

탄성변형에너지 등가원리 기반 연속체 손상모델에 대한 수치실험 Numerical Experiment for a Strain Energy Equivalence Principle (SEEP)-based Continuum Damage Model

윤덕기* 이우식**
Youn, Deok Ki Lee, Usik

ABSTRACT

A new continuum damage theory (CDT) has been proposed by Lee et al. (1996) based on the SEEP. The CDT has the apparent advantage over the other related theories because the complete constitutive law can be readily derived by simply replacing the virgin elastic stiffness with the effective orthotropic elastic stiffness obtained by using the proposed continuum damage theory. In this paper, the CDT is evaluated by the numerical experiment comparing the mode shapes and natural frequencies of a square plate containing a small line-through crack with those of the same plate with a damaged site replaced with the effective orthotropic elastic stiffness computed by using the CDT.

1. 서론

재료의 파손 과정은 보통 고도로 국부적인 핵형성과 미세 결함이 성장하고 융합하여 거대 결함이 형성되는 것에 따른 탄성 물성치의 일반적인 감쇄현상과 관련하여 가정된다. 이러한 비가역적이고 에너지를 감쇄시키는 미세구조의 재배치를 소위 손상이라고 부른다.

연속체 손상이론(continuum damage theory)의 혁신적인 개념은 Kachanov[1]에 의해 처음 제안되었고, Krajcinovic[2]에 의 책에서는 연속체 손상이론에 대한 더 확장된 개념을 찾을 수 있다. 손상을 표면에 전달되는 응력의 변화보다는 탄성계수의 변화로 해석하는 것은 편리하고 옳은 접근 방식이다. 손상은 재료 물성치를 감쇄시키기 때문에 재료의 응답에 대한 모델링은 구성방정식의 공식에 부합해야 한다. 손상된 탄성체의 구성방정식을 공식화하기 위해서 변형률 등가 원리[3]와 응력 등가 원리[4]를 문헌에서 도입하였다. 1997년에 Lee 등[5]은 탄성변형에너지 등가원리(Strain Energy Equivalence Principle; SEEP)의 개념에 기반한 새로운 연속체 손상이론을 제안하였다. SEEP에서는 국부 손상을 갖는 고체의 재료 체적셀(material volume cell; MVC)와 그것의 등가 연속체 모델(equivalent continuum model; ECM)이 경계에서 같은 전역 변위에 지배를 받을 때 같은 변형에너지를 포함하도록 가정한다. SEEP는 원래의 구성방정식에 나타나는 공칭응력과 변형률을 변화시키거나 재 정의하는 것 없이, 정상 상태(손상이 없는)의 탄성강도를 SEEP에 기반하여 구한 유효 탄성 강도로 간단히 바꿀 수 있다는 명백한 이점이 있다: 이러한 접근은 유효 응력 전달 영역[6]의 감소에 의한 탄성계수 감쇄의 물리적인 해석과 일치한다. [7]에서는 SEEP에 기반한 연속체 손상이론을 평판 내부에 있는 균열의 진화에 성공적으로 적용하였다.

* 인하대학교 기계공학과 석사과정

** 책임저자, 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

본 논문에서는 Lee 등[5]에 의해 제안된 SEEP에 기반한 연속체 손상이론을 평가하였다. 논문의 후반부에서는 작은 선관통형 균열을 가진 평판을 예로 들었다. 예제에서는 균열이 있는 평판과 선관통형 균열이 등가 직교 이방성 탄성 연속체로 대체되는 동일한 평판의 고유진동수를 비교함으로써 SEEP에 기반한 연속체 손상이론을 평가하였다. 고유진동수는 두 경우 모두 유한요소법을 사용하여 수치적으로 계산하였다.

2. SEEP 기반 연속체 손상이론

평면 문제에서 SEEP에 기반한 연속체 손상이론을 유도하기 위해서, 반경 R 에서의 2축 수직응력(σ_1 과 σ_2)과 평면 내의 전단응력(σ_6) 하에 있는 선관통형 균열을 포함하는 2차원(2D)의 등방성 탄성체를 생각한다. 우선 2D 탄성체에서 MVC를 분리한다. MVC는 국부적인 손상을 포함하고 국부 손상을 등가적인 선관통형 균열(간단히, 선형균열)로 간주한다. $2a$ 길이의 선형균열의 중심은 균열 좌표계(1-2)의 원점에 위치하며 선형균열의 방향은 좌표 1의 방향이다. 손상이 있는 MVC는 SEEP에 기반한 유효 탄성 컴플라이언스를 결정함으로써 ECM으로 모델링될 것이다.

