백스테핑을 이용한 카오스 Liu 시스템의 제어

Control and Tracking Chaotic Liu Systems via Backstepping Design

유성훈* Yoo, Sung Hoon　　현창호** Hyun, ChangHo　　박민용*** Park, Mignon

Abstract – This paper present backstepping control approach for controling chaotic Liu system. The Proposed method is a systematic design approach and consists in a recursive procedure that interlaces the choice of a Lyapunov Function. Based on Lyapunov stability theory, control laws are derived. We used the same technique to enable stabilization of chaotic motion to a steady state as well as tracking of any desired trajectory to be achieved in a systematic way. Numerical solution are shown to veryfy the result.

Key Words : backstepping : chaotic system : Liu system : Lyapunov

1장. 서론

Ott, Grebogi and Yorke (OGY)[1]에 의한 선구적인 업적으로 인해 물리학이나 수학 그리고 공학 등의 분야에서 카오스 시스템 (Chaotic System)을 제어하는 연구에 대한 관심이 최근 들어 증가하고 있다. 지난 십여 년간 이 카오스 시스템의 제어, 안정화 그리고 동기화를 달성하기 위해 여러 가지 많은 기술과 방법들이 [2-14] 제시되어 왔다. 이 방법들 중에는 power electronics, laser, electromagnetic compatibility (EMC)와 같은 실험적인 시스템에 성공적으로 응용되어 졌기에 카오스를 제어하는 것과 동기화 매우 중요한 주제가 되었다.

최근들어 백스테핑 설계 (backstepping design) [8-10]가 카오스를 제어하는데 강력한 설계 방법으로 인정 되고 있다. 백스테핑 설계는 strict-feedback 비선형 시스템의 광역 안정성 (global stability) 을 보장 할 수 있고, 추적 할 수 있다 [15, 16].

따라서 본 논문은 백스테핑 방법을 이용하여 Lui 혼돈 시스템을 제어하고 트래킹하는 것을 목적으로 삼을 것이다.

2004년에, Chongxin Liu는 새로운 혼돈 다이나믹 시스템을 찾아내었다. [17] 그 시스템은 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x), \\ \dot{y} = bx - kxz, \\ \dot{z} = -cx + hx^2 \end{cases} \tag{1}$$

$a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4,$ 에 대해 이 시스템은 chaotic attractor를 가지게 된다 [6,12].

저자 소개
* 유성훈 : 延世大學 電氣電子工學科 碩士課程
** 현창호 : 延世大學 電氣電子工學科 博士課程
*** 박민용 : 延世大學 電氣電子工學科 敎授 工博

본 논문에서는 백스테핑 기법을 이용하여 Liu 시스템을 제어하는 제어기를 제시할 것이다. 제시된 접근 방법은 체계적인 설계 접근 방법이고 리아프노프 함수를 선택하기 위한 재귀적인 과정으로 구성되어 있다. 그리고 이 제어 과정은 또한 원하는 궤적으로 추적 하는데 이용되어질 수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 Liu 시스템의 백스테핑 제어를 소개할 것이다. 그리고 3장에서는 원하는 궤적으로 추적하기 위한 control law를 결정할 것이다. 4장에서는 컴퓨터 모의 실험 결과를 보여줄 것이다. 그리고 마지막 5장은 결론으로 구성된다.

2장. Liu 시스템 제어

앞서 소개했던 것과 같이 Liu 시스템은 다음과 같이 표현이 된다.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x), \\ \dot{y} = bx - kxz, \\ \dot{z} = -cx + hx^2 \end{cases} \tag{1}$$

$a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4,$ 일 때 이 시스템은 chaotic attractor를 가진다. 이제 백스테핑 방법을 이용하여 제어기를 설계해 보도록 하겠다. Liu 시스템을 제어하기 위해 시스템 (1)의 세 번째 식에 제어입력 u_1을 넣는다. 입력이 추가된 Liu 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x), \\ \dot{y} = bx - kxz, \\ \dot{z} = -cx + hx^2 + u_1 \end{cases} \tag{2}$$

본 과정의 목적은 bounded point에서 시스템 (2)의 state들을 안정화 시키는 control law u_1을 찾는 것이다.

