

유한요소법을 이용한 전차선로-팬터그래프 동적상호작용 해석 프로그램의 개발 및 검증

Development and Validation of a Catenary-Pantograph Dynamic Simulation By Using the Finite Element Method

조용현* 강윤석** 이기원***

Cho, Yong Hyeon Kang, Youn-suk Lee, Kiwon

ABSTRACT

We have developed a catenary-pantograph dynamic simulation program by using the finite element method and verified the accuracy according to the EN 50319. During the validation process, we have reviewed which the time integration methods is proper for this application. among the Newmark method, Wilson theta method and alpha method. We conclude that the alpha method is the best in terms of computation time and accuracy.

1. 서론

집전성능은 열차의 속도향상을 위하여 확보해야 할 성능 중의 하나이다. 속도향상을 위한 전차선로의 설계 및 개량을 위하여 전차선로-팬터그래프 동적상호작용 해석 프로그램을 사용하여 집전 성능을 예측한다. 국내외적으로 그 동안 개발되어 온 전차선로-팬터그래프 동적상호작용 프로그램은 3 가지로 대별될 수 있다. 즉 모드중첩법, 유한차분법, 유한요소법을 사용하여 집전성능을 예측하여 왔다.

모드중첩법은 미리 구한 전차선로의 고유진동모드의 중첩을 통하여 팬터그래프와 전차선로의 동적 상호작용에 의하여 발생하는 접촉력에 의한 전차선로의 동적 거동을 계산하는 방법이다. 프로그램을 용이하게 만들 수 있다는 장점을 가지고 있으나 선형 시스템에만 사용될 수 있는 한계를 가지고 있고 해석 구간이 긴 경우에는 고려해야 하는 모드의 개수가 급격히 늘어나기 때문에 해석시간이 타 해석방법에 비하여 오히려 길어질 수 있다는 단점을 가지고 있다[1].

유한차분법은 전차선로를 이산화 집중질량으로 모델링하고 이들 질량에 적용되는 미분형 운동방정식을 Euler 시간 적분을 하여 동적 거동을 구하는 방법이다[2]. 팬터그래프가 집중질량들의 사이에 위치한 경우에 팬터그래프의 수직 위치는 집중질량들의 위치를 선형 보간하여 구하게 되나 실제로는 전차선의 변형으로 인하여 이와 다를 수 있으므로 매 적분시간마다 구한 접촉력이 오차를 가지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적분시간 간격을 작게 취해야 하고, 절점 사이에서 계산된 접촉력을 평균해야 하는 등의 추가적인 데이터 처리가 필요하다.

* 조용현, 철도학회 정회원, 한국철도기술연구원, 전기신호연구본부 책임연구원

E-mail : yhcho@krri.re.kr

TEL : (031)460-5112 FAX : (031)460-5459

* 강윤석, 철도학회 정회원, 한국철도기술연구원 토목궤도연구본부 선임연구원

* 이기원, 철도학회 정회원, 한국철도기술연구원 전기신호연구본부 선임연구원

유한요소법은 적분형 운동방정식으로부터 이산화를 하여 질량, 감쇠, 강성행렬을 구하고 명시적 혹은 암시적 적분을 하여 동적 거동을 구하는 방법이다[3]. 유한요소법은 유한 차분법에 비하여 계산량은 많으나 팬터그래프와 전차선의 결합을 용이하게 할 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 전차선로-팬터그래프 동적상호작용 해석 프로그램을 개발하였다. 그 동안 국내에서 수행되어 왔던 관련 연구에서는 프로그램의 개발은 여러 차례 수행된 바 있으나 검증이 충분히 이루어지지 못하여 프로그램의 적용에 한계가 있었다. 본 연구에서는 이러한 한계를 극복하기 위하여 개발 프로그램을 유럽 관련 규격에 나와 있는 참고 모델을 사용하여 검증을 해 보았다. 검증과정에서 암시적 적분방법인 Newmark 방법, Wilson theta 방법, α 방법[4]을 적용하여 얻은 결과를 규격에서 제시한 결과와 비교하여 전차선로-팬터그래프의 동적상호작용 해석에 적합한 시간적분 방법에 대하여 검토하였다.

2. 유한요소법 정식화

2.1 전차선로 유한요소법 정식화

전차선로를 장력이 작용하는 현으로 보고 운동방정식을 적어 보면 아래와 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + D(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t) = 0$$

with B.C.; $v(0,t) = v(L,t) = 0$

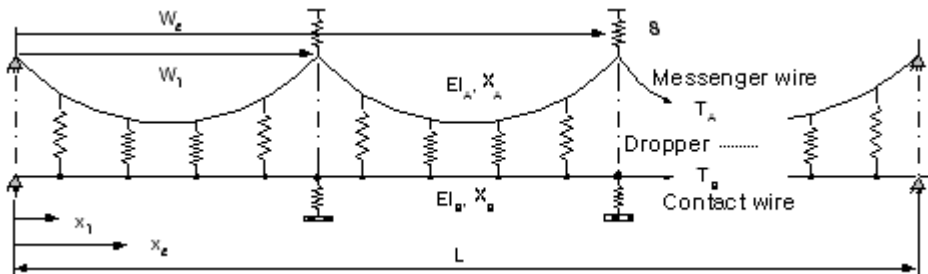


Fig. 1 전차선로 모델

경계조건을 만족하는 가상변위를 상기 방정식에 곱하여 가중 잔여(Weighted residual)을 적분하여 Weak form으로 만들어서 정리하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\langle v_n(x,t) \rangle [M] \{ \delta v(x,t) \} + \langle v(x,t) \rangle [C] \{ \delta v(x,t) \} + \langle v(x,t) \rangle [K] \{ \delta v(x,t) \} - \langle F \rangle \{ \delta v(x,t) \} \right) dt = 0$$