손상이 없는 등방성 재료에 대한 응력-변형률 관계식은 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$ 에서 등방성 탄성 컴플라이언스 $\mathbf{S} = S_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$)로 쓸 수 있다. ECM에서의 응력-변형률 관계는 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_d\boldsymbol{\sigma}$ 에서 유효 (손상이 있는) 탄성 컴플라이언스 $\mathbf{S}_d = S_{dij}$ ($i, j = 1, 2, 6$)로 쓸 수 있다. 여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 과 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 각각 평면 문제에서의 변형률과 응력이다. ECM으로 표현되는 거시적인-거동이 손상이 있는 MVC의 거동과 같아야 하기 때문에, 두 모델이 같은 반경 R 에서 동등한 응력분포 $\boldsymbol{\sigma}$ 를 받을 때, 동등한 변형에너지를 갖도록 유효 탄성 컴플라이언스를 결정할 수 있다. 따라서 손상을 갖는 MVC에 포함된 변형에너지 V_d 와 ECM에서의 변형에너지 V_{eq} 가 같음을 이용하여 SEEP는 ECM의 유효 탄성 컴플라이언스를 제공한다. 즉,

$$V_{eq}(\mathbf{S}_d; \boldsymbol{\sigma}) = V_d(\mathbf{S}, D; \boldsymbol{\sigma}) \quad (1)$$

여기서 $D = (a/R)^2$ 은 스칼라 손상 변수이고 a 는 선형 손상 길이의 반을 나타낸다.

ECM에 저장될 수 있는 변형에너지 V_{eq} 는 다음과 같다.

$$V_{eq} = \frac{1}{2} \pi R^2 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S}_d \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

MVC에 저장될 수 있는 변형에너지는 파괴역학에 의해서 다음과 같이 주어진다.

$$V_d = \frac{1}{2} \pi R^2 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \pi a^2 \boldsymbol{\sigma}^T \Delta \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \pi R^2 \boldsymbol{\sigma}^T \hat{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

첫 번째 항은 손상이 없는 MVC의 변형에너지를 나타내고, 두 번째 항은 균열을 형성할 때 방출되는 변형에너지인 균열에너지를 나타낸다. Sih와 Liebowitz[8]의 연구에서, 대칭행렬 $\Delta \mathbf{S} = \Delta S_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$)의 각 성분을 $\Delta S_{11} = S_{11}e_{11}$, $\Delta S_{22} = S_{22}e_{22}$, $\Delta S_{12} = S_{12}e_{12}$, $\Delta S_{66} = S_{66}e_{66}$ 라고 하였다. 특히 선형 균열의 경우에는 $e_{11} = e_{12} = 0$, $e_{22} = 2$, $e_{66} = 1/(1+\nu)$ 이다. 식 (2)와 식 (3)을 식 (1)에 대입하면, ECM에 대한 유효 탄성 컴플라이언스 \mathbf{S}_d 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} S_{d11} &= \frac{1}{E}(1 + e_{11}D), & S_{d22} &= \frac{1}{E}(1 + e_{22}D), & S_{d66} &= \frac{1}{G}(1 + e_{66}D), & S_{d12} &= -\frac{\nu}{E}(1 + e_{12}D), \\ S_{d16} &= S_{d26} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 등방성 탄성 컴플라이언스 S_{ij} 는 관련된 공학 상수인 E , G , ν 로 대체될 수 있다. 식 (4)는 선형 균열을 포함하는 MVC가 직교이방성 물질로 효율적으로 거동함을 명백히 보여준다. 탄성 컴플라이언스와 공학 상수 사이의 관계를 이용하여[9], ECM에 대한 유효 공학 상수를 식 (4)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$E_1 = \frac{E}{1+e_{11}D} = E, \quad E_2 = \frac{E}{1+e_{22}D} = \frac{E}{1+2D}, \quad G_{12} = \frac{G}{1+e_{66}D} = \frac{G}{1+D/(1+\nu)},$$

$$\nu_{12} = \nu \left(\frac{1+e_{12}D}{1+e_{11}D} \right) = \nu, \quad \nu_{21} = \nu \left(\frac{1+e_{12}D}{1+e_{22}D} \right) = \nu \left(\frac{1}{1+2D} \right) \quad (5)$$

3. 수치예제

제안된 연속체 손상이론을 평가하기 위해서, 양단이 단순 지지된 등방성 정사각형 평판을 생각하였다. 평판의 크기는 $0.3 \times 0.3 \times 0.003$ m, 탄성계수(E)는 69.5 GPa, 푸아송비(ν)는 0.33, 밀도(ρ)는 2705 kg/m³이다. 첫 번째 평판은 중앙에 선관통형 균열을 가지며, 손상과 x축과의 각도는 θ 로 표현하였다. 선관통형 손상의 길이는 0.02 m, 너비는 0.001 m 이다. 두 번째 평판은 첫 번째 평판과 같으나 선관통형 균열은 연속체 손상이론에 의해 계산된 유효 직교 이방성 탄성 물성치의 등가 연속체 손상을 갖는 정사각형의 MVC로 대체된다. 등가 연속체 손상을 포함한 정사각형 MVC의 크기는 0.032×0.032 m 이고, 유효 손상 크기(D)는 0.31이다.

