

T-S fuzzy 모델을 이용한 비선형 시스템의 tracking 제어에 관한 연구

(A study on tracking control for nonlinear systems using T-S fuzzy model)

손 명 공*, 성 동 한*, 손 천 돈*, 정 은 태**, 권 성 하**

Myung-Gong Shon, DongHan Seong, Cheon Don Son, Eun Tae Jeung, Sung-Ha Kwon

Abstract - This paper deals with a tracking problem for nonlinear systems using its T-S fuzzy model and internal model. We extend the internal model of linear systems to an internal model of T-S fuzzy systems to accompany with state error of zero. A sufficient condition of the existence of a tracking controller for T-S fuzzy systems is expressed by linear matrix inequalities. A system of inverted pendulum on cart is illustrated to verify our method.

Key Words : nonlinear system, T-S fuzzy model, tracking control, internal model, LMI

1. 서론

후진부에 선형 시스템을 가지는 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 시스템^[1]에 대한 안정성 해석과 체계적인 제어기 설계에 관한 연구가 많은 관심을 받고 있다. T-S 퍼지 모델을 이용한 tracking 제어도 중요한 연구 분야의 하나이다. T-S 퍼지 모델은 전진부의 비선형 시스템을 정확하게 등가인 선형 시스템으로 표현할 수 있다. 등가인 선형 시스템으로 표현된 모델에 내부 모델 설계기법을 적용하여 tracking 문제에 대한 또 다른 해법을 본 논문에서는 제시한다. 논문의 구성은 전체 5장으로 구성되어 있다. 2장은 T-S 퍼지 모델에 대해 다룬다. 3장은 T-S 퍼지 모델의 각 규칙에 이미 잘 알려져 있는 선형 시스템의 tracking 제어방법의 하나인 내부 모델 설계 기법^[3]을 적용하여 T-S 등가 모델의 tracking 제어기를 설계한다. 이때 제어기 설계는 선형행렬부등식^[4]을 이용하여 제어기를 설계한다. 그리고 소속 함수의 정도에 따라 각 규칙에 대한 제어기를 적용하여 전체 비선형 시스템의 tracking 문제를 해결하는 방법에 대해 다룬다. 4장에서는 대표적인 비선형 모델인 역진자 시스템을 예제로 다룬다. 마지막으로 5장에서는 본 논문의 결론을 맺는다.

2. T-S 퍼지 모델

일반적으로, T-S 퍼지 모델은 i 번째 퍼지 규칙에 대해

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \\ \text{and } z_p(t) \text{ is } M_{ip}$$

$$\text{THEN } \dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (1) \\ i = 1, 2, \dots, r$$

와 같이 표현하고, 여기서 M_{ij} 는 퍼지 집합이고, r 은 퍼지 규칙의 수이다. $x(t) \in R^n$ 는 상태 벡터, $u(t) \in R$ 는 입력 벡터이고, A_i, B_i 는 적절한 차원을 가지는 상수 행렬이다. 그리고 $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$ 는 측정 가능한 전진부의 변수이고, 이 변수들은 상태, 외란, 혹은 시간의 함수일 수 있다.

주어진 $[x(t), u(t), z(t)]$ 로부터, 무게 중심법(the center of gravity)의 비퍼지화(defuzzification)를 이용하여 추론된 T-S 퍼지 시스템의 최종적인 상태는

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2)$$

이고, 여기서

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) \quad (3)$$

이고, $M_{ij}(z_j(t))$ 는 $z_j(t)$ 가 M_{ij} 에 속하는 소속 등급을 의미한다. 그리고 모든 t 에 대하여

$$w_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \quad (4)$$

을 만족한다고 가정하면, 모든 t 에 대하여

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

저자 소개

* 창원대학교 제어계측공학과 석사과정

** 창원대학교 제어계측공학과 교수

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (5)$$

이다.

3. Tracking 제어

이 장에서는 T-S 퍼지 모델에 내부 모델 설계 기법^[3]을 도입하여서 tracking 문제를 해결하는 방법을 그림 1에서 처럼 제시한다. 그림 1에서 보면, error 신호 \dot{x}_a 는 다음과 같다.

$$\dot{x}_a = r - y, \quad x_a = \int_0^t \dot{x}_a d\tau \quad (6)$$

그리고 본 논문에서 제시하는 제어 입력은 내부모델설계기법을 적용하면

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i F_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i K_i \int_0^t \dot{x}_a d\tau \quad (7)$$

이다. 여기서 \dot{x}_a 는 error 신호, y 는 출력신호, $u(t)$ 는 제어 입력 신호이다. 제어 입력 $u(t)$ 를 T-S 퍼지 모델에 적용하면