여기서

$$[M] = \sum_{i=1}^n \int_{L_i}^{L_{i+1}} \rho A \{ N \} \langle N \rangle dx = \sum_{i=1}^n [M]_i$$

$$[C] = \sum_{i=1}^n \int_{L_i}^{L_{i+1}} D \{ N \} \langle N \rangle dx = \sum_{i=1}^n [C]_i$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n \int_{L_i}^{L_{i+1}} T \{N_x\} \langle N_x \rangle dx = \sum_{i=1}^n [K]_i$$

$$\langle F \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{L_i}^{L_{i+1}} f \langle N \rangle dx = \sum_{i=1}^n \langle F \rangle_i$$

$$\{N(\xi)\} = \langle (1 - \xi); \xi \rangle, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{for dropper}$$

$$\{N(\xi)\} = \langle (2\xi - 1)(\xi - 1); 4\xi(1 - \xi); \xi(2\xi - 1) \rangle, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{for wires}$$

이다.

상기 식을 이용하여 드로퍼의 질량, 감쇠, 강성 행렬 및 힘 벡터를 계산해 보면 다음과 같다.

$$[M]_i = \frac{\rho A L_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } n_{\text{dropper}}$$

$$[C]_i = \frac{D_{\text{dropper}} L_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } n_{\text{dropper}}$$

$$[K]_i = \frac{E_{\text{dropper}} A_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } n_{\text{dropper}}$$

$$\langle F \rangle_i = \frac{f L_i}{2} \langle 1 \quad 1 \rangle, \quad i = 1 \text{ to } n_{\text{dropper}}$$

또한, 전선의 질량, 감쇠, 강성 행렬 및 힘 벡터를 계산해 보면 다음과 같다.

$$[M]_i = \rho A L_i \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-1}{30} \\ \frac{15}{15} & \frac{15}{15} & \frac{30}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{15}{15} & \frac{15}{15} & \frac{15}{15} \\ \frac{-1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{30}{30} & \frac{15}{15} & \frac{15}{15} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } n$$

$$[C]_i = D L_i \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-1}{30} \\ \frac{15}{15} & \frac{15}{15} & \frac{30}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{15}{15} & \frac{15}{15} & \frac{15}{15} \\ \frac{-1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{30}{30} & \frac{15}{15} & \frac{15}{15} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } n$$

$$[K]_i = \frac{T}{L_i} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{1}{3} \\ -8 & 16 & -8 \\ \frac{1}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}, i = 1 \text{ to } n$$

$$\langle F \rangle_i = fL_i \left\langle \frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \right\rangle, i = 1 \text{ to } n$$

2.2 전차선로 곡선당김금구

곡선당김금구는 전차선의 편위를 주기 위한 장치이다. 아래 그림에서 보는 바와 같이 편위를 주게 됨에 따라서 곡선당김금구에 인장력이 발생하게 된다.

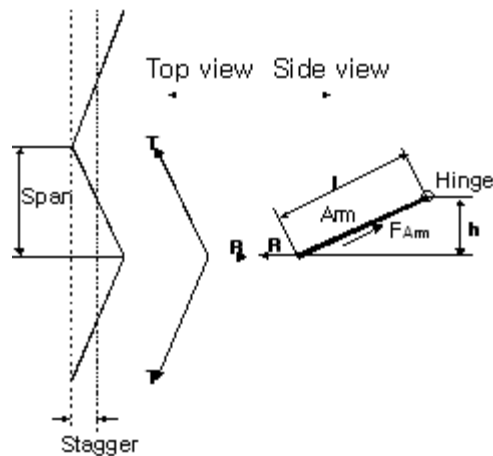


Fig. 2 곡선당김금구에 작용하는 인장력

이러한 인장력으로 인하여 곡선당김금구가 압상할 때 저항을 하게 되므로 이를 강성으로 아래와 같이 모델링할 수 있다.

$$F_{arm} = \frac{4 \times stagger \times T}{span} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}} \times \frac{h}{l}$$

$$k_{arm} = \frac{dF_{arm}}{dh} = \frac{4 \times stagger \times T}{l \times span \times \left(1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2\right)^{1.5}}$$

곡선당김금구는 병진운동 뿐만 아니라 회전운동을 하므로 아래와 같이 정적질량과 동적질량을 모두 고려해야 한다.

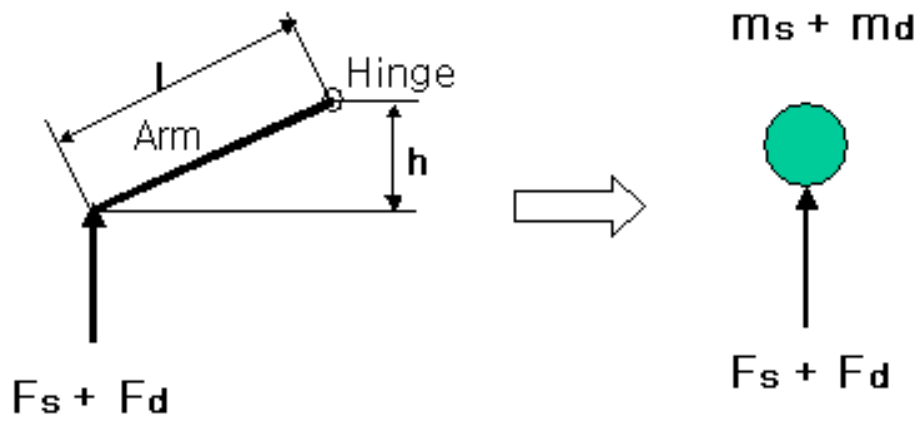


Fig. 3 곡선당김금구의 질량

$$m_s = \frac{1}{2} m$$

$$m_d = \frac{1}{3} m$$

2.3 전차선로 가동브라켓

전차선로의 조가선을 지지하는 가동브라켓은 아래 그림과 같이 스프링으로 모델링할 수 있다.

