

Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동계산에 대한 연구

김진환¹

A STUDY ON INCOMPRESSIBLE FLOW COMPUTATIONS USING A HERMITE STREAM FUNCTION

J.W. Kim¹

This paper describes a recent development on the divergence free basis function based on a hermite stream function. The well-known cavity problem has been used to compare the accuracy and the convergence of the present method with those of a modified residual method known as one of the stabilized finite element methods. The comparison showed the present method performs better in the accuracy and convergence.

Key words: 무발산 요소(Divergence Free Element), 벡터 포텐셜(Vector Potential), 회전 기저 함수(Solenoidal Basis Function), 비회전 기저 함수(Irrotational Basis Function)

1. 서론

유체, 특히 액체나 저속의 기체 경우에는 밀도 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있다. 우리는 이 단순화된 유동 방정식을 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 한다. 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 solenoidal이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있으며, 오히려 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 더 어렵게 하고 있다.

우리는 Helmholtz 정리로부터 모든 벡터는 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational) 성분으로 직교 분리될 수 있음을 안다.[1] 이는 비압축성 Navier-Stokes 방정식도 예외가 아니며, 따라서 다음과 같이 분리된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \pi^S (-u \cdot \nabla u + \nu \nabla^2 u) + f^S \quad (1.1)$$

$$\nabla p = \pi^I (-u \cdot \nabla u + \nu \nabla^2 u) + f^I \quad (1.2)$$

여기서, u 는 유체 속도 벡터, p 는 압력, ν 는 동점성 계수

이다. f^S 는 중력항 f 의 비보존적(solenoidal) 부분을 의미하며, f^I 는 f 의 보존적 부분을 의미한다. 투사 연산자 (projection operator) π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 연산자이다.

식(1.1)은 압력항을 포함하고 있지 않음을 주목한다. Holdeman[2]은 이러한 분리에 대한 물리적 근거로 비압축성 유체에서의 교란의 전파는 순간적이기 때문에 압력 구배항은 비압축성 유동의 지배 방정식에 나타날 수가 없으며, 또 압력은 속도의 함수임으로 유동을 구동하지 않고 유동에 반응할 뿐이라고 주장한다.

회전(solenoidal) 함수 중에서 가중 함수 v 를 취하고, 비회전(irrotational) 함수 중에서 가중 함수 w 를 취하여, 식(1.1)과 (1.2)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (v, \frac{\partial}{\partial t} u) = & -(v, u \cdot \nabla u) - \nu(\nabla v, \nabla u) \\ & + (v, f^S) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (w, \nabla p) = & -(w, u \cdot \nabla u) - \nu(\nabla w, \nabla u) \\ & + (w, f^I) \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서, $(,)$ 는 내적을 의미한다. 영역 Ω 는 겹치지 않는

1 정회원, 동의대학교 기계공학과
E-mail: kimjw@deu.ac.kr

(non-overlapping) 소영역들로 나누어지며, 이 소영역들을 요소 (element)라 부른다. 식(2.1)과 (2.2)는 각각의 요소에 적용되며, 요소 내에서 정의된 기저함수 혹은 형상함수들을 이용하여 식(2.1)과 (2.2)를 계산하게 된다.

속도 벡터 \underline{u} 가 회전이라 함은 속도 벡터는 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ 을 만족해야 함을 의미한다. 임의 벡터 $\underline{\psi}$ 를 취하여 2차원에서 $\underline{\psi} = \psi \hat{k}$ 라 두면, 항상 $\nabla \cdot (\nabla \times \psi \hat{k}) = 0$ 이 된다. 따라서 벡터 포텐셜 혹은 유동 함수 ψ 가 존재하여 $\underline{u} = \nabla \times \underline{\psi}$ 가 되도록 속도 벡터 \underline{u} 를 취하면 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ 을 만족시킨다. 그리하여 \underline{u} 에 대한 보간 함수는 $\underline{\psi}$ 를 정의하는 함수의 부분 집합(subset)에서 취하면 된다. 그러나 유동 함수 $\underline{\psi}$ 를 어떻게 정의하는지는 분명하지가 않으며, Holdeman[3, 4]은 $\underline{\psi}$ 에 대한 보간 함수로써 hermite 3차 함수의 사용을 제안한 바 있다. 다음 절에서는 hermite 3차 함수를 사용한 회전 및 비회전 유한 요소 기저 함수의 전개 과정을 보인다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 회전 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내의 유동 함수 $\psi(x, y)$ 의 근사 값이라 하고 3차 hermite 함수에 의하여 보간된다고 하자. $((\xi, \eta)$ 좌표계를 가지는 master 요소에 대한 hermite 함수는 다음과 같다.[5]

$$g_{00i} = (1/8)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta)(2 + \hat{\xi}_i \xi + \hat{\eta}_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \quad (3.1)$$

$$g_{10i} = (-1/8)\hat{\xi}_i(1 - \xi^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (3.2)$$

$$g_{01i} = (-1/8)\hat{\eta}_i(1 - \eta^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (3.3)$$