Step 1. 첫 번째 등식에서부터 시작을 하면 가상제어 (virtual control) y를 위한 안정화 함수 (stabilizing function)

$\alpha_1(x)$는 Lyapunov함수 $V(x)=\frac{x^2}{2}$를 미분한 식,

$\dot{V}_1(x)=-ax^2+axy$를 음한정(negative definite)하게 만드는 값으로 정하면 된다. $\alpha_1(x)=px$로 가정하고 오차 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{y}=y-\alpha_1(x) \tag{3}$$

위 식에 의해서 새로운 $(x,\bar{y})$-subsystem을 얻게 된다.

$$\begin{cases}\dot{x}=a\bar{y}-a(1-p)x,\\ \dot{\bar{y}}=bx-kxz-ap\bar{y}+ap(1-p)x,\end{cases} \tag{4}$$

Step 2. $(x,\bar{y})$-subsystem (4)를 안정화시키기 위해 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정할 수 있다.

$$V_2(x,\bar{y})=V_1(x)+\frac{1}{2}\bar{y}^2.$$

시스템 (4)에 따라 $V_2(x,\bar{y})$의 시간에 대하여 미분하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_2=-a(1-p)x^2-ap\bar{y}^2 \\ -x\bar{y}[kz-a-b-ap(1-p)]$$

위 식에서,

$$z=\alpha_2(x,\bar{y})=\frac{1}{k}[a+b+ap(1-p)]$$

로 정하고, 만약 $0\le p<1$ 값을 가지게 되면 $\dot{V}_2$는 반드시 음한정 하게 된다.

앞의 과정과 유사하게 $\bar{z}$를 정의 한다.

$$\bar{z}=z-\alpha_2(x,\bar{y}) \tag{5}$$

위 식에 의해 새로운 $(x,\bar{y},\bar{z})$-subsystem을 얻게 된다.

$$\begin{cases}\dot{x}=a\bar{y}-a(1-p)x,\\ \dot{\bar{y}}=bx-kxz-ap\bar{y}+ap(1-p)x,\\ \dot{\bar{z}}=hx^2-c\bar{z}-\frac{c}{k}[a+b+ap(1-p)]+u_1\end{cases} \tag{6}$$

Step 3. $(x,\bar{y},\bar{z})$-subsystem (6)을 안정화시키기 위해 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정할 수 있다.

$$V_3(x,\bar{y},\bar{z})=V_2(x,\bar{y})+\frac{1}{2}\bar{z}^2.$$

시스템 (6)에 따라 $V_3(x,\bar{y},\bar{z})$의 시간에 대하여 미분하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_3=-a(1-p)x^2-ap\bar{y}^2-c\bar{z}^2 \\ +\bar{z}[hx^2-kx\bar{y}-\frac{c}{k}(a+b+ap(1-p))+u_1]$$

위 식에서,

$$u_1=\frac{c}{k}[a+b+ap(1-p)]+kxy+(h+pk)x^2 \tag{7}$$

로 정하면 $\dot{V}_3$는 반드시 음한정 하게 된다.

따라서 시스템 (6)은 원점 (0,0,0)에서 안정화됨을 볼 수 있다. 그리고 (3)과 (5)에 의해서 시스템 (2)는 점$(0,0,\alpha_2)$에서 안정화 된다.

주어진 Liu 시스템을 원점 $(0,0,0)$에서 제어하기 위해 제어 입력 u_2를 시스템 (1)의 두 번째 등식에 넣는다. 시스템은 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x),\\ \dot{y}=bx-kxz+u_2,\\ \dot{z}=-cx+hx^2\end{cases} \tag{8}$$

Step 1. 첫 번째 등식에서부터 시작을 하면 가상제어 (virtual control) y를 위한 안정화 함수 (stabilizing function) $\alpha_1(x)$는 Lyapunov함수 $V(x)=\frac{x^2}{2}$를 미분한 식,

