

Heavy-tailed 잡음에 노출된 이미지에서의 비선형 잡음제거 알고리즘

Nonlinear Image Denoising Algorithm in the Presence of Heavy-Tailed Noise

한 회 일
Hee-il Hahn

Abstract - The statistics for the neighbor differences between the particular pixels and their neighbors are introduced. They are incorporated into the filter to remove additive Gaussian noise contaminating images. The derived denoising method corresponds to the maximum likelihood estimator for the heavy-tailed Gaussian distribution. The error norm corresponding to our estimator from the robust statistics is equivalent to Huber's minimax norm. Our estimator is also optimal in the respect of maximizing the efficacy under the above noise environment.

Key Words : image denoising, robust statistics, 비선형 필터, maximum likelihood estimation

1. 장 서 론

디지털 카메라 등의 이미징 장비로 이미지를 캡처하는 과정에서 센서 등과 같은 장비로 인해서 뿐만 아니라 대기환경 등의 원인으로 영상에 원치 않는 잡음이 첨가될 수 있는데 이러한 잡음은 가우시안 분포를 갖는 것으로 모델링할 수 있다. 또한, 이러한 영상이 통신 장비를 통하여 전송될 경우에는 전송 오류로 인하여 특정 픽셀의 값이 크게 손상되는데, 이러한 잡음을 salt-and-pepper 임펄스 잡음이라고 부른다. 이미지에 잡음이 첨가된 경우에 이를 제거하기 위한 연구는 오래전부터 수많은 연구가 진행되고 발표되고 있으며 앞으로도 끊임없는 연구가 필요한 고전적인 분야에 속한다. 이미지에 가우시안 랜덤 잡음이 첨가되었을 때 mean-square error를 최소화하는 기준에서 최적의 필터는 3장에서 설명한 바와 같이 평균필터로 유도될 수 있다. 하지만, 이러한 선형필터는 이미지 내에 있는 에지나 디테일 성분을 블러링시켜 이미지의 선명도를 열화시키는 한계를 드러내고 있다[4][7]. 이를 해결하기 위해 다양한 비선형 필터가 제안되고 있는데, 이 중에서 가장 대표적인 필터가 메디안 필터이다. 메디안 필터는 구조가 간단하고 임펄스 잡음을 효과적으로 제거하는 성능을 보여주고 있어 한때 널리 사용되었지만 잡음레벨이 증가함에 따라 디테일과 에지성분을 열화시키므로 이를 보완하기 위해 메디안 필터의 구조를 변형시킨 스택 필터, 멀티스테이지 메디안, 가중 메디안 등의 새로운 메디안 필터가 제안되기도 하였다. 가우시안 잡음과 임펄스 잡음이 혼재하여 화질이 열화되면 이미지의 디테일 부분을

구별하기가 용이하지 않아 이미지 세그멘테이션이나 에지검출 등을 정확하게 처리하기가 어려워진다. 이로 인해 영상 이해, 컴퓨터 비전 등을 수행하는데 성능이 크게 저하되는 문제가 발생한다. 일반적으로 이미지의 밝기값은 공간적으로 코히어런트하다는 가정 하에 잡음은 이러한 가정에서 벗어난 현상으로 볼 수 있다. 이와 같은 잡음을 통계적인 관점에서 outlier로 간주함으로써 robust statistics 이론을 이용하여 잡음을 제거하는 모델을 유도할 수 있다[1][5][6].

2. 장 잡음 모델

디지털 카메라 이미지를 표현하는데 있어서 I_i 를 이미지 I 의 $i \in \mathbb{Z}^2$ 좌표에서의 밝기값이라고 표현하면 잡음이 첨가된 이미지 X 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_i = I_i + N_i$$

여기서 N_i 는 평균이 0인 백색 가우시안 잡음이고 I_i 와 uncorrelated 하다고 가정한다. 두개의 인접 픽셀 간의 밝기차의 $X_p - X_s$ 통계적 특성을 알아보기로 하자. X_p 와 X_s 가 동일한 영역에 속해 있으면 이에 해당되는 I_p 와 I_s 사이의 차는 매우 작은 값을 갖게 되므로 그 차이를 무시한다면 $X_p - X_s$ 는 $N_p - N_s$ 와 유사한 통계적 특성인 가우시안 분포를 갖는다고 볼 수 있다. 반면, 영역들 사이의 경계를 포함하고 있는 위치에서는 $I_p - I_s$ 가 상당히 큰 값을 가질 확률이 비교적 높으므로 $X_p - X_s$ 는 $N_p - N_s$ 와는 다른 확률 분포를 갖게 될 것이다. 즉, $X_p - X_s$ 가 작으면 가우시안 분포와 유사한 형태이지만 그 값이 증가함에 따라 가우시안 분포 보다는 확률값이 큰 (heavy tailed density function) 확률분포를 갖

저자 소개

* 한회일 : 韓國外國語大學校 情報通信工學科 教授 · 工博

게 될 것으로 예상할 수 있다. 이에 따라 본 논문에서는 $X_p - X_s$ 의 확률분포함수를 $(-k, k)$ 구간에서는 가우시안이지만 그 밖의 영역에서는 라플라시안과 유사한 함수로 다음과 같이 가정하였다.

