 되어온 문제나 패턴에서 찾아볼 수 있다.

교사는 해결 방법이 다양한 문제를 구안해야 하며 자신의 추론을 상대방에게 설명하는 기회를 제공해야만 한다. 교사들은 한 문제를 다른 몇 개의 문제를 위한 발판으로 활용해야 하며 학생들에게 얼마나 많은 해결책, 패턴, 일반화 그리고 그들이 찾아낸 문제와 관련되는지를 알아보도록 하기 이전에 동료들과 그 문제에 대하여 논의해 보아야 한다.

수학적인 창의성을 진작시킬 수 있는 좋은 과제 혹은 문제는 다음과 같은 준거를 만족해야한다.

1. 과제는 교사가 생각하고 있는 것이 무엇인지를 추측하도록 하는 물음이 아니라 비록 단순한 개념이라 할지라도 학생들로 하여금 심층적인 사고를 유발할 수 있는 물음을 제기해야 한다.
2. 과제는 모든 학생들이 접근 가능한 진입점(entry point)을 가지고 있어야 할 뿐만 아니라 가장 우수한 학생들조차도 도전할 만한 것이어야 한다.
3. 과제는 학생들이 기존의 지식을 기초로 하여 새로운 수학적 원리나 개념을 발견할 수 있는 것이어야 한다.
4. 과제는 수학의 핵심적이 규준 및 기준과 관련된 것이어야 한다.
5. 과제는 학생들에게 다양한 탐구, 반성, 확장의 기회를 제공해야 하며 관련된 새로운 영역으로 연결될 수 있는 것이어야 한다.
6. 과제는 다양한 방법 즉, 언어적, 기하학적, 그래픽적, 대수적, 수리적으로 자신의 능력을 표현할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 것이어야 한다.
7. 과제는 질문하고, 추론하고, 의사소통하고, 문제를 해결하는 능력을 사용할 수 있도록 해야 하며, 다른 과목과 실생활 문제뿐만 아니라 수학의 다른 분야와 연결될 수 있는 것이어야 한다.
8. 과제는 수학적인 조작 및 모델뿐만 아니라 계산기, 컴퓨터와 같은 공학을 사용할 수 있는 것이어야 한다.
9. 과제는 그룹으로 탐구하고 발견하는 기회와 더불어 개별적으로 사고하여 문제를 해결하는 기회를 제공해야한다.
10. 과제는 학생들이 다양한 사고와 학습 양식(style)을 형성할 수 있도록 흥미 있고 활동적인 것이어야 한다.
11. 과제는 하나의 정답 혹은 하나의 해결 방법 이상을 지닌 개방적인 것이어야 한다.
12. 과제는 심층적인 수학적 의미를 발전시키기 위해서 단지 답을 구하는데 국한되지 않고 구해진 해답에 대해 의문을 제기하도록 해야 한다.

## Exercises or Problems : Open or Closed?

일반적으로 교과서에 제시된 수학적인 연습문제는 단지 하나의 정답을 지니며 하나의 알고리즘으로 해결 될 수 있는 문제들이다. 이러한 연습문제(Exercise)에는 계산이나 눈에 훤히 보이는 한 두 단계를 거쳐 해를 구하는 간단한 문장으로 된 문제도 포함된다. 이는 일반적으로 즉각적인 답이나 해결 방법이 떠오르지 않는 어떤 상황으로 정의되는 문제(Problem)와는 구별된다. 문제는 개방적일 수도 폐쇄적일 수 있다. 개방형(Closed-ended) 문제는 유일한 정답을 갖지만 다단계 또는 비정형 해결을 포함한다. 몇몇 연구자들은 문제와 과정이 열려있는(open middle) 문제를 구별하고 그러한 문제는 개방형 문제(open-ended)라 하였다. 과정이 열려있는(Open middle) 문제는 교사 중심이 아니라 학생들에 의해 결정된 다양한 방법에 의해 해결 될 수 있다. 이러한 문제는 유일한 또는 다양한 해답을 지닐 수 있다. 개방형 문제(open-ended)는 유일한 정답을 갖지 않는다. 이러한 문제는 완전하게 규정되지 않으며 미지의 혹은 모호한 자료를 지닌 것이다. 많은 실생활 문제가 이러한 범주에 해당된다. 이런 문제해결을 통하여 학생들의 수학적 힘과 창의성이 신장된다(Foong, 1999). 하지만 문제해결만으로는 충분치 않다. 학생들은 문제 해결을 넘어서 새로운 문제를 만들고 탐구해야 한다.