$\dot{V}_1(x)=-ax^2+axy$를 음한정(negative definite)하게 만드는 값으로 정하면 된다. $\alpha_1(x)=0$로 정하고 오차 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{y}=y-\alpha_1(x) \tag{9}$$

위 식에 의해서 새로운 $(x,\bar{y})$-subsystem을 얻게 된다.

$$\begin{cases}\dot{x}=a\bar{y}-ax,\\ \dot{\bar{y}}=bx-kxz+u,\end{cases} \tag{10}$$

Step 2. $(x,\bar{y})$-subsystem (4)를 안정화시키기 위해 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정할 수 있다.

$$V_2(x,\bar{y})=V_1(x)+\frac{1}{2}\bar{y}^2.$$

시스템 (10)에 따라 $V_2(x,\bar{y})$의 시간에 대하여 미분하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_2=-ax^2+(ax+bx-kxz+u_2)\bar{y} \tag{11}$$

다음과 같이 입력을 정하게 되면 식 (11)이 음한정하게 된다.

$$u_2=[kz-(a+b)]x \tag{12}$$

따라서 시스템 (10)은 원점 $(0,0)$에서 asymptotically stable하게 된다. 제어 입력 $u_2=[kz-(a+b)]x$로 정하였을 때, 식 (9), $\alpha_1(x)=0, x\to 0, y\to 0$, 그리고 시스템 (8)의 세 번째 등식에 의해 시스템 (8)은 원점$(0,0,0)$에서 안정화 된다.

3장. 원하는 궤적으로 추적

이번 장에서는 Liu 시스템의 스칼라 출력 $x(t)$이 어떠한 원하는 궤적 $x_r(t)$를 추적할 수 있게 하는 control law u_2를 찾도록 하겠다. $\bar{x}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{x}=x-x_r$$

Lyapunov 함수를 $V_1=\frac{\bar{x}^2}{2}$를 미분하면 시스템 (8)에 의해서 다음과 같이 된다.

$$\dot{V}_1=\bar{x}\dot{\bar{x}}=-a\bar{x}^2+\bar{x}(ay-ax_r-\dot{x}_r)$$

가상 제어 y를 다음과 같이 정하면 위 식은 음한정이 된다.

$$y=\frac{ax_r+\dot{x}_r}{a}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{\overline{y}^2}{2}$$ 에서 $\overline{y} = y - \frac{ax_r + \dot{x}_r}{a}$ 일 때 이 함수를 미분하면,

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \overline{y}\dot{\overline{y}}$$

$$= -a\overline{x}^2 + \overline{y}[(a+b-kz)\overline{x} + (b-kz)x_r + u_2 - \frac{a\dot{x}_r + \ddot{x}_r}{a}]$$

control law u_2를 다음과 같이 정하게 되면 위의 식은 음한 정하게 된다.

$$u_2 = -a\overline{x} + (kz-b)(\overline{x} + x_r) + \frac{a\dot{x}_r + \ddot{x}_r}{a} \qquad (13)$$

4장. 컴퓨터 시뮬레이션

이번 장에서는 MATLAB을 이용해 설계된 시스템을 시뮬레이션 해보도록 하겠다. Liu 시스템이 제어 입력이 없을 경우 카오스 특성을 나타내도록 하기 위해 파라미터들을 다음과 같이 정하였다. $a = 10$, $b = 40$, $k = 1$, $c = 2.5$, $h = 4$

시스템 (2)와 (8)의 초기 상태는 다음과 같다.

$x(0) = 10, y(0) = -10, z(0) = 10$ 그리고 p=0.1

각각의 입력은 t=20일 때 주어졌다.

