

이산 선형 시스템에 대한 반복 학습 제어의 수렴성에 대한 연구

On the Convergence of ILC for Linear Discrete Time Nonminimum Phase Systems

정구민*, 안현식**

Gu-Min Jeong, Hyun-Sik Ahn
(gm1004,ahs}@kookmin.ac.kr

Abstract - This note investigates the convergence condition of ADILC (iterative learning control with advanced output data) for nonminimum phase systems. ADILC has simple learning structure including both minimum phase and nonminimum phase systems. However, for nonminimum phase systems, the overall time horizon must be considered in input update law. This makes the dimension of convergence condition matrix large. In this paper, a new sufficient condition is proposed to satisfy the convergence condition. Also, it has been shown that this sufficient condition can be satisfied although it is not full impulse response.

Key Words : Iterative learning control, Nonminimum phase system, Convergence condition, Impulse response

1. 서론

반복학습 제어는 같은 일을 반복적으로 수행하는 경우에 대해서 추종 성능을 향상 시키기 위해서 제시되었다. 1984년 Arimoto 등 [1]이 반복 학습 제어 기법을 발표한 이후 최근 까지 관련된 수많은 논문들이 발표되고 있다[2-7].

초기에는 주로 최소 위상 시스템에 대한 연구가 많았으나 최근에는 비최소 위상 시스템에 대한 연구도 많이 이루어지고 있다[3-7].

대부분의 비최소 위상 시스템의 학습 방법은 출력-상태, 상태-출력 사상에 기반하여 학습 방법이 복잡해 지는 단점, 모델을 필요로 하는 단점 또는 근사화된 해를 구하게 되는 단점을 가진다[3].

ADILC[4-7]는 이러한 단점을 극복하기 위해서 출력-입력 변환을 직접 안정화하는 방법을 사용하였다. ADILC에서는 상대차수와 비최소 위상 영점수 이후의 출력과 입력의 사상이 안정함을 보이고 이에 기반한 입력 갱신식 및 학습 구조를 제시하였다.

제시된 학습 방법은 최소 위상 시스템의 학습 구조를 비최소 위상으로 확장하여 간단한 학습 구조를 가진다. ADILC는 입력 갱신식을 간략화 하여 비최소 위상 시스템을 제어할 수 있는 학습 제어 방식이지만 이에 비하여 수렴조건을 전 구간에서 검사해야 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 ADILC의 수렴 조건 및 학습 이득 행렬의

선택에 대해서 다루었다. ADILC에서는 시간 구간이 커질 수록 수렴 조건 검사 행렬의 차원이 커지기 때문에 학습 이득 행렬의 선택이 어려워지는 단점이 있다. 이러한 점을 고려하여 ADILC의 수렴 조건의 검사를 간략화하기 위해서 새로운 충분 조건을 제시하였다.

또한 임펄스 응답을 학습 이득 행렬에 사용할 경우 초기의 몇몇 임펄스 응답만으로도 수렴조건이 쉽게 만족될 수 있음을 보였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 기존의 ADILC에 대해서 간략하게 요약한다. 3 장과 4장에서는 ADILC의 수렴조건을 만족하는 새로운 충분조건을 제시하고 임펄스 응답을 사용할 경우 수렴조건 만족에 대해서 정리한다. 5장에서는 모의실험을 통하여 임펄스 응답을 사용할 경우 수렴조건 만족에 대해서 타당성을 검증하고 6장에서는 결론을 맺는다.

2. ADILC

다음과 같은 선형 이산 비최소 위상 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i), \end{aligned} \quad (1)$$

단, $u \in \mathbb{R}^1$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, 그리고 $y \in \mathbb{R}^1$ 는 각각 플랜트 입력, 시스템의 상태변수, 그리고 플랜트 출력을 나타내고 A, B, C 는 해당 선형 행렬을 나타낸다. (1)에 대해서 시스템의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n} \quad (2)$$

또한 임출력 구간의 입력과 출력을 하나로 묶어서 $u_{[i,j]} = [u(i), \dots, u(j)]^T$, $y_{[i,j]} = [y(i), \dots, y(j)]^T$ 와 같이 사용하기로 한다.

저자 소개

* 정구민 : 國民大學校 電子情報通信工學部 助教授

** 안현식 : 國民大學校 電子情報通信工學部 教授

위의 시스템에 대해서 시스템의 상대차수 σ 와 시스템의 비최소 위상 영점 수 d_0 가 알려져 있다고 가정한다.

