

도파관 스텝 관점에서의 모드정합법 경계조건

Boundary conditions of mode-matching technique in terms of a waveguide step

조용희
목원대학교

Cho Yong-Heui
Mokwon University

요약

전자기파에 대한 경계조건들의 상호 관계와 등가성을 도파관 스텝 관점에서 고찰한다. 본 연구방법의 명확성을 확인하기 위해 구형도파관 스텝의 특성을 경계조건 관점에서 비교한다. 구형도파관 스텝의 특성은 모드정합법을 기준으로 계산한다. 계산의 명확성을 보기 위하여 수렴 특성 계산과 전자장의 분포를 살펴본다.

Abstract

The mutual relations and equivalence between the boundary conditions for electromagnetic waves are discussed in terms of a waveguide step. In order to verify our approach, the reflection characteristics of a rectangular waveguide step are compared with respect to the boundary conditions. The characteristics of a rectangular waveguide step are analyzed with a mode-matching technique. In order to verify our approach, convergence behaviors and electromagnetic distributions are shown.

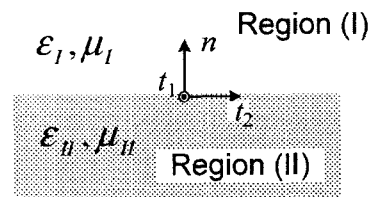
I. 서론

전자과 경계조건(boundary condition)의 적용은 전통적인 전자기장 적용 분야에서 매우 근본적인 문제 중의 하나이다. [1] -[3]에서 경계조건 개념이 매우 활발하게 연구되었다. 경계조건 개념을 일반화하기 위하여 네 가지 벡터 퍼텐셜(vector potential), 고차항 미분(higher order derivative)에 기반을 둔 일반화된 임피던스 경계조건(generalized impedance boundary condition), 미분형태(differential form)를 활용하였다. [4]에서는 경계조건의 구성요소 중에서 접선 경계조건(tangential boundary condition)과 법선 경계조건(normal boundary condition)의 종속 관계를 스톡스 정리(Stokes' theorem)를 이용해 증명을 하였다.

본 논문에서는 접선 경계조건과 법선 경계조건의 상호관계와 등가성(equivalence)을 맥스웰의 미분 방정식(Maxwell's differential equations)을 사용하여 증명하여 표현할 것이다. 이 등가성을 이용하여 다섯 가지의 근본적인 경계조건(essential boundary condition) 형태를 제시할 것이다. 3차원 구형도파관 스텝(rectangular waveguide step)에 대한 전자과 수치계산을 수행하여 다섯 가지 근본 경계조건의 명확성을 보여줄 것이다.

II. 근본 경계조건의 유도

근본 경계조건을 유도하기 위하여 그림 1에 제시된 것과 같은 전자과 경계를 고려한다.



▶▶ 그림 1. 전자과 경계조건의 구조

원천이 없는 매질이라면 아래와 같은 접선 경계조건을 전자과 방정식은 만족해야 한다.

$$\begin{aligned}\bar{E}_t^I &= \bar{E}_t^{II} \\ \bar{H}_t^I &= \bar{H}_t^{II}\end{aligned}\quad (1)$$

두 개의 회전 방정식(curl equation)인 아래의 맥스웰 방정식

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = i\omega \bar{B}_n, \quad \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = -i\omega \bar{D}_n \quad (2)$$

을 이용하고 기본적인 미분적분학을 이용하면

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(E_{t_2}^I - E_{t_2}^{II}) - \frac{\partial}{\partial t_2}(E_{t_1}^I - E_{t_1}^{II}) = i\omega(B_n^I - B_n^{II}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(H_{t_2}^I - H_{t_2}^{II}) - \frac{\partial}{\partial t_2}(H_{t_1}^I - H_{t_1}^{II}) = -i\omega(D_n^I - D_n^{II}) \quad (4)$$

위의 미분식을 얻을 수 있다. 식 (1)을 식 (3), (4)에 대입하면 법선 경계조건의 연속성을 자동적으로 얻을 수 있다.

법선 경계조건의 특성을 파악하기 위하여 맥스웰 방정식 중 두 개의 발산 방정식(divergence equation)을 고려한다. 발산 방정식은

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = -\partial E_n / \partial n + \rho_e / \epsilon \quad (5)$$

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t = -\partial H_n / \partial n + \rho_m / \mu \quad (6)$$

식 (5), (6)에 제시된 발산 방정식은 접선 전자장(tangential field), 법선 전자장(normal field), 원천밀도(source density)로 구성된다. 접선 전자장의 연속성을 가정하면 법선 전자장의 종속적인 관계를 쉽게 얻을 수 있다.