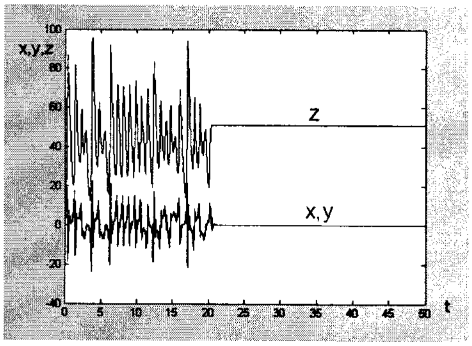

그림 1. 시스템 (2)의 x,y,z응답. 제어입력은 식(7)

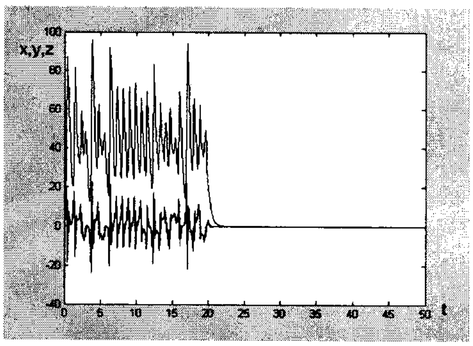

그림 2. 시스템 (8)의 x,y,z응답. 제어입력은 식(12)

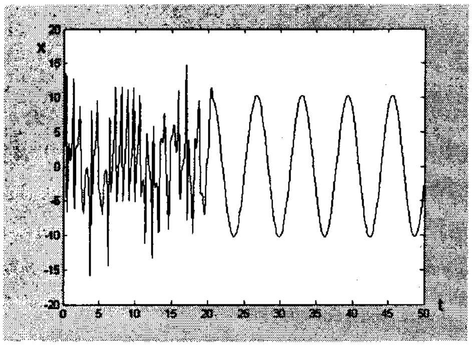

그림 3. $x_r(t) = 10\sin t$, Liu 시스템의 추적. 제어 입력은 식(13)

5장. 결론

본 논문에서 Liu 카오스 시스템을 효과적으로 제어하기 위해 백스테핑 기법을 사용하였다. 제안된 제어 시스템을 통하여 chaotic motion의 안정성을 보장함을 보였다. 그리고 어떠한 원하는 궤적을 추적할 수 있음을 보였다. 본 논문에서 제안된 방법의 장점은 다음과 같다. (i) 이 방법은 제어기의 특이성 문제를 정방형의 비선형 항으로부터 극복할 수 있다 [9,10]. (ii) 이 방법은 카오스 제어, 동기화 그리고 폐루프 시스템의 광역 안정성에 대하여 조직적인 설계가 가능하다. (iii) 이 방법은 다른 높은 차수의 chaotic system에 확장이 쉽도록 control law를 유연하게 설계할 수 있다.

참고문헌

[1] E.Ott, C.Grebogi, J.A.Yorke, Phys. Rev. Lett.64 (1990) 1196.
[2] G.Chen, X.Dong, IEEE Trans. Circuit Systems40(1993) 591.
[3] M.T. Yassen, Chaos Solitons Fractals 15 (2003) 271.
[4] M.T. Yassen, Chaos Solitons Fractals 26 (2005) 913.
[5] E.N. Sanchez, J.P. Perez, M. Martinez, G. Chen, Latin Am. Appl. Res.:Int. J. 32 (2002) 111.
[6] M.T. Yassen, Phys. Lett. A 350 (2006) 36.
[7] T.-L. Liao, S.-H. Lin, J. Franklin Inst. 336 (1999) 925.
[8] M.T. Yassen, Chaos Solitons Fractals 27 (2006) 537.
[9] J. Lü, S. Zhang, Phys. Lett. A 286 (2001) 148.
[10] Y. Yu, S. Zhang, Chaos Solitons Fractals 15 (2003) 897.
[11] H. Zhang, X.K. Ma, B.L. Xue, Chaos Solitons Fractals 21 (2004) 1249.
[12] M.T. Yassen, Chaos Solitons Fractals 23 (2005) 131.
[13] M.-C. Ho, Y.-C. Hung, Phys. Lett. A 301 (2002) 424.
[14] E.W. Bai, K.E. Lonngren, Chaos Solitons Fractals 11 (2000) 1041.
[15] Kokotovic PV. IEEE Control Syst Mag 1992;6:7 - 17.
[16] Krstic M, et al. Nonlinear and adaptive control design. New York: Wiley; 1995.
[17] C. Liu, T. Liu, L. Liu, K. Liu, Chaos Solitons Fractals 22 (2004) 1031.