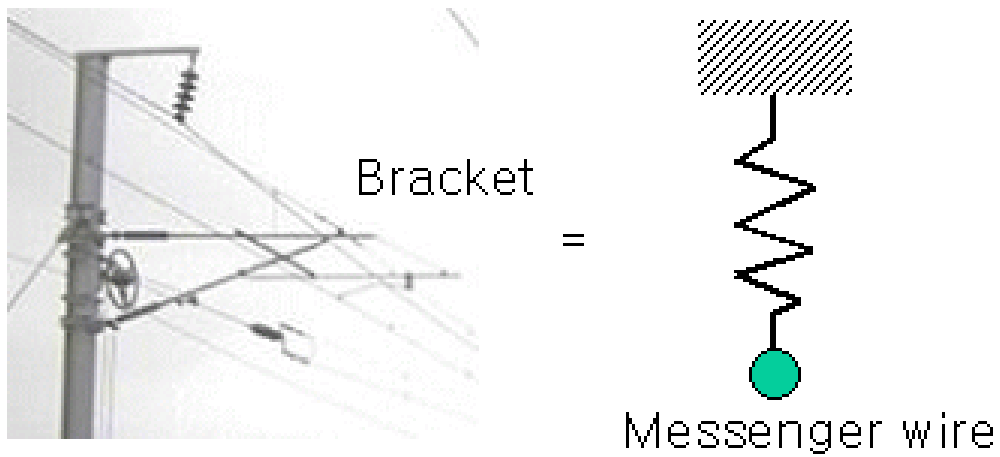


Fig. 4 가동브라켓 모델

2.4 팬터그래프 유한요소법 정식화

팬터그래프를 다 수준 질량-감쇠기-스프링으로 모델링할 때 다음과 같이 운동방정식을 쓸 수 있다.

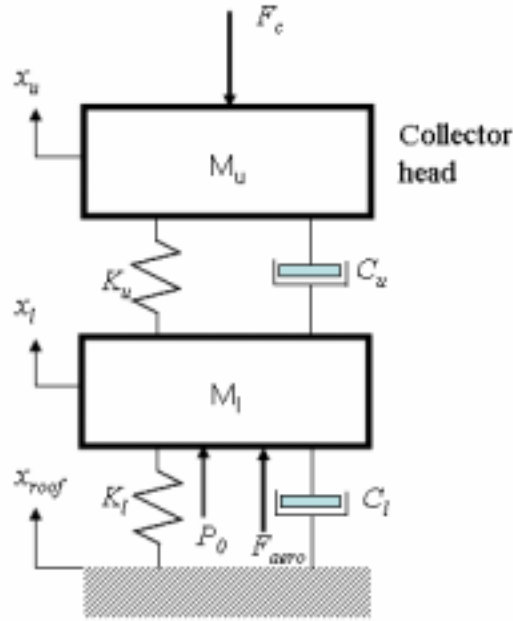


Fig. 5 팬터그래프 모델

$$\begin{bmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_l \\ \ddot{x}_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_u + c_l & -c_u \\ -c_u & c_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{x}_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u + k_l & -k_u \\ -k_u & k_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_l \\ x_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{aero} + P_0 + c_l \dot{x}_{roof} + k_l x_{roof} \\ -F_c \end{Bmatrix}$$

2.5 전차선-팬터그래프 결합 정식화

팬터그래프가 아래 그림과 같이 전차선 절점 사이에 위치할 경우 접촉력은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$F_c = k_c \times (x_u - v_{wire} - v_{initial}) + c_c \times (\dot{x}_u - \dot{v}_{wire})$$

상기와 같이 계산된 접촉력은 아래와 같이 형상함수를 사용하여 전차선 절점에 작용하는 하중으로 바꿀 수 있다.

$$F_i = N_i(\xi) \times F_c, i = 1 \text{ to } 3$$

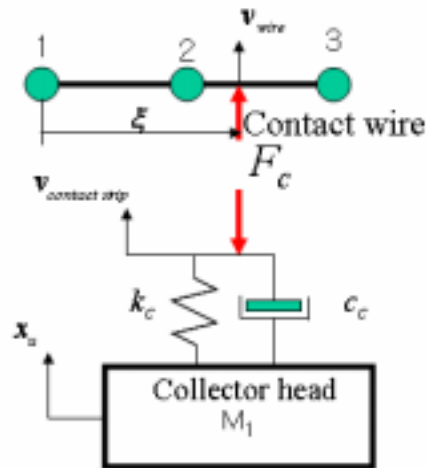


Fig. 6 전차선로-팬터그래프 결합

3. 해석결과 검증

3.1 EN 50318 검증 절차

유럽 철도의 상호 운전성 확보 측면에서 각국이 사용하고 있는 전차선로-팬터그래프 동적 상호작용 해석프로그램의 정확성을 확보하기 위하여 프로그램 검증 절차를 규정한 EN 50318을 제정하였다. EN 50318(Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line)에 나와 있는 검증 절차는 아래와 같다. 즉 참고모델(Reference model)에 대한 검증과 본선시운전 시험결과에 대한 검증의 두 단계로 구성되어 있다.