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{-ax^2/2} e^{-a|x-k|}, & x > k \\ Ce^{-ax^2/2}, & -k \leq x \leq k \\ Ce^{-ax^2/2} e^{-a|x+k|}, & x < -k \end{cases} \quad (1)$$

그 외 식에서 a 는 잡음의 분산과 관련되어 있고 C 는 식 (1)을 적분하였을 때 그 값이 1이 되도록 하는 값이다. 그리고 k 는 outlier의 양에 따라 결정된다.

3. 장 제한한 알고리즘

파라미터 a 에 관한 maximum likelihood estimator (MLE)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{a} = \arg \left\{ \max_a p(x/a) \right\}$$

즉, MLE는 측정값에 대한 조건부 확률을 최대화하는 a 의 값이다. 미지의 파라미터 a 가 포함된 영역 내에서 최대값이 존재하기 위해서 MLE가 만족하여야 하는 필요조건은

$$\left[\frac{\partial p(x/a)}{\partial a} \right]_{a=\hat{a}} = 0 \quad \text{이고,}$$

\hat{a} 는 a 의 MLE이다. 그런데, $\ln p_{x/a}(x/a)$ 가 일차 미분 가능하면 위 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left[\frac{\partial \ln p(x/a)}{\partial a} \right]_{a=\hat{a}} = 0$$

여기서 $\ln p_{x/a}(x/a)$ 를 maximum likelihood equation(mle)이라고 부른다. 예를 들어, 분산은 알고 있지만 미지의 평균값을 갖는 랜덤 변수가 가우시안 분포를 갖는다고 가정한다. 이러한 랜덤 변수에서 구한 M 개의 측정값을 이용하여 이 랜덤 변수의 평균을 MLE로 추정하는 문제를 상정한다. 이 때, 각 측정값에 해당하는 확률분포는

$$f(x/\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad \text{이고}$$

M 개의 독립된 측정값에 대한 확률분포는

$$p(\underline{x}/\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} (\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2/\sigma^2} \quad \text{이다.}$$

mle는 다음과 같이 이 식에 자연로그를 취함으로써 구할 수 있다.

$$\ln p(x/\mu) = -\frac{M}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2/\sigma^2$$

따라서, μ 에 대한 MLE는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \ln p(x/\mu)}{\partial \mu} = 0 = \left[0 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^M 2(x_i - \mu)(-1) \right]_{\mu=\hat{\mu}}$$

$$\text{즉, } \hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i = \arg \min_{\mu} \sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2 \quad (2)$$

이다.

이는 위에서 설명한 가우시안 잡음 환경에 노출되어 있는 신호를 추정하기 위한 MLE는 결국 평균 필터이고 mean-square-error의 관점에서 최적의 필터로 해석할 수 있다. 동일한 방법으로, 측정값의 확률분포가 가우시안이 아니라 라플라시안 분포를 갖게 되면 각 측정값에 대한 확률분포는

$$f_L(x/\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-\mu|} \quad \text{이고,}$$

M 개의 독립된 측정값에 대한 확률분포는

$$p_L(x/\mu) = \frac{1}{(2)^{M/2} \sigma^M} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^M |x_i - \mu|} \quad \text{이다.}$$

이에 해당하는 mle와 μ 에 대한 MLE는 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ln p_L(x/\mu) = -\frac{M}{2} \ln(2\sigma^2) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^M |x_i - \mu|$$

이 식을 최소화시키는 MLE $\hat{\mu}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \sum_{i=1}^M |x_i - \mu| \quad (3)$$

이 MLE는 측정값들을 크기 순으로 정렬한 다음 중간 크기의 측정값을 선택하는 매디안 필터와 동일하다는 사실을 알 수 있다. 따라서, 위의 식(2)와 식(3)을 결합하면 위에서 제시한 잡음 환경 하에서의 MLE는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \left\{ \sum_{|x_i| \leq k} (x_i - \mu)^2 + \sum_{|x_i| > k} |x_i - \mu| \right\} \quad (4)$$

즉, 식 (1)에 주어진 확률분포함수의 경계점에 해당하는 k 보다 작은 값들에 대해서는 평균을 취하지만 k 보다 큰 값들은 일정한 값으로 대체함으로써 MLE를 구할 수 있다. 이를 수식으로 표현하면, 상기와 같은 잡음환경 하에서 M 개의 독립된 측정값을 이용하여 원하는 신호를 추정하기 위한 필터는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I_M(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M g(x_i) \quad (5)$$

이 추정기의 efficacy는 다음과 같이 구할 수 있는데,

$$\xi = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g'(y) f(y) dy \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(y) f(y) dy}$$

이 식에서 $f(x)$ 는 식(1)에 주어진 바와 같이 각 측정값 x_i 에 대한 확률분포를 의미한다.

