

이산 시간지연 퍼지시스템의 안정성 해석 및 제어기 설계

A Stability Analysis and Controller Design of Discrete-time Fuzzy Systems with Time Delay

이갑래¹

¹ 경기도 평택시 용이동 평택대학교 정보통신학과
E-mail: krlee@ptu.ac.kr

요 약

본 논문은 시간지연을 갖는 이산 비선형 시스템에 대한 점근적 안정화 및 H_∞ 성능을 갖는 퍼지 제어기 설계 방법을 제안한다. 시간지연을 갖는 이산 Takagi-Sugeno 퍼지 모델에 대한 점근적 안정화 및 H_∞ 성능을 만족하는 제어기 존재조건을 선형행렬부등식으로 나타낸다. 리아프노프 함수에 조정파라미터를 도입함으로써 제어기 존재조건을 조정파라미터를 포함하는 선형행렬부등식으로 나타낸다. 선형행렬부등식에 있는 조정 파라미터를 조정함으로써 시스템의 응답속도 및 오버슈트 등의 동적 성능을 개선시킬 수 있다.

Key Words: discrete-time fuzzy systems, time-delay, H_∞ performance, adjustable parameters

1. 서 론

화학공정 및 긴 전송장치를 갖는 공압, 유압, 압연시스템 등에는 필연적으로 시간지연이 존재한다. 또한 생물학 및 다양한 공학 분야에서 실제 현상의 수학적 모델은 시간지연을 갖는 비선형 시스템으로 주로 모델링 되므로 비선형 시스템에 많은 연구들이 이루어지고 있으며, 최근에는 시간지연을 갖는 비선형시스템에 대한 퍼지 제어기 설계방법도 활발히 이루어지고 있다[1-8]. Cao 등[4]은 안정성을 만족하는 관측기 구조의 퍼지 제어기를 설계하였으며 Lee 등[5]은 안정성과 H_∞ 성능을 만족하는 출력제한 제어기를 설계하였다. Yonenamae 등[6]은 지연 종속적인 퍼지 H_∞ 제어기를 설계하였다. Tanaka 등[7-8]은 하나의 리아프노프 함수를 사용하지 않고 퍼지 리아프노프 함수를 사용하여 제어기 존재 조건을 완화할 수 있음을 보이고 있다.

본 연구에서는 시간지연을 갖는 이산 비선형 시스템에 대한 퍼지 H_∞ 제어기 설계 방법을 제안한다. 시간지연을 갖는 이산 Takagi-Sugeno 퍼지 모델에 대한 점근적 안정화 및 H_∞ 성능을 만족하는 제어기 존재조건을 제시한다. 리아프노프 함수에 조정 파라미터를 도입함으로써 개선된 안정성 조건을 선형행렬부등식(LMI: linear matrix inequality)으로 나타낸다. 선형행렬부등

식에 나타나는 조정 파라미터는 이를 조정함으로써 시스템의 응답속도 및 오버슈트 등의 동적 성능을 개선시킬 수 있다.

2. 문제 설정

퍼지 모델로 표현될 수 있는 시간지연을 갖는 이산 비선형 시스템을 고려한다. 시간지연 T-S 퍼지 모델

Plant Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_1(k) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(k) \text{ is } M_{ig} \\ \text{THEN } \dot{x}(k+1) = A_i x(k) + A_{di} x(k-\tau_1) \\ \quad + B_{ui} u(k) + B_i w(k) + B_{di} u(k-\tau_2) \\ e(k) = C_i x(k) + D_i u(k), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{aligned}$$

을 고려한다. 여기서 M_{ij} 는 퍼지 집합이고, $x(k) \in R^n$ 는 상태변수 $u(k) \in R^m$ 은 입력, $w(k) \in R^p \in L_2(0, T)$ 는 제한된 에너지를 갖는 외부외란, $e(k) \in R^q$ 는 제어할 변수, r 은 IF-THEN 규칙의 수, $z_1 \sim z_g$ 는 측정 가능한 시스템 변수, 즉 전건부 변수이며, $A_i, A_{di}, B_i, B_{ui}, C_i, D_i$ 는 공칭시스템을 나타내는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. τ_i 는

$$0 \leq \tau_i \leq \infty, \quad i=1,2 \quad (2)$$

을 만족하는 시변 시간지연이다. 퍼지시스템의 추론된 최종 출력은

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) \{A_i x(k) + A_{di} x(k - \tau_1) \\ &\quad + B_i w(k) + B_{ui} u(k) + B_{di} u(k - \tau_2)\} \\ e(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) \{C_i x(k) + D_i u(k)\} \\ x(k) &= 0, \quad k \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} w_i(z(k)) &= \prod_{j=1}^n M_{ij}(z_j(k)) \\ h_i(z(k)) &= w_i(z(k)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(k)) \\ z(k) &= [z_1(k) \ z_2(k) \ \dots \ z_n(k)]^T \end{aligned} \quad (4)$$