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i F_j x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i K_j x_a(t) \end{aligned} \quad (8)$$

이고, (8)을 상태 방정식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} A_i + B_i F_j & B_i K_j \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (9)$$

이다. (9)에서

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i F_j & B_i K_j \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

라 두면 (9)는

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j G_{ij} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (11)$$

이 되고,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^r h_i h_i G_{ii} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i h_j \left[\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (12)$$

와 동가이다. 이미 잘 알려진 퍼지 제어기의 안정도 조건을 이용하면

$$\begin{aligned} P > 0 \\ G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (13)$$

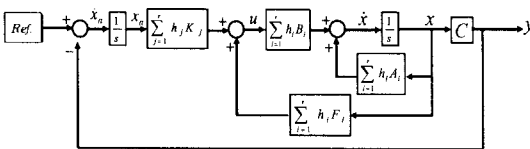


그림 1. 전체 시스템 Block Diagram

$$\left[\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right]^T P + P \left[\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right] < 0 \quad (14)$$

$$i < j, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

이다. (13)은 미지수 F_j 와 K_j 가 미지수 P 와의 곱으로 이루어져 있으며, 이는 선형행렬부등식을 이용하여 풀 수 없다.

(13)에 $X = P^{-1}$ 를 좌우에 곱하고 G_{ii} 를 다음과 같이 놓으면

$$G_{ii} = \begin{bmatrix} A_i + B_i F_i & B_i K_i \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_i & B_i K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

그러면 (13)을 다시 표현하면

$$\begin{aligned} X \left\{ \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_i & B_i K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^T \\ + \left\{ \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_i & B_i K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} X < 0 \\ i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (16)$$

이다. (14) 또한 $X = P^{-1}$ 를 좌우에 곱하고 G_{ij} 를 다음과 같이 할 수 있고,

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i F_j & B_i K_j \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_j & B_i K_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$i < j, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

이다. G_{ji} 또한 동일한 형태로 변환 가능하고, (14)는

$$\begin{aligned} X \left\{ \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_j & B_i K_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^T \\ + \left\{ \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i F_j & B_i K_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} X \\ + X \left\{ \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ -C_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_j F_i & B_j K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^T \\ + \left\{ \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ -C_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_j F_i & B_j K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} X < 0 \\ i < j, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (18)$$

이다. (16)과 (18)에서는 미지수의 곱으로 되어있어 선형행렬부등식으로 해결할 수 없다. 본 논문에서는 (16)과 (18)을 선형행렬부등식을 이용하여 X 와 $F_i, K_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 를 구하기 위해

$$[F_i \quad K_i] X = N_i, \quad [F_j \quad K_j] X = N_j \quad (19)$$

라 한다. 그러면 미지수 X 와 N_j 에 대한 선형행렬부등식이라 할 수 있다. 이는 MATLAB의 LMI toolbox를 이용하여 공통의 X 와 N 을 구함으로써 시스템 (9)을 안정화 시킬 수 있다. 제어기 F_j 와 K_j 는 선형행렬부등식을 통한 해 X 와 N_j 로부터

$$[F_j \quad K_j] = N_j X^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (20)$$

가 된다. 비선형 시스템의 tracking 제어는 설계된 제어기 F 와 K 를 T-S 등가 모델인 (8)에 적용해 봄으로써 성능을 확인 할 수 있다.

4. 예제

이 장에서는 본 논문에서 제시한 비선형 시스템의 tracking 제어 방법을 검증하기 위해 대표적인 비선형 시스템인 카트 위의 역진자 시스템에 본 알고리즘을 적용한다. 카트 위의 역진자 시스템의 운동 방정식은 아래와 같다.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (19)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)} \left[(M+m)mgls \sin x_1(t) - m^2l^2 x_2^2(t) \sin x_1(t) \cos x_1(t) - f_p(M+m)x_2(t) + f_c ml x_4(t) \cos x_1(t) - ml \cos x_1(t) u(t) \right]$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{1}{(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)} \left[(J+ml^2)mlx_2^2(t) \sin x_1(t) - m^2gl^2 \sin x_1(t) \cos x_1(t) + f_p ml x_2(t) \cos x_1(t) - f_c(J+ml^2)x_4(t) + (J+ml^2)u(t) \right]$$

여기서 M 과 m 은 각각 카트와 진자의 질량, l 은 진자의 무게 중심까지의 거리, g 는 중력 가속도, J 는 진자의 관성 모멘트, f_c 와 f_p 는 각각 카트와 진자의 마찰계수이며, $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 각각 진자가 수직으로 서 있을 때를 기준으로 한 각도와 각속도, $x_3(t)$ 와 $x_4(t)$ 는 각각 카트의 변위와 속도이다. 그리고 계수 값들은 $g = 9.8[m/s^2]$, $M = 2.4[kg]$, $m = 0.23[kg]$, $l = 0.36[m]$, $J = 0.099[kgm^2]$, $f_c = 0.05[N/m/s]$, $f_p = 0.007[N/rad/s]$ 이다.