ADILC에서 사용하는 출력-입력 사상은 다음과 같다.

$$y_{[\sigma+d_0, N+\sigma+d_0-1]} = Hx(0) + Ju_{[0, N-1]} \quad (3)$$

여기서

$$H = [H_{d_0+1}, \dots, H_{N+d_0}]^T, J = \begin{bmatrix} J_{d_0+1} & J_{d_0} & \dots & 0 \\ J_{d_0+2} & J_{d_0+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{N+d_0} & J_{N+d_0-1} & \dots & J_{d_0+1} \end{bmatrix},$$

$$H_1 = CA^{\sigma+i-1}, J_1 = CA^{\sigma+i-2}B.$$

모든 반복 시에 초기치를 $x^k(0) = x^d(0) = x(0)$ 로 두고 시간 구간 $N \leq i \leq N+d_0-1$ 에서 $u^k(i) = u^d(i) = 0$ 으로 둔다. 역사상을 안정화 하기 위한 가정은 다음과 같다.

- (A1) 시스템은 stable, controllable, observable 하다.
- (A2) 행렬 A는 invertible하다.
- (A3) (2)에서 $\beta_n \neq 0$ 이다.
- (A4) J는 nonsingular 하다.

Lemma 1 [5]

(3)식에서 $y_{[\sigma+d_0, N+\sigma+d_0-1]}$ 에서 $u_{[0, N-1]}$ 로의 사상은 안정하다.

Lemma 1을 바탕으로 한 ADILC의 입력 갱신식은 다음과 같다.

$$u_{[0, N-1]}^{k+1} = u_{[0, N-1]}^k + Se_{[\sigma+d, N+\sigma+d-1]}^k \quad (4)$$

여기서 $e_{[\sigma+d, N+\sigma+d-1]}^k = y_{[\sigma+d, N+\sigma+d-1]}^d - y_{[\sigma+d, N+\sigma+d-1]}^k$ 이다.

입력 갱신식 (4)를 바탕으로 한 수렴성은 다음과 같이 보일 수 있다.

Lemma 2 [5]

이산 비선형 시스템 (1)이 가정 (A1)-(A4)를 만족한다고 하자. 만약 수렴조건

$$\|I-SJ\| \leq \rho < 1 \quad (5)$$

이 만족되면 $k \rightarrow \infty$ 함에 따라 $u_{[0, N-1]}^k$ 는 $u_{[0, N-1]}^d$ 로 수렴한다.

3. 새로운 수렴 조건의 유도

ADILC는 최소 위상 시스템과 비최소 위상 시스템의 제어가 가능한 일반화 된 반복학습 제어방법이라고 할 수 있다. 또한 입력 갱신식이 간단하여 학습이 편리한 장점이 있다.

그러나 간단한 학습 구조 대신에 수렴 조건의 만족과 검사가 힘들어지게 된다. (5)의 수식을 만족하려면 시간 구간 N 이 커짐에 따라서 J의 차원이 커지게 된다. 이에 따라 수렴 조건을 검사하기가 어렵게 되고 한 S를 구하기가 힘들어지게 되는 문제점이 생기게 된다.

본 논문에서는 이러한 점을 고려하여 수렴 조건을 만족하는 새로운 조건을 유도하고 임펄스 응답과의 관계를 고려하도록 한다. 일반적으로 학습 계인 행렬인 S는 $0 < \alpha < 1$ 일 때, $S = \alpha J^{-1}$ 로 둘 수 있으면 가장 이상적이다. 시스템을 모로

는 경우 $S = \alpha J^{-1}$ 로 둘 수 없게 된다. 이와 같은 사실을 고려하여 학습 이득 행렬 S를 $S = \alpha(\bar{J})^{-1}$ 와 같이 두기로 하자. J와 \bar{J} 의 차이가 작게 되면 수렴조건의 만족이 쉽다고 할 수 있다.

이 때 ΔJ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta J = J - \bar{J}, J = \bar{J} + \Delta J \quad (6)$$

위의 수식들에서 (5)의 수렴조건을 만족하는 충분조건을 얻을 수 있다.

Theorem 1

학습 계인 행렬 $S = \alpha(\bar{J})^{-1}$ 에서 얻어지는 \bar{J} 에 대해서

$$\|\Delta J\| < \frac{1}{\|\bar{J}^{-1}\|} \quad (7)$$

(7)의 관계가 성립하면 수렴조건 (5)가 만족 된다.