여기서, 아래 첨자 'i'는 요소의 절점 번호를 나타내며, $\hat{\xi}_i$ 와 $\hat{\eta}_i$ 는 해당되는 절점 좌표값인 ± 1 을 가진다.

3차 hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 각 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의 절점 "i"에 대한 자유도를 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial x, \partial\Psi_i/\partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 유동 함수는 다음과 같이 구한다.

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Psi_i g_{0i} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (4)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (5.1)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (5.2)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.3)$$

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환은 다음과 같다.

$$\underline{g}_i = \hat{\underline{g}}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^t \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $\underline{g}_i = (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi})$, $\hat{\underline{g}}_i = (g_{00i} \ g_{10i} \ g_{01i})$ 이다. 변환 Jacobian J는 아래와 같이 정의한다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

우리는 Hermite 보간 함수에서 x 및 y 도함수에 대한 함수들의 위치를 바꾸고 \pm 부호를 바꾸더라도 유동 함수의 보간에는 이상이 없음을 주목한다. 따라서 절점 "i"에 대한 자유도가 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial y, -\partial\Psi_i/\partial x)$ 혹은 (Ψ_i, U_i, V_i) 가 되도록 기존 hermite 함수들에서 순서와 부호를 바꿀 수 있다. 그리하면 요소 내의 유동 함수에 대한 보간 함수는 다음과 같다.

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \underline{\Psi}_i^e \quad (8.1)$$

여기서, $\underline{\Psi}_i^e$ 는 요소 절점의 자유도를 의미하며 다음과 같다.

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i \ U_i \ V_i)^t \quad (8.2)$$

여기서, Ψ_i 는 유동 함수 ψ 자신에 대한 자유도, U_i 는 x 방향의 속도 u 그리고 V_i 는 y 방향의 속도 v 에 대한 자유도이다.

회전 속도(solenoidal velocity) 벡터 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 $\psi^e(x, y)$ 에 대한 curl을 취함으로써 얻어진다. 따라서

$$\underline{u}^e(x, y) = \nabla \times \psi^e(x, y) \hat{k} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \quad (9)$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $S_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$S_i(x, y) = \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 부록 A에 이들의 도함수들과 함께 나타내었다. 따라서 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\underline{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 S_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \quad (11)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다. 아래에 이를 보기 위하여 식들을 정리하였다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u}^e(x, y) &= \nabla \cdot \sum_{i=1}^4 S_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

약간의 수고를 하여 두 요소의 인접 경계면에서 외향 법선 성분들은 서로 크기가 같고 방향이 반대임을 확인할 수 있다. 즉, 요소 경계에서 수직 방향 속도 성분은 연속이다. 또, 접선 성분에 대하여 살펴보면 연속적이지 못함을 알 수 있다. 그러

나 속도 함수가 회전적(solenoidal)이기 위한 최소 요구 조건은 요소 경계에서 수직 성분이 연속이어야 하기 때문에 접선 성분의 불연속은 무발산에 영향을 미치지 않는다.

2.2 비회전 보간 함수

비회전 속도 성분들은 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 gradient로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 보간 함수는 식(5)와 (6)에서 보인 3차 hermite 함수 $g_i(x, y)$ 이다. 임의 사변형에서 $\phi^e(x, y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \quad (13)$$

여기서 $\underline{\Phi}_i^e$ 는 스칼라 포텐셜의 자유도로서 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i \ \partial\Phi_i/\partial x \ \partial\Phi_i/\partial y)^t \quad (14)$$

비회전 기저 함수, $I_i(x, y)$ 는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x, y)$ 의 gradient를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \quad (15) \end{aligned}$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 I_i(x, y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사화 되기 때문에 비회전 기저 함수, $I_i(x, y)$ 는 다음과 같다.

$$I_i(x, y) = \begin{pmatrix} I_{11i} & I_{12i} & I_{13i} \\ I_{21i} & I_{22i} & I_{23i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$I_i(x, y)$ 와 $\nabla I_i(x, y)$ 의 구체적인 수식화는 회전 기저 함수의 경우와 유사하기 때문에 생략한다.