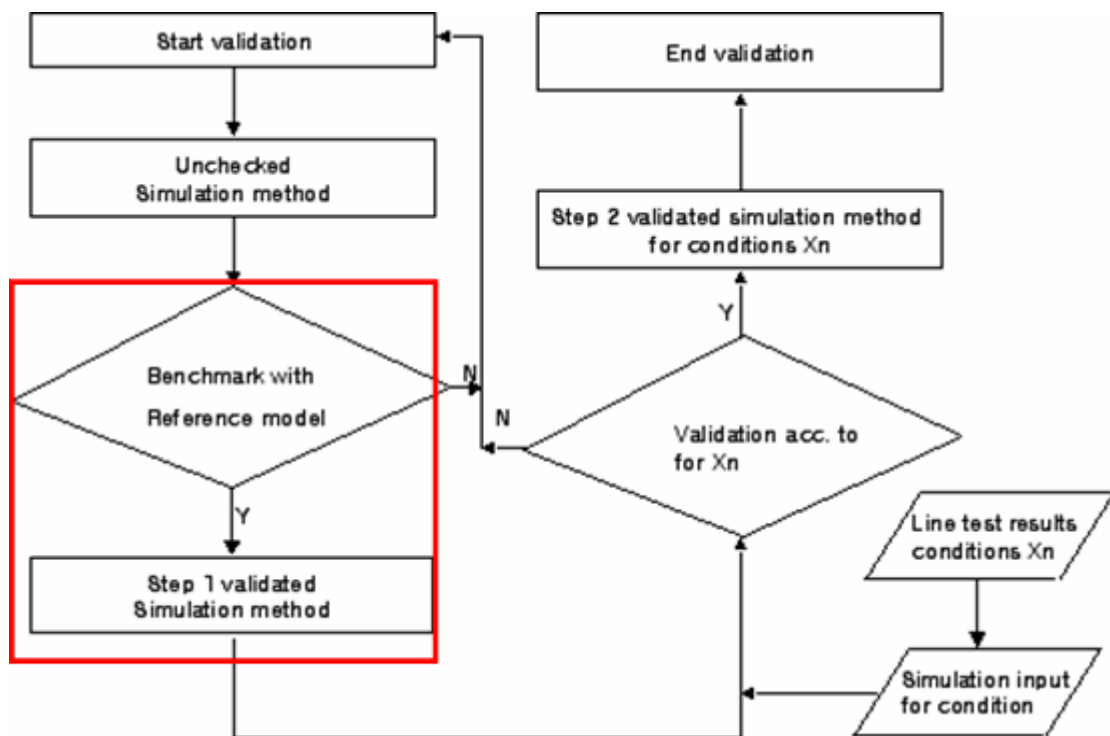
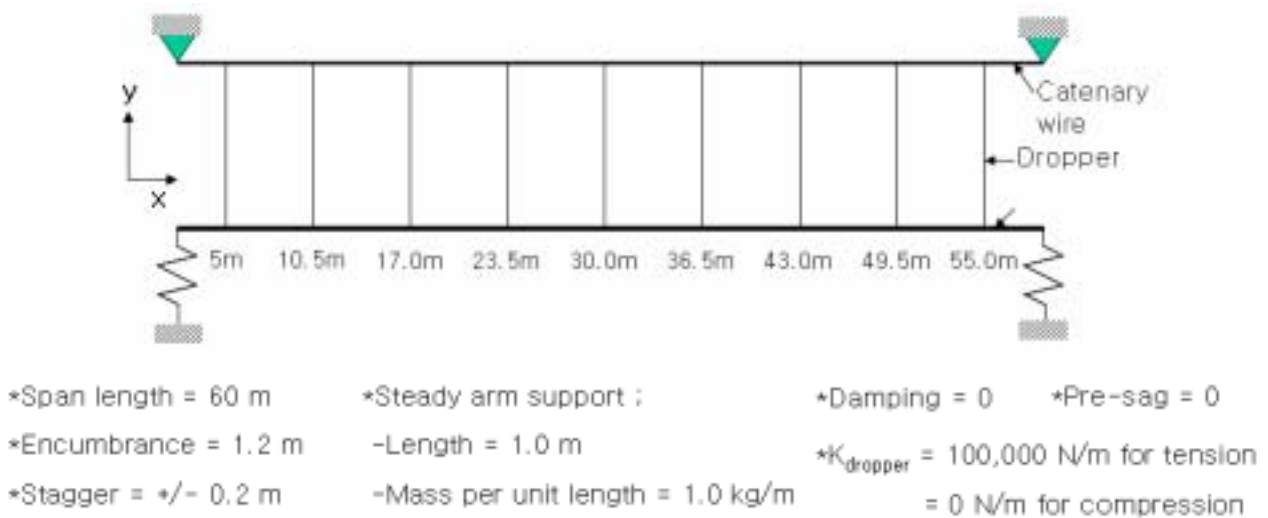


Fig. 7 EN 50319 프로그램 검증 절차

본 연구에서는 본선시운전 시험결과의 부재로 인하여 참고모델에 대해서만 검증을 수행하였다.

3.2 참고 모델

참고모델은 아래 그림들과 같다.



| Kind of wire | Tension[N] | Mass/unit length[kg/m] |
|----------------|------------|------------------------|
| Messenger wire | 16,000 | 1.07 |
| Contact wire | 20,000 | 1.35 |