증명)

(5)의 수렴 조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$I-SJ = I-\alpha(\bar{J})^{-1}J \quad (8)$$

(6) 식에 의해서 (8)식은 다음과 같이 정리된다.

$$I-SJ = I-\alpha(\bar{J})^{-1}J = I-\alpha(\bar{J})^{-1}(\bar{J}+\Delta J) \\ = (1-\alpha)I-\alpha(\bar{J})^{-1}\Delta J \quad (8)$$

(8)의 양변에 노름을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\|I-SJ\| = \|(1-\alpha)I-\alpha(\bar{J})^{-1}\Delta J\| \\ \leq \|(1-\alpha)I\| + \|\alpha(\bar{J})^{-1}\Delta J\| \\ \leq \|(1-\alpha)I\| + \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| \\ = 1-\alpha + \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| \quad (9)$$

따라서 (5)을 만족시킬 수 있는 충분 조건을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\|I-SJ\| \leq 1-\alpha + \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < 1 \quad (10)$$

(10) 식을 정리하면,

$$1-\alpha + \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < 1 \\ \Leftrightarrow -\alpha + \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < \alpha \quad (11)$$

$0 < \alpha < 1$ 이므로 다음과 같은 수렴 조건을 얻을 수 있다.

$$\alpha\|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < \alpha \\ \Leftrightarrow \|(\bar{J})^{-1}\|\|\Delta J\| < 1 \\ \Leftrightarrow \|\Delta J\| < \frac{1}{\|(\bar{J})^{-1}\|} \quad (12)$$

정리 1은 (5)의 수식을 만족하기 위한 충분 조건을 나타낸다. 학습 계인 행렬 S와 α 를 이용하여 \bar{J} 를 얻을 수 있다. 이때 J와 \bar{J} 의 차이의 노름이 \bar{J}^{-1} 의 노름의 역수보다 작을 경우 수렴 조건이 만족될 수 있음을 나타낸다.

4. 임펄스 응답을 이용한 수렴 조건 해석

4장에서는 정리 1을 적용하기 위한 한 예로 임펄스 응답을 이용한 수렴 조건의 해석을 통하여 (5)와 같은 수렴 조건을 (7)로 간략화 했을 경우 S의 형태가 간단하더라도 수렴 조건이 만족할 수 있음을 보이도록 한다.

안정한 선형 시스템에 대해서 시간이 지날수록 임펄스 응

답은 0으로 수렴한다. (3)식의 행렬 J 의 각 원소 J_i 는 각각 임펄스 응답으로 이루어진다. 또한 l 값이 커짐에 따라 J_i 은 0으로 수렴하게 된다.

이 때 임펄스 응답에 기반하여 \bar{J} 를 J 에서 $l \geq d_0 + 1$ 인 l 에 대하여 l 번째 이후의 임펄스 응답을 0으로 둔 결과라고 하자. 즉 $J_i = 0, i > l$ 이 된다.

그러면 ΔJ 와 \bar{J} 는 각각 다음과 같은 행렬이 된다.

$$\Delta J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{l+1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{N+d_0} & \cdots & J_{l+1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \bar{J} = \begin{bmatrix} J_{d_0+1} & \cdots & J_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_l & \cdots & J_{d_0+1} & \cdots & J_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_l & \cdots & J_{d_0+1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

시간 구간 N 이 커서 (5)의 수렴 조건을 만족하는 S 를 얻기가 힘든 경우를 생각해 보자. 이 경우 l 이 충분히 클 경우 ΔJ 의 노음은 매우 작아지므로 수렴 조건 (7)을 만족하도록 할 수 있다.

5. 모의 실험 결과

다음과 같은 시스템을 생각하자.

$$G(z) = \frac{z^3 + 2.5z^2 + 0.75z - 1.125}{z^3 + 0.1} \quad (14)$$

위의 시스템은 -1.5에 두 개의 비최소 위상 영점을 가지고 있으며 가정 (A1)-(A4)를 만족한다.

위의 시스템에 대해서 $N=25$, $\alpha=0.5$ 일 때 (13)과 같이 일부분의 임펄스 응답으로 \bar{J} 를 설정하고 수렴성에 대해서 알아보도록 한다.