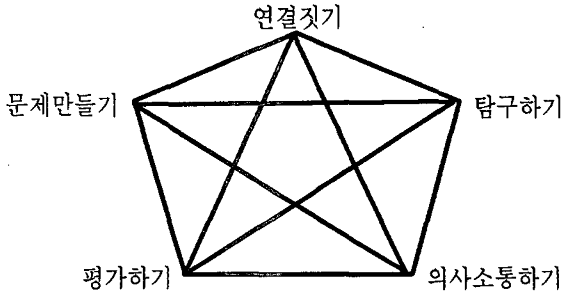
우리는 학생들에게 아래와 같은 연속체를 따르도록 해야 한다.

수학문맹자 맹목적계산자 살아있는계산자 수학활용자 문제해결자 문제 발견자 창조자

대부분, 학생들은 보다 심층적인 수학을 발견하지 않은 채 어떤 문제에 대한 해답을 구하는 것에 만족하고 만다. 이러한 측면에서, 학생들은 수학적인 아이디어 대해 심층적으로 생각하고 새로운 개념을 발견하는 기쁨을 만끽하지 못한다. 해결된 문제에 대해 학생들이 제기하는 의문점은 살아 숨쉬는 수학의 시발점이 되기도 한다.

## Questions, Questions, Questions

아래 그림은 학생들이 창의적이고 탐구적인 수학자와 같이 생각하도록 하는데 사용되어질 수 있는 발견술이다.



위의 발견술을 사용할 때, 학생들은 그림의 어떤 한 점에서 출발하여 일정한 순서로 진행해 나갈 것이다. 하나의 가능한 순서는 아래와 같다.

- 과거에 해결해 보았던 다른 문제들과 연결시킨다. 기존에 알고 있었던 수학적인 아이디어와 유사한 점은 무엇인가? 다른 점은 무엇인가?
- 문제를 탐구 한다. 심층적으로 사고하고 의문을 제기하여라.
- 해결 결과를 평가하여라. 제기한 의문에 답하였는가? 그 답은 맞는가?
- 결과를 의사소통 하여라? 발견한 내용을 어떻게 하면 다른 사람들에 잘 이해시킬 수 있겠는가?
- 탐구할 새로운 문제를 만들어 보아라. 이 주제에 대해 더 알고 싶은 것은 무엇인가? 새로운 탐구를 시작해 보아라.

새로운 수학적 통찰의 형성 측면에서 학생에게 도움을 주기 위해 창의적인 수학적 탐구에 대한 몇 개의 질문들이 제기될 수 있다.

- **무엇이 혹은 만약 ~라면?**

이 자료에서 나타나는 패턴은 무엇인가? 그 패턴으로부터 어떠한 일반화를 형성할 수 있는가? 어떻게 확신할 수 있는가? 다른 가능선은 어떤 것이 있을까? 최선의 해답, 최선의 해결, 최선의 전략은 무엇인가? 만약 그 문제의 일부 또는 그 이상을 바꾼다면 어떻게 될까?

- **언제?**

이것은 언제 적용되는가? 언제 적용되지 않은가?

- **어디서?**

문제의 출처는 어디인가? 어디서부터 시작해야 하는가? 어떤 도움을 받을 수 있는가?

- **왜 또는 왜 안되는지?**

그렇게 한 이유는 무엇인가? 그렇게 하는 것이 적절치 못하다면 그 원인은 무엇인가?

- **어떻게?**

기존에 알고 있던 수학적 문제와 패턴과 어떻게 같은가? 어떻게 다른가? 실생활 상황과 모델과 어떻게 관련되어 있는가? 얼마나 많은 해결이 가능한가? 이 아이디어를 얼마나 많은 방법으로 표상하고, 모의실험하고, 모델화하고 시각화할 수 있는가? 이 정보를 얼마나 많은 방법으로 정렬하고 체계화하여 나타낼 수 있는가?