Fig. 8 EN 50319의 전차선로 참고 모델

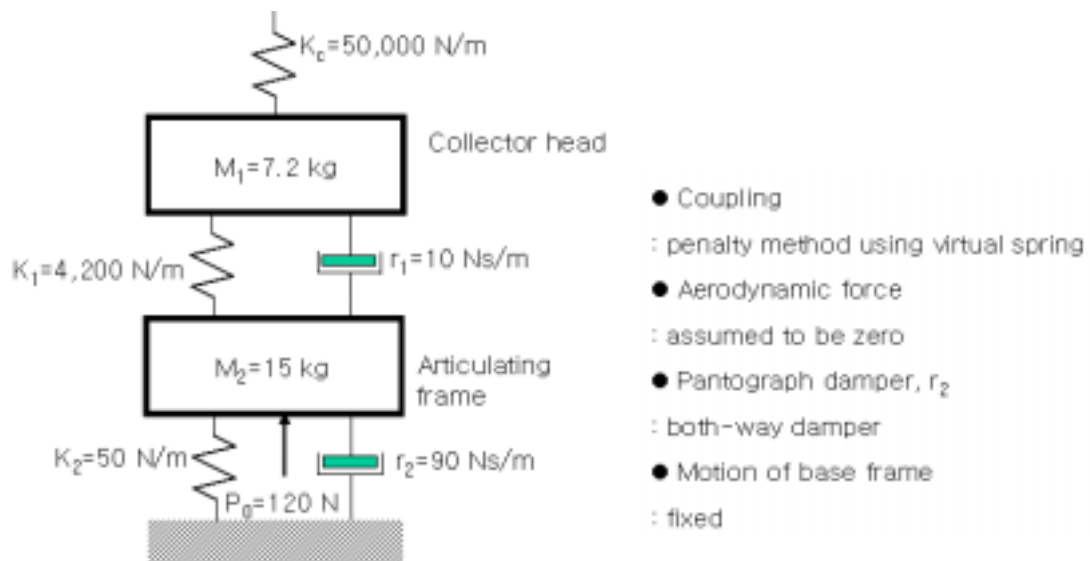


Fig. 9 EN 50319의 팬터그래프 참고 모델

3.3 300 km/h 검증

(1) 초기 전차선 형상

전차선로의 정적 하중은 자중과 장력이다. 이들 정적 하중이 작용하는 경우 전차선의 형상은 아래와 같이 계산된다. 참고모델에서는 사전이도(Pre-sag)가 없으므로 드로퍼 위치가 모두 0에 위치한다.

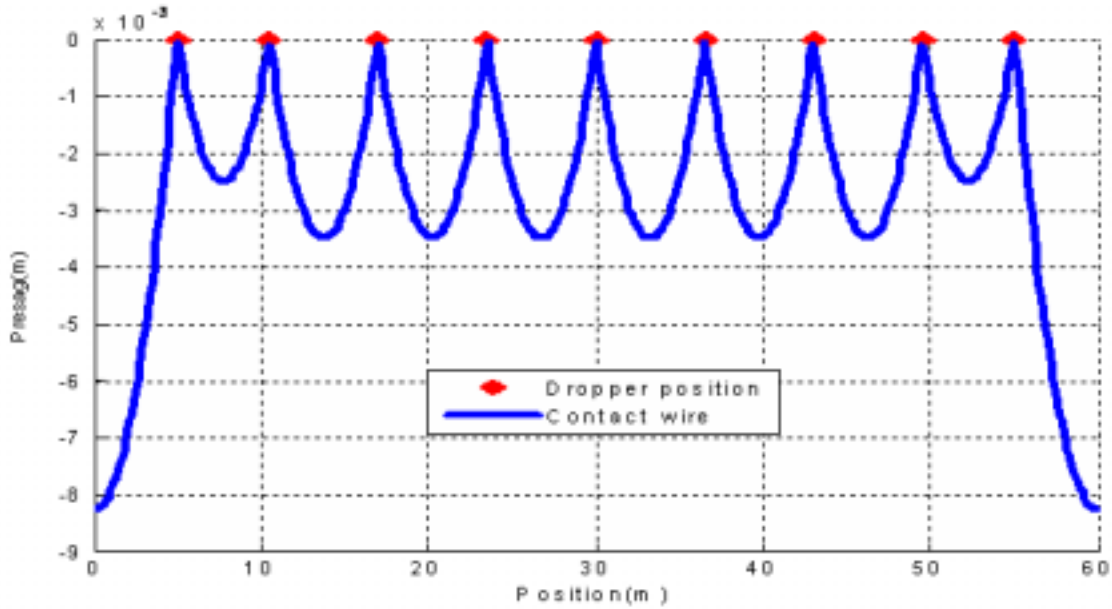


Fig. 10 전차선 초기 형상

(2) 접촉력

Wilson theta method를 사용하여 관심의 주파수를 20 Hz로 하여 얻은 접촉력 계산 결과는 아래 그림과 같다.

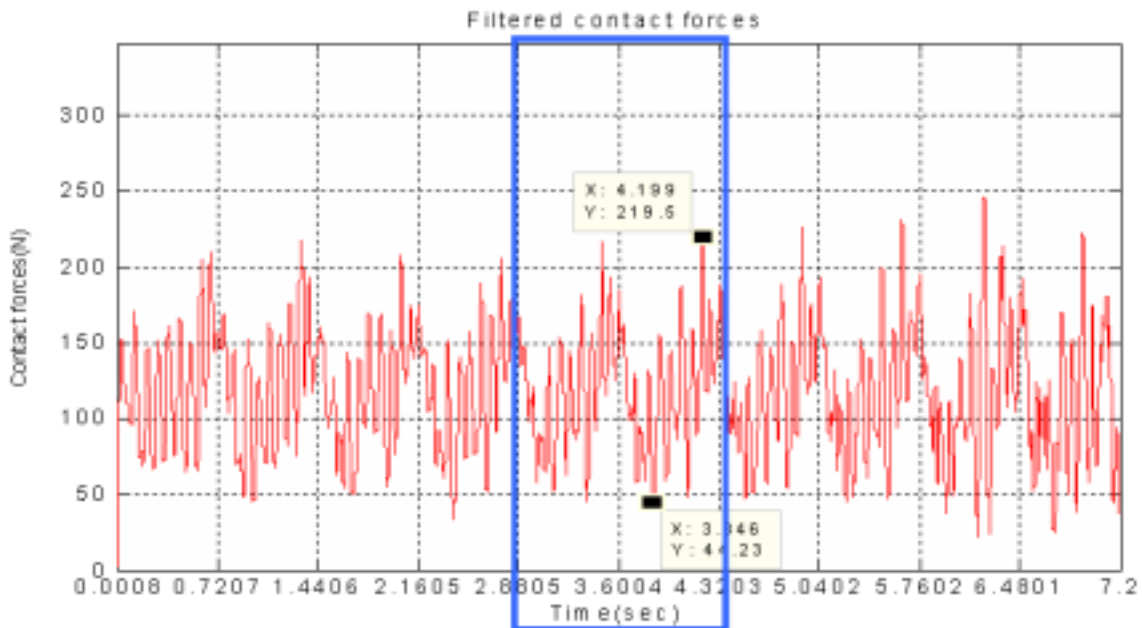


Fig. 11 300 km/h 주행시 접촉력의 변화

계산된 접촉력의 통계적 특성을 살펴보기 위하여 히스토다이아그램을 그리면 아래와 같다. 히스토그램으로부터 접촉력은 정규분포를 갖는다는 것을 알 수 있다.