이며, $M_{ij}(z_j(k))$ 는 멤버쉽 함수 M_{ij} 에서 $z_j(k)$ 의 멤버쉽 등급이다. 모든 시간 k 에 대하여

$$\begin{aligned} w_i(z(k)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r w_i(z(k)) &> 0 \end{aligned} \quad (5)$$

을 가정하면

$$\begin{aligned} h_i(z(k)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 퍼지 시스템 (1)에 대한 상태제한 퍼지 H_∞ 제어기로

Control Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_1(k) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(k) \text{ is } M_{ig} \\ \text{THEN } u(k) = K_i x(k), \quad i=1,2,\dots,r \end{aligned} \quad (7)$$

을 고려한다. 여기서 K_i 는 설계되어질 제어기의 i 번째 이득행렬이다. 이러한 퍼지 제어기의 최종 출력은

$$u(k) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) K_i x(k) \quad (8)$$

이다. 퍼지 제어기 (8) 및 퍼지 시스템 (3)으로부터 폐-루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(k) &= \mathcal{A}(z)x(k) + \mathcal{A}_{d1}(z)x(k - \tau_1) \\ &\quad + \mathcal{A}_{d2}(z)x(k - \tau_2) + \mathcal{B}(z)w(k) \\ x(k) &= 0, \quad t \leq 0 \\ e(k) &= \mathcal{C}x(k) \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 여기서

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_{ui} K_j),$$

$$\mathcal{A}_{d1}(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) A_{di}, \quad (10)$$

$$\mathcal{A}_{d2}(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_{di} K_i,$$

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_i,$$

$$\mathcal{C}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (C_i + D_i K_j)$$

이다. 주어진 γ 에 대해서 H_∞ 제어 성능

$$J_\infty := \sum_{k=0}^T \|e(k)\|^2 dt \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^T \|w(k)\|^2 dt \quad (11)$$

을 고려한다. 여기서 $T > 0$, $w \in L_2[0, T]$ 이며 $\|\cdot\|$ 는 Euclidean norm 이다. 본 연구에서는 시간지연을 갖는 퍼지 시스템 (3)에 대해서 폐-루프 시스템 (9)을 안정화 할뿐만 비용함수 (11)를 만족하는 지연 종속적인 제어기 (8)의 K_i 를 설계하고자 한다.

3. 퍼지 제어기 설계

정리 1 : 시간지연을 갖는 시스템 (3)을 고려한다. 주어진 $\alpha > 0, \beta > 0$ 에 대해서 선형행렬 부등식

$$\begin{aligned} \Phi_{ii} &< 0, \quad i=1,2,\dots,r, \\ \Phi_{ij} + \Phi_{ji} &< 0, \quad i < j < r, \quad i=1,2,\dots,r \end{aligned} \quad (13)$$

을 만족하는 행렬 $Q > 0, S_1 > 0, S_2 > 0, Y_1, Y_2$ 및 상수 $\gamma > 0$ 가 존재하면, 퍼지 제어기 (8)은 점근적 안정화 및 H_∞ 제어성능 (11)를 만족하는 제어기 이다. 여기서

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} -\alpha Q & \Lambda_{12} & A_{di} & B_{di} & B_i & 0 & 0 & 0 \\ * & -\alpha Q & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{26} & \alpha Q & \alpha Q \\ * & * & \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Omega_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \alpha A_i Q + B_{ui} Y_j, \quad \Lambda_{26} = \alpha Q C_i^T + Y_j^T D_i^T \\ \Omega_1 &= -\beta^{-1} S_1^{-1}, \quad \Omega_2 = -\beta^{-1} S_2^{-1} \end{aligned}$$

이며, 또한 제어기 이득 값은

$$K_i = Y_i Q^{-1}, \quad i=1,2,\dots,r \quad (15)$$

이다.

(증명): $P > 0, S_1 > 0$ 및 $S_2 > 0$ 을 만족하는 함수

$$V(x, k) = \alpha x^T(k) P x(k) + \beta \left(\sum_{i=k-d_1}^{k-1} x(i)^T S_1 x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x(i)^T S_2 x(i) \right) \quad (16)$$

을 고려한다. 여기서 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이다.