역진자 시스템은 $x_1(t) = \pm\pi/2$ 에서 제어 불가능이고, $x_1(t)$ 가 $\pm\pi/2$ 에 접근함에 따라 굉장히 큰 제어 힘을 필요로 하는 시스템이므로 진자의 각도와 각속도를 각각 $-\pi/3 \leq x_1(t) \leq \pi/3$, $-7 \leq x_2(t) \leq 7$ 로 제한하여, T-S 퍼지 모델을 구한다. T-S 퍼지 모델을 위한 선형 독립인 함수는 논문[2]에서와 같은 방법으로 4가지의 비선형 함수로 할 수 있다. 여기에서 T-S 퍼지의 물은 논문[2]에서 제시한 방법으로 16개의 규칙이 생성된다. 또한 논문[2]에 따르면, 각 규칙에 대한 후진부의 선형 시스템을 찾을 수 있다. 후진부의 선형 시스템에 대해 본 논문의 3장에서 제시한 내부 모델 설계 기법과 선형행렬부동식을 이용하여 기준 입력 신호에 대해 영의 정상상태 오차를 가지는 제어기를 설계한다. 본 논문에서는 지면의 부족으로 T-S 퍼지 모델링과 제어기 설계 과정에 대한 상세한 내용은 생략한다.

본 논문에서 예제로 든 역진자 시스템의 설계된 제어기는 역진자 시스템의 카트의 위치, $x_3(t)$ 를 tracking 할 수 있다. 시뮬레이션은 카트위의 막대가 안정된 상태에서 카트의 위치를 $1[m]$ 움직이는 것에 대한 결과이다. 그림 2는 카트의 위치가 기준입력을 따라 가기 위한 입력에 대한 결과이고, 그림 3은 이때 카트 위의 막대기의 상태를 나타낸 것이다. 그림 4는 카트의 위치에 대한 결과로써 기준 입력 신호에 대해 카트가 tracking 되는 것을 알 수 있다. 가며, 나머지 상태들 또한 안정화 되는 것을 알 수 있다.

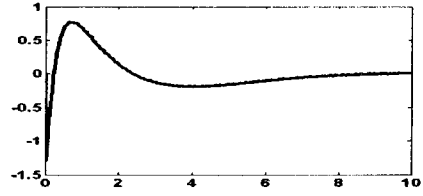


그림 2. 입력 $u(t)$

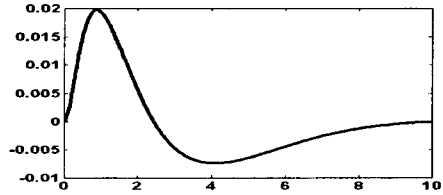


그림 3. 상태 $x_1(t)$

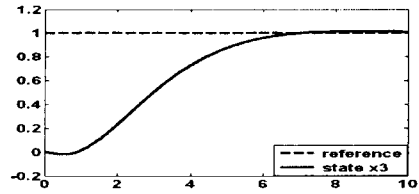


그림 4. 상태 $x_3(t)$

5. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템의 T-S 퍼지 모델과 선형 시스템의 내부 모델 설계 방법을 이용하여 비선형 시스템의 Tracking 제어에 관한 하나의 방법을 제시하였다. 비선형 시스템의 tracking 문제를 해결하기 위해 선형 등가 모델인 T-S 퍼지 모델을 만들고 이의 선형성을 이용하여 내부 모델 설계 방법을 적용하여 접근하였다. 제어기 설계는 선형행렬 부동식을 이용하여 tracking 제어기를 설계하였다. 또한 역진자 시스템을 예로 들어 tracking 제어기를 설계하고 시뮬레이션을 통해 본 논문에서 제시한 T-S 퍼지 모델을 이용한 비선형 시스템의 tracking 제어 방법을 검증하였다.

참고 문헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. Syst, Man, Cybern, Vol. 15, No.1, pp. 116-132, 1985.
- [2] 배현수, 권성하, 정은태, "T-S 퍼지 모델을 이용한 역진자 시스템의 안정화 제어기 설계", 제어 자동화 시스템공학 논문지, 11호, 제 8권, pp. 916-921, 2002. 11.
- [3] R. C. Dorf, R. H. Bishop, Modern Control Systems, Pearson Education Korea LTD.
- [4] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Toolbox, The Math Works Inc, 1996