표 1은 $l > 2$ 인 경우 각각 2-노음에 대해서 $\|I-SJ\|, \|\Delta J\|, 1/\|\bar{J}\|^{-1}$ 값을 구한 결과이다. $S = \alpha J^{-1}$ 로 둘 경우 $\|I-SJ\|$ 의 값은 0.5가 된다. 표 1에서 보는 바와 같이 $l \geq 6$ 일 경우 $\|\Delta J\| < \|\bar{J}\|$ 를 만족하고 $\|I-SJ\| < 1$ 이 됨을 볼 수 있다. $l=3$ 일 경우는 \bar{J} 가 minimum singular value가 매우 작게 되기 때문에 $1/\|\bar{J}\|^{-1}$ 값이 매우 작아지게 되고 $\|I-SJ\| < 1$ 도 만족하지 않게 된다. $l=4,5$ 인 경우에는 (7)은 만족하지 않지만 (5)는 만족함을 볼 수 있다.

l 값이 커짐에 따라서 $\|\Delta J\|$ 의 값이 0에 가까이 감을 볼 수 있으며 $\|I-SJ\|$ 의 값도 0.5에 가까이 감을 볼 수 있다. 따라서 임펄스 응답의 일부 값만을 사용하여 수렴조건을 쉽게 만족할 수 있음을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 이산 선형 비최소 위상 시스템의 반복 학습 제어의 수렴성에 대해서 다루었다. ADILC는 최소 위상 시스템과 비최소 위상 시스템에 대해서 반복학습제어를 적용할 수 있는 방법이다. 그러나 비최소 위상 시스템에 대해서는 전체 시간 구간을 고려해야 하므로 수렴 조건 행렬의 차원이 커지는 단점이 있다. 이를 극복하기 위해서 본 논문에서는 기존의 수렴조건을 만족하는 충분 조건을 제시하였다. 또한 임펄스 응답을 기준으로 할 때 전체 임펄스 응답이 아닌 일부만으로도 만족이 가능함을 보였다. 이를 통하여 학습 행렬을 쉽게 선택할 수 있도록 하였다.

l	$\ I-SJ\ $	$\ \Delta J\ $	$1/\ \bar{J}\ ^{-1}$
3	Not satisfied	1.4391	5.73×10^{-12}
4	0.5869	0.4371	0.4044
5	0.5664	0.3682	0.3036
6	0.6653	0.1897	0.5475
7	0.6133	0.1438	0.4748
8	0.5084	0.0434	0.3668
9	0.5109	0.0366	0.3761
10	0.5082	0.0189	0.3538
11	0.5055	0.0143	0.3601
12	0.5008	0.0043	0.3691
13	0.5009	0.0036	0.3683
14	0.5015	0.0019	0.3700
15	0.5009	0.0014	0.3696
16	0.5001	0.0004	0.3690
17	0.5001	0.0004	0.3690
18	0.5001	0.0002	0.3690
19	0.5001	0.0001	0.3690
20	0.5000	0.0000	0.3690
21	0.5000	0.0000	0.3690
22	0.5000	0.0000	0.3690
23	0.5000	0.0000	0.3690
24	0.5000	0.0000	0.3690
25	0.5000	0.0000	0.3690
26	0.5000	0.0000	0.3690
27	0.5000	0.0000	0.3690

표 1 $l > 2$ 인 경우 $\|I-SJ\|, \|\Delta J\|, 1/\|\bar{J}\|^{-1}$ 의 값

이산 선형 시스템에 대한 실험에서 임펄스 응답의 일부만 사용할 경우에도 수렴조건을 쉽게 만족할 수 있음을 보였다.

참고 문헌

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operations of robots by learning," Journal of Robotic Systems vol. 1, No. 2, pp. 123--140, 1984.
- [2] H.-S. Ahn, C.-H. Choi, and K.-B. Kim, "Iterative learning control for a class of nonlinear systems," Automatica, vol. 29, no. 6, pp. 1575--1578, Nov. 1993.
- [3] J. Ghosh and B. Paden, "A pseudoinverse-based iterative learning control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 47, no. 5, pp. 831--837, June, 2002.
- [4] C. H. Choi and G. M. Jeong, "Perfect tracking of nonlinear maximum phase systems by iterative learning control", Int. J. of System Science, vol. 32, no. 9, pp. 1177-1183, Sept, 2001.
- [5] G.-M. Jeong, C.-H. Choi, "Iterative learning control for linear discrete time nonminimum phase systems," Automatica, vol. 38, no. 2, pp. 287-291, Feb, 2002.
- [6] G. M. Jeong and C. H. Choi, "Iterative learning control with advanced output data," Asian Journal of Control, vol. 4, no. 1, pp. 30-37, March, 2002.
- [7] G. M. Jeong, C. H. Choi, "Iterative learning control with advanced output data for nonminimum phase systems," Proc. ACC. pp.890-895, June 2001