3. 수치 계산

본 연구에서는 무발산 요소의 계산 결과를 Illinca 등[6]이 제시한 수정 잔여치법의 결과와 비교 검토하기로 한다. 따라

서 무발산 요소의 정식화와 수정 잔여치법의 정식화를 같이 살펴보기로 한다.

3.1 무발산 요소의 정식화

임의 사변형 요소에서 식(2.1)과 (2.2)에 대하여 Galerkin 잔여치법을 적용하기로 한다. 식(2.1)의 시간항 ($v, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 M_{ij}^e , 대류항 ($v, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 C_{ij}^e , 소산항 ($\nu(\nabla v, \nabla \underline{u})$)에 대한 요소 행렬을 D_{ij}^e , 그리고 외력의 회전(solenoidal) 성분을 F_i^e 라 하면 다음과 같다.

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^T S_j d\Omega_e \quad (17.1)$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^T \left(u \frac{\partial S_j}{\partial x} + v \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.2)$$

$$D_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial S_i^T}{\partial x} \frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i^T}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.3)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega_e} S_i^T \underline{f}^s d\Omega_e \quad (17.4)$$

여기서 위첨자 T 및 S는 각각 전치 행렬과 회전 성분을 의미하며, 요소의 자유도, Ψ_i^e 는 식(8-2)와 같다.

식(2.2)에 대한 유한 요소 전개를 위하여 압력항 ($w, \nabla p$)에 대한 요소 행렬을 \bar{M}_{ij}^e , 대류항 ($w, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 \bar{C}_{ij}^e , 소산항 ($\nu(\nabla w, \nabla \underline{u})$)에 대한 요소 행렬을 \bar{D}_{ij}^e , 그리고 외력 (w, \underline{f}^s)의 비회전 성분을 \bar{F}_i^e 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{M}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} G_i^T G_j d\Omega_e \quad (18.1)$$

$$\bar{C}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} G_i^T \left(u \frac{\partial S_j}{\partial x} + v \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (18.2)$$

$$\bar{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial G_i^T}{\partial x} \frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial G_i^T}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (18.3)$$

$$\bar{F}_i^e = \int_{\Omega_e} G_i^T \underline{f}^s d\Omega_e \quad (18.4)$$

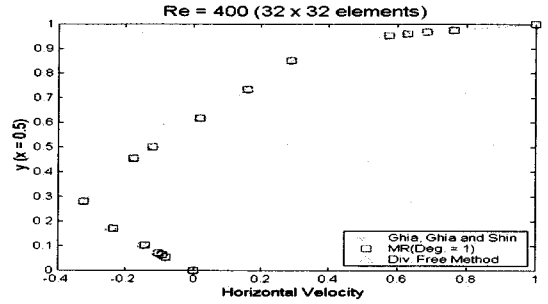


Fig. 1 Horizontal velocities at Re = 400.

여기서 $G_i(x,y)$ 는 비회전 기저 함수로서 $\nabla I_i(x,y)$ 이다.

식(17)과 (18)을 이용하여 요소 방정식에 대한 무발산 유한 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

3.2 Lid Driven Cavity 유동

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia 등[8]의 cavity 유동에 대한 수치 결과들과 비교하여 종종 검증하는 관계로 본 연구에서도 이 문제에 대하여 살펴보았다. Cavity 유동에 대한 영역 및 경계조건의 정의는 Fig. 1에 하였으며, 비교할 레이놀즈(Re) 수는 400, 1000 그리고 3200이고 요소의 수는 32 x 32의 균일 요소로 하였으며, 최근 많은 관심을 가지는 안정화(stabilization) 기법과의 비교를 위해 Illinca 등[6]의 수정 잔여치법(modified residual method)을 선택하였다. 수정 잔여치법은 비압축성 유동 방정식의 유한 요소 계산에서 잔여치의 섭동을 이용하여 무발산 혹은 연속 방정식의 구속 조건을 완화하고자 하는 방법이다. 이 알고리즘은 잘 알려진 Hughes와 Brooks[7]의 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)과 일맥상통하며 Illinca 등은 이를 토대로 τ 로 알려진 내재적 시간 변수를 결정하여 비압축성 유동에 적용하였다.