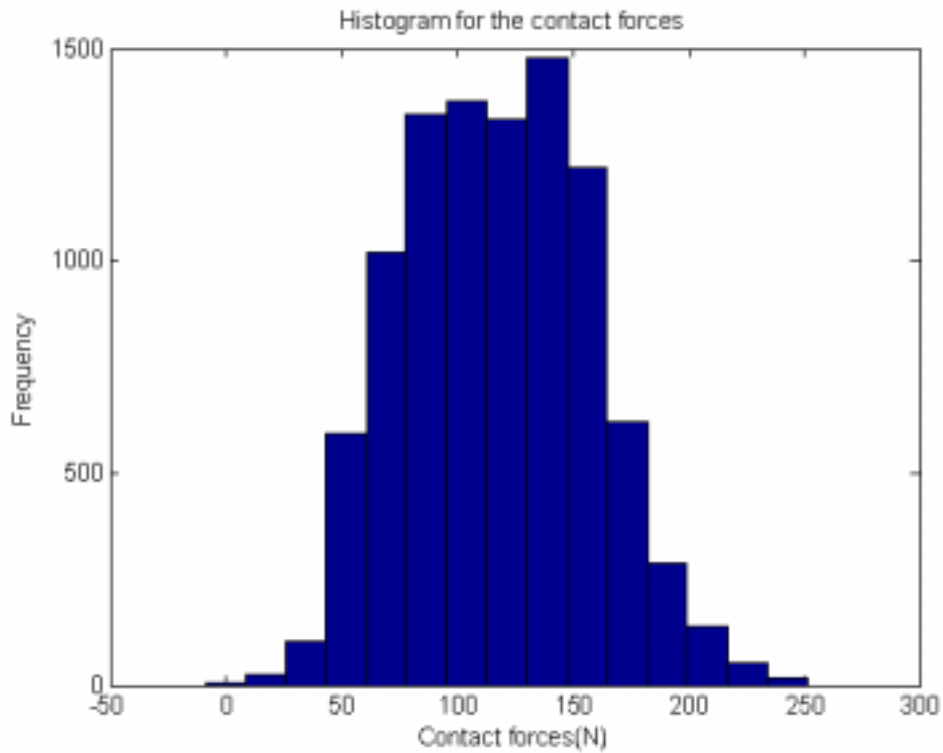


Fig. 12 300 km/h 주행시 접촉력의 통계적 분포

(3) 압상량

팬터그래프 집전판이 전차선을 압상하는 양이 다음 그림에 나와 있다. 경간의 후반부에서 최대값을 갖고 경간의 초반부에서 최소값을 갖는다.

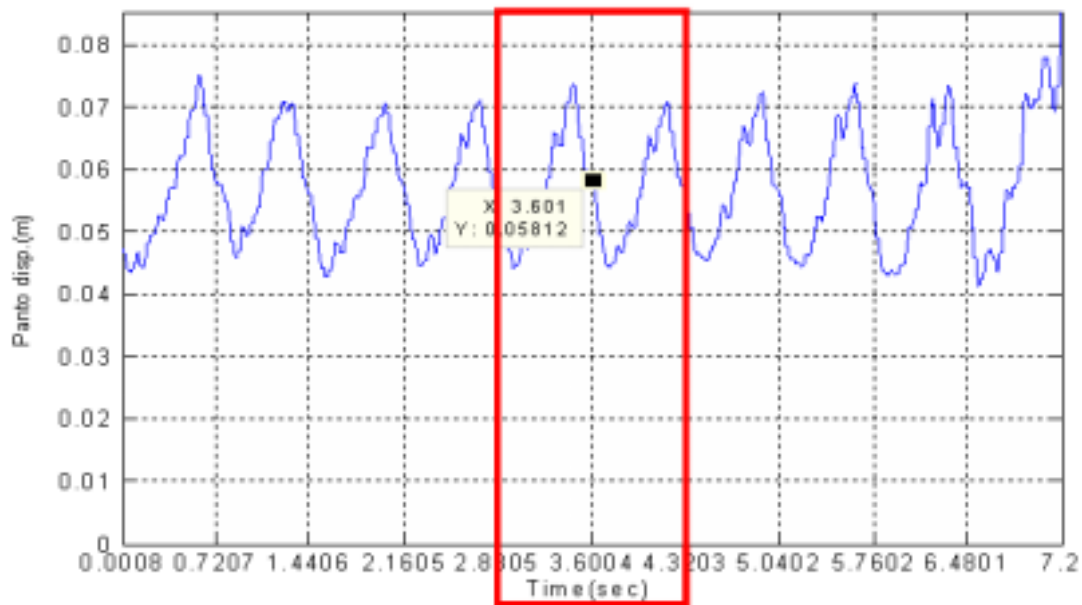


Fig. 13 300 km/h 주행시 압상량 변화

(4) EN 50319와의 비교

아래 표에서 볼 수 있듯이 시간적분방법에 상관없이 EN 50319에 제시한 기준을 모두 만족한다는 것을 알 수 있다. 그러나 Wilson theta 방법의 경우 Newmark 혹은 Alpha 방법에 비하여 더 작은 time step 이 필요하므로 Newmark 혹은 Alpha 방법이 Wilson theta 방법보다 효율적이라는 것을 알 수 있다. 접촉력의 표준편차가 클수록 집진성능을 보수적으로 평가하게 되므로 본 연구에서 고려한 시간적분방법 중에서 Wilson theta 방법이 가장 보수적인 해석결과를 제시하는 것으로 판단된다.