[표 1] 다섯 가지 근본적인 전자파 경계조건

Conditions	Subcondition (a)	Subcondition (b)
(I)	E_{t_1} and H_{t_1}	E_{t_2} and H_{t_2}
(II)	ϵE_n and μH_n	E_{t_1} or E_{t_2} H_{t_1} or H_{t_2}
(III)	$\frac{\partial E_n}{\partial n} - \frac{\rho_e}{\epsilon}$ and $\frac{\partial H_n}{\partial n} - \frac{\rho_m}{\mu}$	E_{t_1} or E_{t_2} H_{t_1} or H_{t_2}
(IV)	ϵE_n and $\frac{\partial H_n}{\partial n} - \frac{\rho_m}{\mu}$	E_{t_1} and E_{t_2}
(V)	$\frac{\partial E_n}{\partial n} - \frac{\rho_e}{\epsilon}$ and μH_n	H_{t_1} and H_{t_2}

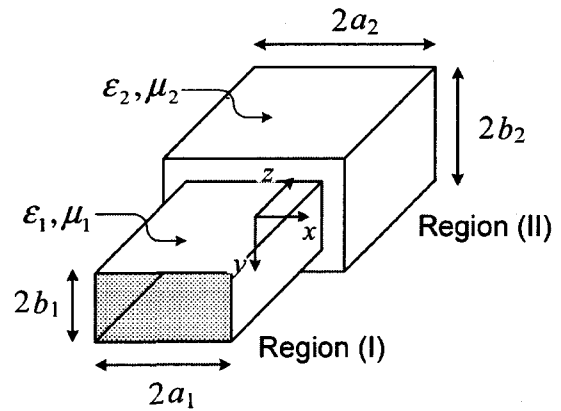
위에 제시된 접선 전자장과 법선 전자장의 관계로부터 표 1.에 제시된 다섯 가지 근본적인 전자장 경계조건을 생성할 수 있다. 근본 경계조건은 두 가지의 세부조건 (a), (b)로 구성된다. 세부조건은 둘 다 만족해야만 온전한 경계조건을 구성할 수 있다. 식 (1)에서 (6)과 함께 맥스웰 방정식을 이용하면 다섯 가지 근본 경계조건이 상호 등가성을 가짐을 쉽게 보일 수 있다.

특히 조건 (III)에서 (V)의 세부조건 (a)에는 법선 경계조건의 법선 미분이 사용되었다. 이를 적용하기 위해서는 가상적인 전하 밀도(virtual electric charge density)와 자하 밀도(virtual magnetic charge density)가 도입되어야 한다. “가

상적”이라는 표현을 쓴 이유는 실제로 경계조건을 적용하는 영역에 전하 혹은 자하가 존재하지 않아도 경계조건의 불연속으로 인해 전하 밀도와 자하 밀도를 반드시 도입해야 하기 때문이다. 이 부분에 대한 구체적인 설명은 다음 절에서 다룬다.

III. 구형도파관 스텝 해석

다섯 가지 근본 경계조건의 등가성을 명확히 확인하기 위하여 그림 2에 제시된 구형도파관 스텝을 고려한다. 구형도파관 스텝의 해석은 전통적인 모드정합법을 사용한다.



▶▶ 그림 2. 구형도파관 스텝의 구조

구형도파관에 입사하는 전자파(incident wave)는 TE(Transverse Electric) 모드라고 가정한다. 입사되는 TE 모드의 모드 번호는 m_s, n_s 라고 가정한다. 제시한 TE 모드는 영역 (I)에서 영역 (II)로 입사하고 있다. 이 경우 입사 자기장(incident magnetic field)과 반사 자기장(reflected magnetic field)을 표현하면

$$H_z^i(\vec{r}) = \cos a_{m_s}^I \cos b_{n_s}^I (y + b_1) e^{i\beta_{m_s n_s}^I z}$$

$$H_z^r(\vec{r}) = -\cos a_{m_s}^I \cos b_{n_s}^I (y + b_1) e^{-i\beta_{m_s n_s}^I z} \quad (7)$$

여기서 반사 자기장은 입사 자기장을 상쇄시키기 위해 사용하였다. 영역 (I)에서 산란하는 전자장(scattered electromagnetic field)은

$$E_z^I(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn}^I \sin a_m^I (x + a_1) \sin b_n^I (y + b_1) e^{-i\beta_{mn}^I z} \quad (8)$$

$$H_z^I(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{mn}^I \cos a_m^I(x + a_1) \cos b_n^I(y + b_1) e^{-i\beta_{mn}^I z} \quad (9)$$

표준 모드정합법에서 영역 (II)에서 산란하는 전자장은 식 (8), (9)와 유사하게 표현할 수 있다.