레이놀즈 수가 400일 경우(Fig. 2), 수정 잔여치법과 무발산 요소법에 의한 결과들은 모두 Ghia 등이 제시한 결과들과 잘 일치하고 있다. 이 경우 두 방법 간의 우열을 가리기가 어렵다. 레이놀즈 수가 1,000일 경우(Fig. 3), 완만하게 변하는 부분($0.2 < y < 0.9$)에서는 두 방법 모두 Ghia 등의 값들에 근접하고 있으나, 그 이외의 부분에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 레이놀즈 수가 3,200인 경우(Fig. 4), 완만하게 변하는 부분($0.1 < y < 0.9$)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있고, 아래 부분($0 < y < 0.1$)에서는 수정 잔여치법에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있고, 윗 부분($0.9 < y < 1.0$)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치하나, 전체적으로 수정 잔여치에 의한 해들



참고문헌

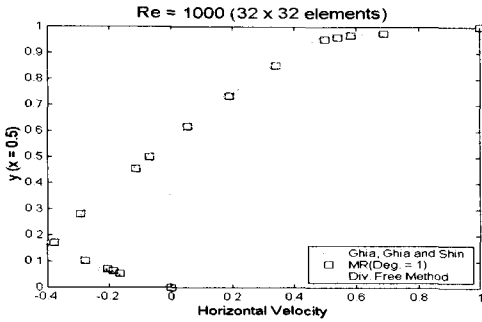


Fig. 2 Horizontal velocities at Re = 1,000.

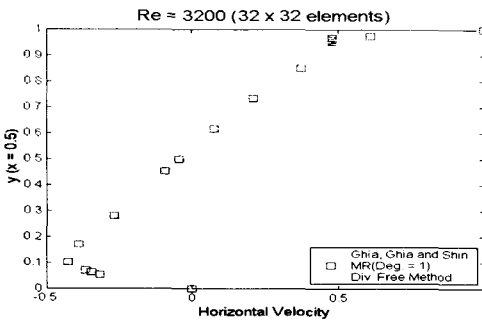


Fig. 3 Horizontal velocities at Re = 3,200.

이 더 잘 일치함을 보인다. 따라서 유동이 급격하게 변하지 않거나 혹은 층류 유동에서는 무발산 요소에 의한 해들이 더 정확함을 알 수 있다.

5. 결론

이 연구에서 비압축성 유동 해석을 위한 무발산 요소에 대하여 살펴보았다. 서론에서 언급하였지만, 벡터 포텐셜 혹은 유동 함수 ψ 의 적절한 보간을 위하여 hermite 3차 함수를 도입하였다. 이를 이용하여 회전(solenoidal) 및 비회전(irrotational) 보간 함수를 유도하였으며, 이의 수행을 보기 위하여 잘 알려진 정사각형 cavity 문제에 적용하여 적절함을 살펴보았다. 현재의 무발산 요소에 의한 방법은 레이놀즈 수가 3,200 이하에서는 잘 수행한다고 볼 수 있으며, 그 이상에서는 더 세밀한 격자 구조가 필요하거나 혹은 안정화 기법의 적용이 필요하리라 본다.

현재의 방법은 유동 해석 뿐 아니라 전자장 해석과 같은 분야에도 적용 가능하기 때문에 더 심도있는 연구가 필요하며, 고차 요소 및 3차원에서 적용 가능하도록 개발할 필요가 있다고 하겠다.

- [1] C. Pozrikidis, 1977, Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics, *Oxford University Press*.
- [2] Holdeman, J.T., 2002, "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," *USNCTAM14 Conference*, Blacksburg, VA.
- [3] Holdeman, J.T., 2004, "I. Some Lagrange Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," *manuscript*, submitted to *Mathematics of Computation*.
- [4] Holdeman, J.T., 2004, "II. Some Hermite Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," *manuscript*, submitted to *Mathematics of Computation*.
- [5] Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering, *John Wiley & Sons, Inc.*
- [6] Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D., 2000, "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.188, p.235-255.
- [7] Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N., 1979, "A Multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion," Hughes, T.J.R. (Ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, Vol.34, *ASME*, New York, p.19-35.
- [8] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol.48, p.387-411.