Table 1. 300 km/h 주행시 해석결과와 검증결과와의 비교

| | F_{mean} [N] | σ [N] | Statistical F_{max} [N] | Statistical F_{min} [N] | Actual F_{max} [N] | Actual F_{min} [N] | V_{max} At support [mm] | LOC [%] |
|---|-------------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|------------|
| EN 50319 | 110 ~120 | 32 ~40 | 210 ~230 | -5 ~20 | 190 ~225 | 30 ~55 | 55 ~65 | 0 |
| Wilson theta method (time step=7.5e-4) | 118 | 37 | 230 | 7 | 219 | 44 | 58 | 0 |
| Newmark method (time step=1.5e-3) | 116 | 35 | 223 | 10 | 217 | 44 | 58 | 0 |
| Alpha method (time step=1.5e-3, Alpha = -0.1) | 113 | 33 | 212 | 13 | 206 | 41 | 58 | 0 |

* 경간 5, 6에서 데이터 취득하여 처리

3.4 250 km/h 검증

(1) 접촉력

Wilson theta method를 사용하여 관심의 주파수를 20 Hz로 하여 얻은 접촉력 계산 결과는 아래 그림과 같다. 경간 5, 6, 7, 8에서의 접촉력이 경간 2, 3, 4에 비하여 크다는 것을 알 수 있다. 참고모델에서는 전차선로의 감쇠를 0으로 놓고 시뮬레이션 하므로 파동 반사가 접촉력에 미치는 영향이 크다. 경간 5, 6, 7, 8에서의 접촉력이 커진 이유는 반사된 파동과 팬터그래프의 운동이 결합되었기 때문으로 추정한다.

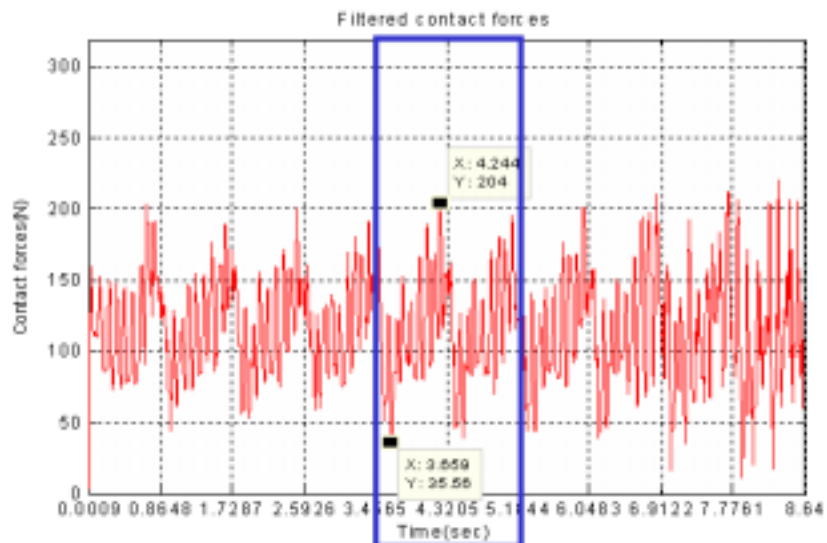


Fig. 14 250 km/h 주행시 접촉력의 변화

계산된 접촉력의 통계적 특성을 살펴보기 위하여 히스토다이어그램을 그리면 아래와 같다. 히스토그램으로부터 접촉력은 정규분포를 갖는다는 것을 알 수 있다.

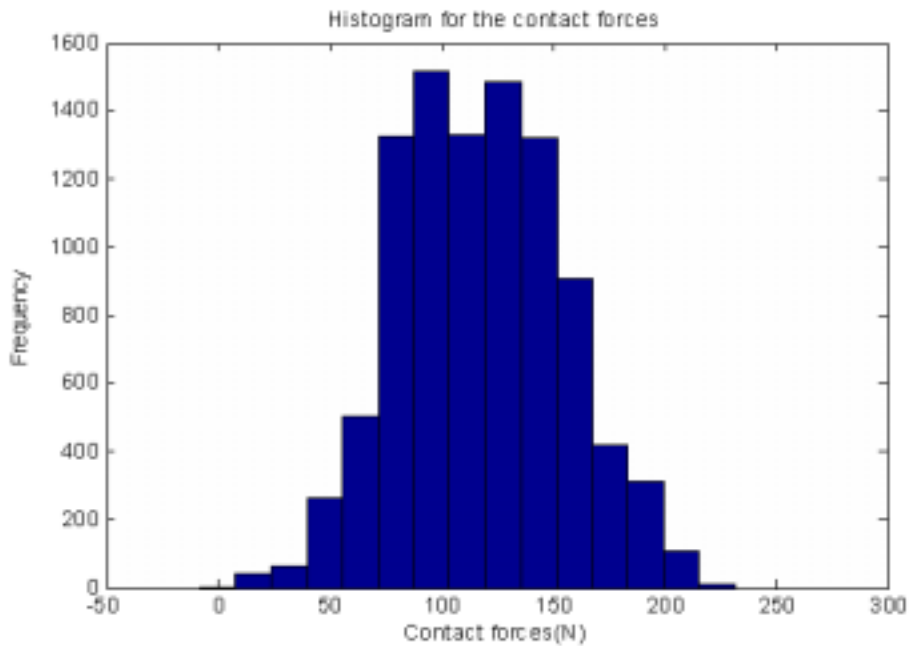


Fig. 15 250 km/h 주행시 접촉력의 통계적 분포

(3) 압상량

팬더그래프 집전판이 전차선을 압상하는 양이 다음 그림에 나와 있다. 경간의 후반부에서 최대값을 갖고 경간의 초반부에서 최소값을 갖는다.