### 평가 기준

만약 학생들이 개념에 대해 보다 심층적인 이해를 신장시키고 보다 창의적이며 탐구적인 수학자가 되기를 바란다면, 다음과 같은 깊이있는 사고와 창의성을 진작시키는 평가에 대한 준거을 사용해야 한다.

**심층적 이해**- 핵심적인 개념이 이해되고, 탐구되고 발전되는 정도
**유창성**- 다른 유형의 정답, 해결 방법 또는 형성된 새로운 질문의 개수
**융통성**- 다른 범주의 해답, 방법 또는 질문의 개수
**독창성**- 유일하고 통찰력있는 해답, 해결 방법 또는 질문
**정교성**- 챠트, 그래프, 그림, 모델, 언어를 통한 사고 표현의 명확성
**일반화**- 보다 큰 범주에 대해서 발견, 예상 그리고 입증된 패턴
**확 장** - 제기되고 탐구되어지는 특히 왜 그리고 만약 ~라면과 같은 질문들

한 개의 정답을 갖는 문제가 아니라 추론과 정당화가 필요하며 몇 개의 해답을 갖는 개방형 문제에 대한 탐구 또는 기지의 개념에 깊이를 더하고 확장시킬 수 있는 문제로 학습할 수 있도록 해야 한다. 살아있는 학습은 최초의 문제가 해결 된 후 이루어질 수 있음을 명심하여라.

**창의적인 수학자와 같은 사고를 기르기 위한 채점 기준**

| 평가 준거 | 1<br>초보자(못함) | 2<br>훈련중인 사람(보통) | 3<br>능숙한 사람(잘함) | 4<br>특출한 사람(매우잘함) |
|---|---|---|---|---|
| 심층적인 이해 | 다소 혹은 전혀 이해하지 못함 | 부분적인 이해; 사소한 오류 | Good understanding; 수학적으로 정확 | 심층적 이해; 매우 발달된 사고 |
| 유 창 성 | 하나의 잘못된, 전략이나 방법 | 입증된 전략이나 방법으로 최소한 하나의 적절한 해결 | 동일한 전략이나 방법을 사용할여 최소한 두 개의 정답 | 동일한 전략이나 방법을 사용하며, 다수의 적절한 해결 |
| 융 통 성 | 어떠한 방법도 제시 못함 | 최소한 하나의 방법(모든 그래프, 모든 대수적 방정식 등) | 최소한 두 개의 해결 방법(기하적, 그래픽, 대수적, 물리적 모델링) | 세 개 혹은 그 이상의 해결(기하적, 그래픽, 대수적, 물리적 모델링) |
| 독 창 성 | 방법은 다양하지만 해결에 이르지 못함 | 방법이 해결에 이르지만 매우 평범함 | 소수 학생들에 의해 사용된 특이하고 실행 가능한 방법 또는 특별한 해결 | 단지 한 명 또는 두 명의 학생들에 의해 사용된 유일하고 통찰력있는 방법이나 해결 |
| 정교성 또는 세련미 | 거의 혹은 전혀 적절치 못한 설명 제시 | 설명은 이해할 수 있지만 명확하지 못한 부분이 있음 | 정확한 수학적 용어를 사용한 명확한 설명 | 그래프, 챠트, 모델 또는 방정식을 사용하여 명확하며 간결하고 정밀한 설명 |
| 일반화와 추론 | 어떠한 일반화도 형성하지 못하거나 부정확하며 추론 또한 명확하지 못함 | 최소한 한 개의 일반화가 이루어짐; 그러나 명확한 추론에 의해 뒷받침하지 못함 | 최소한 한 개의 잘 형성된, 지지되는 일반화 혹은 한개 이상의 정확하지만 지지되지 않는 일반화 | 근거에 의해 뒷받침 되는 일반화; 명확한 추론 |
| 확 장 성 | 어떠한 수학적 질문도 탐구되지 못함 | 최소한 한 개의 수학적 질문이 적절하게 탐구됨 | 하나의 관련된 질문이 깊이있게 탐구되거나 혹은 한개 이상의 적절한 질문이 탐구됨 | 관련된 한 개 이상의 질문이 깊이있게 탐구됨 |

Linda Jensen Sheffield(2000)에서 인용됨. "Creat and Developing Promising Young Mathematicians". Teaching Children Mathematics, 6(6), 416-419, 426.