즉, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 일 때, efficacy ξ 는 최대값을 갖게 되므로 efficacy를 최대로 하는 함수 $g(\cdot)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$g(x) = \begin{cases} ak, x \geq k \\ ax, -k \leq x < k \\ -ak, x < -k \end{cases} \quad (6)$$

이와 같이, 식(6)에 제시한 바와 같은 amplifier-limiter는 식(1)에서 정의한 잡음 환경 하에서 efficacy의 관점에서 최적의 필터가 된다. 이를 robust statistics의 관점에서 살펴보면 식(6)에 해당하는 error norm은 다음과 같이 구할 수 있는데, 이는 Huber의 minimax norm과 일치한다.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{2}, & |x| \leq k \\ ak|x| - \frac{ak^2}{2}, & |x| > k \end{cases} \quad (7)$$

제한한 알고리즘을 적용하기 위해서는 식(6)에 제시한 필터에서 변수 a 와 k 를 구하여야 하는데 이들은 입력된 이미지의 통계적 특성에 따라 결정된다. k 는 outlier의 양에 반비례하게 되고 a 는 잡음의 분산과 관련 있는데 a 가 잡음의 표준편차와 같게 되면 이미지의 고주파 성분에 의한 outlier가 거의 존재하지 않는다고 볼 수 있다. 본 논문에서는 실험

적으로 $a = \frac{1}{0.8\sigma}$, $k = \sigma$ 으로 정하였다. 잡음을 제거하기 위하여 제안한 알고리즘을 반복적으로 적용하게 되는데, 반복할 때 마다 최소차에 대한 통계적 특성을 분석하여 변수 a 와 k 를 결정하였다. 현재와 그 다음 반복 적용 간의 오차가 적으면 알고리즘의 적용을 멈춘다. 여기서 edge stopping 함수를 다음과 같이 정하면 제안한 알고리즘은 Perona-Malik의 비균일 확산방정식으로 모델링될 수 있다[2][3].

$$g(x) = \frac{\rho'(x)}{x} = \begin{cases} a, & |x| \leq k \\ ak \frac{\text{sgn}(x)}{x}, & |x| > k \end{cases} \quad (8)$$

4. 장 결론

본 논문에서는 제안한 알고리즘과 Perona-Malik의 비균일 확산방정식으로 적용한 결과에 대하여 PSNR(peak signal-to-noise ratio)을 이용하여 성능을 분석하였고 실험결과를 그림 1에 제시하였다. 256×256 크기의 Lena 이미지에 대하여 $PSNR = 18.5dB$ 인 가우시안 잡음을 첨가한 후에 제안한 알고리즘을 적용하면 $PSNR = 26.8dB$ 를 얻을 수 있었다. 제안한 알고리즘은 Perona-Malik 확산 방정식에 비해 객관적인 성능 차이 뿐만 아니라 예제 부분에서의 선명도 등에서도 보다 더 우수한 결과를 보여주고 있다.

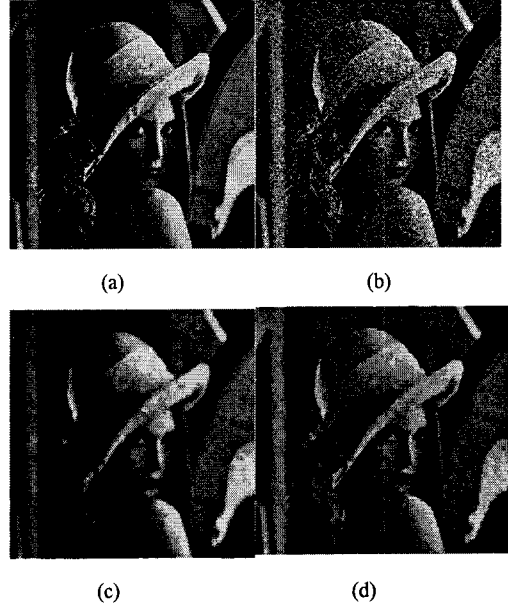


그림 1. (a) 원 이미지. (b) $\sigma_n^2 = 924$ 인 가우시안 잡음을 첨가한 입력 이미지. (c) Perona Malik 확산방정식을 적용한 결과 이미지. (d) 제안한 알고리즘을 적용하여 구한 결과 이미지

참고 문헌

- [1] T. Rabie, "Robust Estimation Approach for Blind Denoising", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 14, No. 11, Nov., 2005.
- [2] M. J. Black, G. Sapiro, D. H. Marimont, "Robust Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 7, No. 3, Mar., 1998.
- [3] P. Perona and J. Malik, "Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. PAMI*, vol. 12, No. 7, Jul., 1990..
- [4] A. B. Hamza, H. Krim, G. B. Unal, "Unifying Probabilistic and Variational Estimation," pp.37-47, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.19, No.5, Sep. 2002.
- [5] A. B. Hamza and H. Krim, "Image Denoising: A Nonlinear Robust Statistical Approach," pp.3045-3054, *IEEE Trans.Signal Process.*, vol.49, No.12, Dec. 2001.
- [6] P. Huber, *Robust Statistics*. New York: Wily, 1981.
- [7] C. Tomasi and R. Manduchi, "Bilateral filtering for gray and color images," in *Proc. IEEE Int. Conf. Computer Vision*, 1998, pp. 839-846.