두 평판에 대한 모드해석을 하기 위해 유한요소해석 소프트웨어인 ANSYS[®] 를 사용하였다. SHELL63의 요소를 두 평판에 적용하였고, 더 나은 유한요소해석 결과를 위해 선관통형 균열의 양 끝 부분과 MVC의 내부와 경계에서는 매우 미세한 메시를 사용하였다. 모드해석은 균열각도(θ)를 변화시키면서 수행하였다.

Fig. 1의 첫 번째 행은 균열각도(θ)가 0°에서 45°로 변화함에 따른 선관통형 균열을 갖는 첫 번째 평판의 고유모드 (2,1)의 변화를 보여준다. 반면에 두 번째 행은 등가 연속체 손상으로 대체된 두 번째 평판의 고유모드 변화이다. Fig. 1의 첫 번째 행은 고유모드 (2,1)의 절선이 균열 각도(θ)에 따라 회전하고 있음을 명백히 보여주고 있다. $\theta = 0^\circ$ 에서의 고유모드 (2,1)가 손상이 없는 등방성 평판의 모드형상과 같다는 사실을 주목하라. Fig. 1의 두 번째 행에서는 MVC의 재료 좌표계 (1-2)가 균열 각도(θ)의 변화에 대응하여 회전함에 따라 연속체 손상 모델의 고유모드 (2,1)의 절선이 회전한다는 사실을 보여준다. 이것은 유효 직교 이방성 재료 물성치로 표현되는 선관통형 균열에 대한 등가 연속체 손상 모델이 선관통형 균열의 방향성을 포착하는데 있어서 명백히 성공적이라는 사실을 입증한다.

Fig. 2는 선관통형 균열을 갖는 평판과 등가 연속체 손상으로 대체된 평판에서 모드 (2,1)의 균열 각도에 따른 고유진동수의 변화를 보여준다. 두 평판에 대해서, Fig.2에서는 고유진동수가 손상 각도의 변화에 따라 명백히 같은 패턴으로 변화함을 보여준다. 이 결과로 선관통형 균열에 대한 등가 연속체 손상 모델이 선관통형 균열의 방향성을 성공적으로 포착한다는 사실을 입증할 수 있다.