Lyapunov 함수로부터

$$\delta_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, k) \leq \delta_2 \sup_{\theta} \|x(k+\theta)\|^2 \quad (17)$$

을 만족하는 양수 δ_1 및 δ_2 는 항상 존재한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $w(k) = 0$ 인 시스템 (9)의 모든 궤적에 대해 $\Delta V(x, k) := V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0$ 을 만족하면 Lyapunov-Krasovskii 정리로부터 시스템 (9)은 점근적으로 안정하다. (16)로부터

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) &= V(x, k+1) - V(x, k) \\ &= x^T(k+1) \alpha P x(k+1) + x^T(k) \beta S_1 x(k) \\ &\quad - x^T(k-\tau_1) \beta S_1 x(k-\tau_1) + x^T(k) \beta S_2 x(k) \\ &\quad - x^T(k-d_2) \beta S_2 x(k-d_2) - x^T(k) \alpha P x(k) \end{aligned} \quad (18)$$

이다. H_∞ 성능 (11)을 고려하기 위하여

$$J_a(k) := \Delta V(x, k) + e^T(k) e(k) - \gamma^2 w^T(k) w(k) \leq 0. \quad (19)$$

을 고려한다.

$$X^T = [x^T(t) \quad x^T(t-\tau_1) \quad K^T x^T(t-\tau_2) \quad w^T(t)]$$

로 두고, Schur 보수 및

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i h_j h_k h_l (C_{ij} x(t))^T C_{kl} x(t) \\ \leq \sum_{i=1}^r h_i h_j x^T(t) C_{ij}^T C_{ij} x(t) \end{aligned} \quad (20)$$

을 고려하여 전개한 후

$$K_i Q = Y_i \quad (21)$$

로 두면

$$\begin{aligned} J_a \leq \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) \Omega_{ii} \\ + \sum_{i \neq j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{\Omega_{ij} + \Omega_{ji}\} \end{aligned} \quad (22)$$

을 만족한다. (22)로부터 (12) 및 (13)이 만족되어지면 시스템 (9)은 점근적으로 안정하며 (19)가 만족되어진다. 초기조건 및 $V(\zeta, T) > 0$ 이기 때문에

$$\sum_{k=0}^T \|e(k)\|^2 dt \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^T \|w(k)\|^2 dt \quad (23)$$

이다. 따라서 (12)-(13)이 만족되어지면 H_∞ 성능 (11)이 만족되어짐을 알 수 있다. □

점근적 안정화 및 H_∞ 성능을 만족하는 조건식인 선형 행렬 부등식 (12) 및 (13)은 조정파라미터 $\alpha > 0, \beta > 0$ 를 포함하고 있으므로 이를 적절히 조정함으로써 상승시간 및 오버슈트 등의 동적성능을 개선시킬 수 있다.

4. 설계예제

다음과 같은 시간지연을 갖는 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 2x_1(k) + x_2^3(k) + 0.2x_1(k-\tau_1) \\ &\quad + 0.1x_2^3(k-\tau_1) + u(k) \\ &\quad + 0.1u(k-\tau_2) + 0.1w(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + 0.1x_2(k-\tau_1) \\ &\quad + u(k) + 0.1u(k-\tau_2) + 0.1w(k) \\ e(k) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, τ_1, τ_2 는 시간지연 이며

$\tau_1 = 2, \tau_2 = 5$ 이다. 상태변수 값은

$$x_1(t) \in [-1.5 \ 1.5], \quad x_2(t) \in [-1.5 \ 1.5] \quad (25)$$

을 만족한다고 가정한다. (24)의 비선형 항은

$$x_2^3(k) = M_{11} \cdot 0 \cdot x_2(k) - (1 - M_{11}) \cdot 2.25 x_2(k). \quad (26)$$

로 표현할 수 있다. (26)로부터 퍼지 집합의 멤버십 함수는

$$\begin{aligned} M_{11}(x_2(k)) &= 1 - \frac{x_2^2(k)}{2.25} \\ M_{12}(x_2(k)) &= \frac{x_2^2(k)}{2.25}. \end{aligned} \quad (27)$$

이다. (27)의 퍼지 집합을 이용하여 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 나타내면

Plant Rule 1:

IF $x_2(k)$ is M_{11} THEN

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_1 x(k) + A_{d1} x(k-\tau_1) \\ &\quad + B_{u1}(k) u(k) + B_{d1} u(k-\tau_2) + B_1 w(t) \\ e(k) &= C_1 x(k) + D_1 u(k), \end{aligned} \quad (28)$$

Plant Rule 2:

IF $x_2(k)$ is M_{12} THEN

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_2 x(k) + A_{d2} x(k-\tau_1) \\ &\quad + B_{u2}(k) u(k) + B_{d2} u(k-\tau_2) + B_2 w(t) \\ e(k) &= C_2 x(k) + D_2 u(k), \end{aligned} \quad (29)$$

이다. 여기서 $x(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T$ 이며

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 2.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{\alpha} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.225 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} & (30) \\
 B_1 = B_2 &= [0.1 \ 0.1]^T, & B_{\alpha 1} = B_{\alpha 2} &= [1 \ 1]^T, \\
 B_{\alpha 1} = B_{\alpha 2} &= [0.1 \ 0.1]^T, \\
 C_1 = C_2 &= [1 \ 1], & D_1 = D_2 &= 1
 \end{aligned}$$

이다. 조정변수 α, β 값에 대한 제어기를 설계하면 다음과 같다.