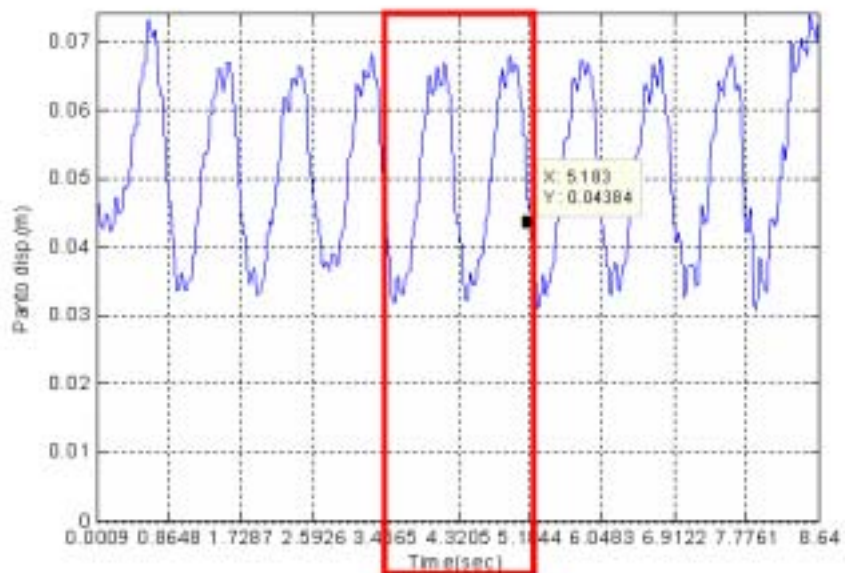


Fig. 16 250 km/h 주행시 압상량 변화

(4) EN 50319와의 비교

아래 표에서 볼 수 있듯이 EN 50319에 제시한 값의 범위를 모두 만족하는 시간적분방법은 없었다. EN 50319가 제시하는 접촉력의 표준편차 경간 5, 6에서 얻은 결과를 데이터 처리에 사용하였는데 이 값들

은 경간 2, 3, 4에서의 결과와 차이가 크다는 점에 주목할 필요가 있다. Alpha 방법을 사용해 얻은 경간 3, 4의 결과를 데이터 처리하면 EN 50319가 제시한 기준을 모두 만족한다. 250 km/h 해석에서는 모든 시간적분방법이 EN 50319보다 다소 보수적인 해석결과를 제시하고 있는데 Alpha 방법이 EN 50319이 제시한 값에 가장 가까운 값을 제공한다.

Table 2. 250 km/h 주행시 해석결과와 검증결과와의 비교

| | F_{mean} [N] | σ [N] | Statistical F_{max} [N] | Statistical F_{min} [N] | Actual F_{max} [N] | Actual F_{min} [N] | V_{max} At support [mm] | LOC [%] |
|---|-------------------|--------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|------------|
| EN 50319 | 110 -120 | 28 -31 | 190 -210 | 20 -40 | 175 -210 | 50 -75 | 48 -55 | 0 |
| Wilson theta method (time step=9e-4) | 118 | 36 | 225 | 11 | 204 | 35 | 44 | 0 |
| Newmark method (time step=1.8e-3) | 116 | 33 | 215 | 18 | 194 | 29 | 44 | 0 |
| Alpha method (time step=1.8e-3, Alpha = -0.1) | 114 | 32 | 209 | 19 | 194 | 35 | 44 | 0 |

* 경간 5, 6에서 데이터 취득하여 처리

4. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 이용한 전차선로-팬터그래프 동적상호작용해석 프로그램을 개발하여 EN 50319에 나와 있는 참고 모델을 대상으로 프로그램의 성능 검증을 수행하였다. 검증과정에서 암시적 적분방법인 Newmark 방법, Wilson theta 방법, α 방법을 적용해 보고 그 결과를 EN 규격이 제시한 값과 비교함으로써 전차선로-팬터그래프의 동적상호작용 해석에 적합한 시간적분 방법을 검토하였다.

300km/h 검증에서는 모든 시간적분 방법 즉 Newmark 방법, Wilson theta 방법, α 방법이 EN 규격이 제시한 모든 항목을 만족하였다. 그러나 Wilson theta 방법의 경우 Newmark 혹은 Alpha 방법에 비하여 더 작은 time step이 필요하므로 Newmark 혹은 Alpha 방법이 Wilson theta 방법보다 효율적이라는 것을 알 수 있었다.

250 km/h 검증에서는 EN 규격이 제시한 모든 항목을 만족하는 시간적분 방법은 없었다. 본 연구에서 고려한 시간적분 방법들은 EN 규격보다 보수적인 해석결과를 제시하고 있었으며 α 방법이 가장 EN 규격에 가까운 결과를 제시하고 있었다.

따라서, 향후 유한요소법을 이용한 전차선로-팬터그래프 동적상호작용해석을 할 때 정밀도 및 계산시간을 모두 고려할 때 α 방법을 사용하는 것이 가장 바람직하리라 판단된다.

참고문헌

- [1] Kurt Armbruster, "Modelling and dynamics of pantograph-catenary systems for high speed trains", 1983, MIT
- [2] Gasendo manual, RTRI
- [3] Carsten Nordstrom Jensen, "Non-linear systems with discrete and continuous elements", 1997, ES-Consult
- [4] Robert D. Cook, David S Malkus, and Michael E. Plesha, "Concepts and applications of finite element analysis", 1989, 3ed, John Wiley and Sons