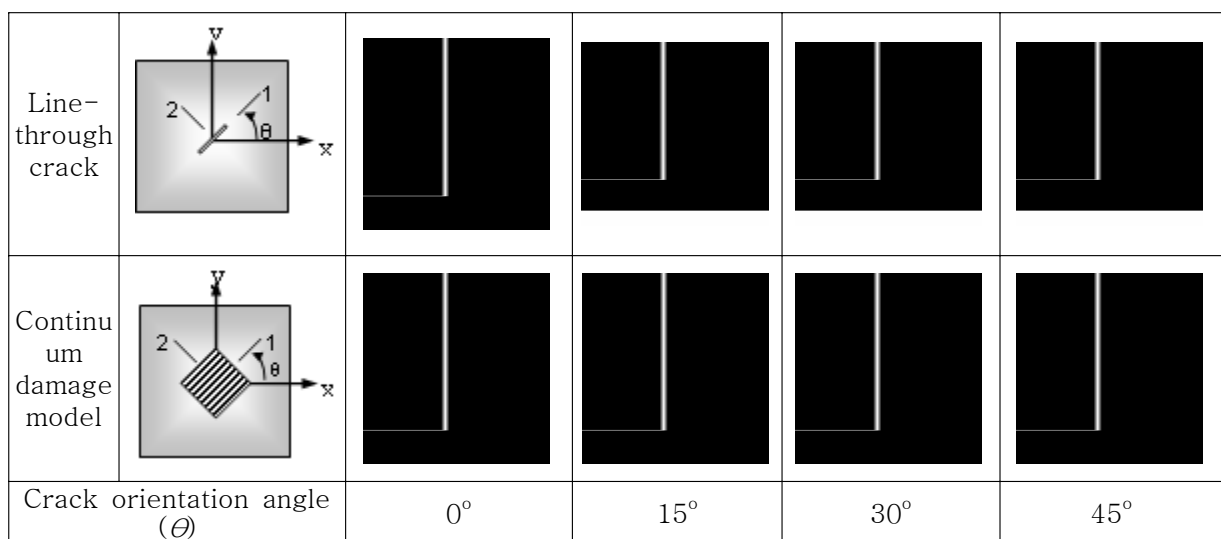
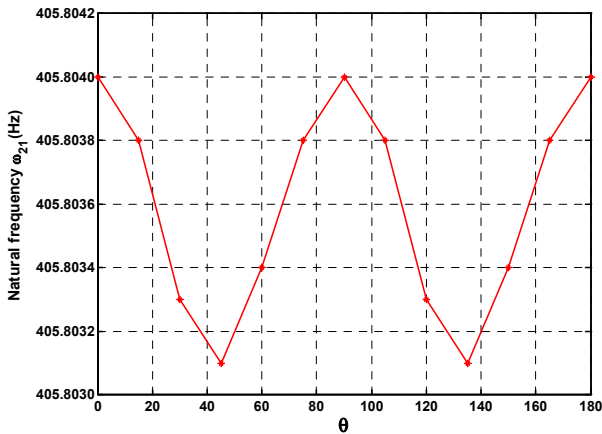
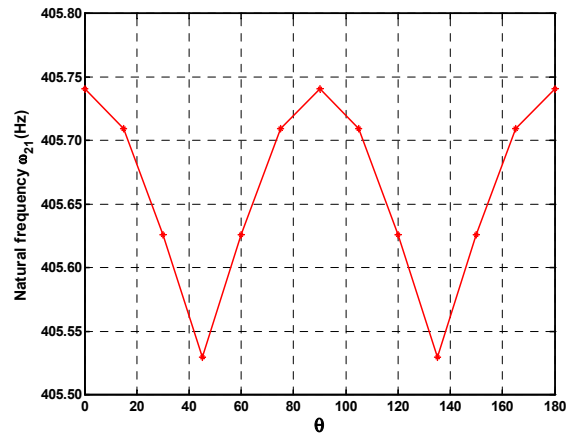


Fig. 1 Mode shape (2,1) for a simply-supported square plate with a damage vs. the crack orientation angle : (upper row) a line-through crack; (lower row) its equivalent continuum damage model.



(a) Line-through crack



(b) Continuum damage model

Fig. 2 Natural frequency ω_{21} for a simply-supported square plate with a damage vs. the crack orientation angle θ : (a) a line-through crack and (b) its equivalent continuum damage model.

4. 결 론

Fig. 1 과 Fig. 2 는 선관통형 균열에 대한 등가 연속체 손상 모델이 선관통형 균열의 방향성을 매우 성공적으로 포착했음을 확실히 보여준다. 그러나 Fig. 2에서 보면 선관통형 균열을 가진 평판의 고유진동수의 변화 크기는 등가 연속체 손상으로 대체된 평판과 다소 차이가 있다. 실제 선관통형 균열과 연속체 손상 모델사이의 이러한 불일치를 명확하게 설명하고 극복하는 것이 후행되는 과제이다.

5. 요 약

이 논문에서는 선관통형 균열을 포함하는 정사각형 평판과 선관통형 균열이 연속체 손상이론을 이용해서 구한 유효 직교 이방성 탄성 물성치의 등가 연속체 모델로 대체된 평판의 모드형상과 고유진동수를 비교하여 SEEP에 기반하여 Lee 등이 [5] 제안한 연속체 손상이론을 검증하였다.

후 기

본 논문은 2006년도 인하대학교 지원에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. L.M. Kachanov: Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otd Tekh Nauk No. 8(1958), p. 26-31.
2. D. Krajcinovic: Damage Mechanics. (Elsevier Science, New York 1996).
3. J. Lemaitre: J. of Eng. Mater. Tech. Vol. 107 (1985), p. 83-89.
4. J.C. Simo and J.W. Ju: Int. J. Solids Struct. Vol. 23 (1987), p. 821-869.
5. U. Lee, G.A. Lesieutre and L. Fang: Int. J. Solids Struct. Vol. 34 (1997), p. 4377-4397.
6. V.A. Lubarda, D. Krajcinovic and S. Mastilovic: Eng. Fracture Mech. Vol. 49 (1994), p. 681-699.
7. U. Lee: Int. J. Damage Mech. Vol. 8 (1999), p. 138-152.
8. G.C. Sih and H. Liebowitz, in: Fracture, Academic Press, New York (1967).
9. S.G. Lekhnitskii: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body (Holden-Day, Inc., San Francisco 1963)