## 학생들의 수학적 창의성 신장을 위한 문제의 예

**I. Original closed Exercise**

0-9가 적혀있는 카드들 중에서 4장을 골라 덧셈 문제를 만들 수 있도록 배열하여라. 합은 얼마인가?

$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ +\ \square\,\square \\ \hline \end{array}$$

**Opening the Problem**

0-9까지의 적혀있는 카드 중에서 4장을 골라 합이 가장 큰 (두 자리수 +두 자리수)의 문제를 만들어라. 합은 얼마인가? 같은 합을 얻을 수 있는 방법은 모두 몇 가지인가?

$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ +\ \square\,\square \\ \hline \end{array}$$

**The Real Math Bigins**

위의 문제를 뺄셈 문제로 바꿀 수 있는가? 가장 작은 차를 만들 수 있는 방법은 몇 가지인가? 항상 가장 작은 값이 되는 일반적인 규칙을 찾을 수 있는가? 그 문제를 곱셈 혹은 나눗셈 문제로 바꿀 수 있는가?

**Ⅱ. Original Closed Exercise**

여러분은 빨간색 블럭 2개와 파란색 블럭 1개를 가지고 있습니다. 이 세 개의 블럭을 사용해서 만들 수 있는 3단 블럭 타워를 그림으로 나타내어 보아라.

**Opening the Problem**

빨간색이거나 파란색인 세 개의 블럭을 사용해서 만들 수 있는 3단 블럭 타워를 모두 그려 보고 설명해 보아라.

**The Real Math Begins**

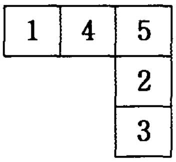
만약 ....라면...

- 색깔의 종류가 더 많아진다면?
- 블럭의 개수가 더 많아진다면?
- 한 줄 이상의 다양한 모양으로 블럭을 배열해 보아라.

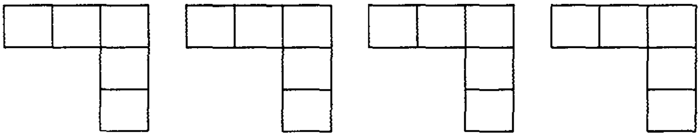
여러분이 발견한 패턴은 무엇인가?
이때, 블럭의 수를 일반화 할 수 있는가?

## Ⅲ. Original Closed Exercise

가로와 세로의 합을 구하여라. 알게 된 점은 무엇인가?

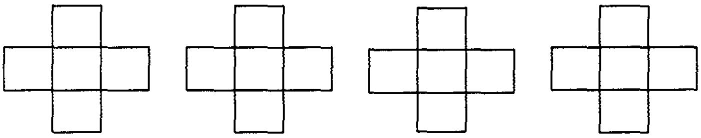



**Opening the Problem**: 1-5까지 적인 카드 중에서 가로와 세로 줄의 합이 같게 되도록 직사각형 안에 적당한 수를 넣어라. 몇 가지나 만들 수 있는가?



**The Real Math Begins**

1-5까지 적인 카드 중에서 가로와 세로 줄의 합이 같게 되도록 직사각형 안에 적당한 수를 넣어라. 몇 가지나 만들 수 있는가? 위의 문제와 이 문제를 어떻게 비교할 수 있는가? 6-10의 수를 사용한다면? 2-10의 수중에서 짝수를 사용한다면? 5-25의 수 중에서 5의 배수를 사용한다면?



정사각형의 개수와 패턴을 다르게 한다면? 1-9의 수를 사용하여 각 가로줄과 세로줄이 같은 수가 되도록 하여라. 다른 다이어그램이나 퍼즐을 만들어 보아라.