(i) $\alpha=1, \beta=1$ 일때

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-1.7053 \quad -0.1750], \\
 K_2 &= [-1.7334 \quad -2.0625]
 \end{aligned} \quad (31)$$

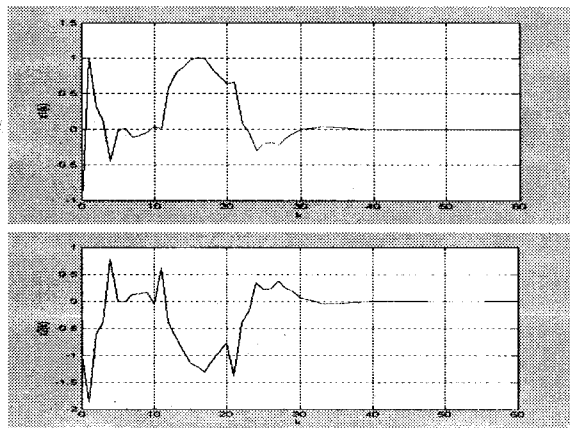
(ii) $\alpha=1.3, \beta=1$ 일때

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-2.2462 \quad -0.1898], \\
 K_2 &= [-2.3045 \quad -2.7301]
 \end{aligned} \quad (32)$$

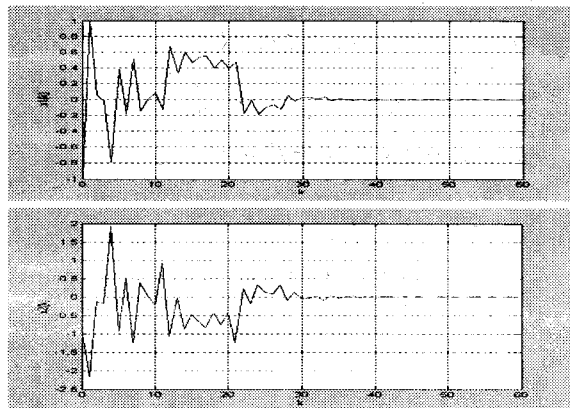
(iii) $\alpha=1, \beta=0.1$ 일때

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-1.7301 \quad -0.1485], \\
 K_2 &= [-1.7587 \quad -2.0919]
 \end{aligned} \quad (33)$$

이다. 각 제어기에 대한 시간지연을 갖는 비선형 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 그림 1에 나타나 있다.



(a) $\alpha=1, \beta=1$



(b) $\alpha=1.3, \beta=1$

그림 1. 시간지연 비선형시스템의 시뮬레이션 결과

컴퓨터 시뮬레이션에 사용된 외부 외란신호는 $10 \leq k \leq 20$ 에서 $w(t)=10$ 이며 다른 구간에서는 영인 구형파 신호이다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과로부터 안정성과 H_{∞} 을 만족하는 제어기는 조정파라미터를 적절히 선택함으로써 상승시간 및 오버슈트 등의 동적성능을 변화할 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] C. W. Chen, W. L. Chiang, and F. H. Hsiao, "Stability analysis of T-S fuzzy model for nonlinear multiple time-delay interconnected systems," *IEEE Mathematics and Computer in Simulation*, vol. 66, no. 6, pp. 523-537, 2004.

[2] B. Chen, and X. P. Liu, "Fuzzy guaranteed cost control for nonlinear systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 13, no. 2, pp. 38-249, 2005

[3] X. J. Ma, Z. Q. Sun, and Y. Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6, pp. 41-51, Feb. 1998.

[4] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200-211, April. 2000.

[5] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung and H. B. Park, "Output feedback robust H_{∞} control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 6, pp. 657-664, Decem. 2000.

[6] J. Yonenama, W. L. Chiang, and F. H. Hsiao, "Stability analysis of T-S fuzzy models for nonlinear multiple time-delay interconnected systems," *The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2005*, pp. 957-962.

[7] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "A multiple Lyapunov function to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.

[8] T. M. Guerra and L. Vermeiren, "LMI based relaxed nonquadratic stabilization condition for nonlinear systems in T-S's form," *Automatic*, vol. 40, pp. 823-829, 2004.