식 (7)에서 (9)를 이용하면 미지 계수(unknown coefficient)에 대한 산란방정식(scattering equation)을 찾을 수 있다. 이 방정식을 선형대수(linear algebra)를 이용해 미지계수를 찾으려면 경계조건을 만족하는 전자장을 발견할 수 있다. 이 때 사용할 수 있는 경계조건이 표 1에 제시된 근본 경계조건이다.

해석을 위해 입사 전력과 영역 (I), (II)로 반사하는 전력을 계산하면

$$P_i = \frac{\omega \mu_1 a_1 b_1}{2} \frac{\alpha_{m_s} \alpha_{n_s} \beta_{m_s n_s}^I}{k_1^2 - (\beta_{m_s n_s}^I)^2} \quad (10)$$

$$P_r = \frac{\omega a_1 b_1}{2} \sum_{m,n} \frac{\beta_{mn}^I}{k_1^2 - (\beta_{mn}^I)^2}$$

$$\left(\epsilon_1 |p_{mn}^I|^2 + \mu_1 \alpha_m \alpha_n |q_{mn}^I - \delta_{mm_s}^{nn_s}|^2 \right) \quad (11)$$

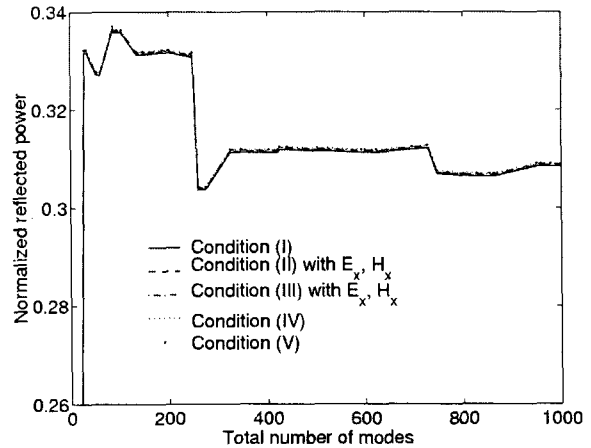
$$P_t = \frac{\omega a_2 b_2}{2} \sum_{m,n} \frac{\beta_{mn}^{II}}{k_2^2 - (\beta_{mn}^{II})^2}$$

$$\left(\epsilon_2 |p_{mn}^{II}|^2 + \mu_2 \alpha_m \alpha_n |q_{mn}^{II}|^2 \right) \quad (12)$$

IV. 수치 해석

다섯 가지 근본 경계조건의 등가성을 확인하기 위해 수치 (10)–(12)를 이용한 수치해석을 수행하였다. 수치해석의 결과는 그림 3에 제시하였다.

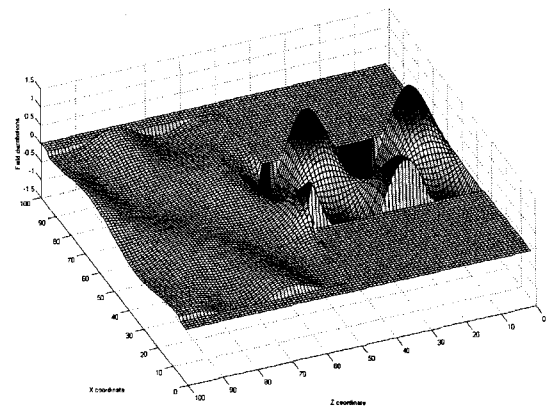
그림 3은 TE₁₀ 모드(mode)가 입사한 구형도파관 스텝의 수렴특성을 나타낸다. 영역 (I)과 영역 (II)의 모드 개수는 상대 수렴(relative convergence)을 보이지 않는 값을 이용해서 선택했다. 수치해석의 결과는 근본 경계조건 (I)–(V)의 결과가 매우 잘 일치함을 보여주고 있다. 근본 경계조건 (II), (III)이 선택된 경우는 E_x, H_x 연속성을 적용하여 모드정합법을 수행하였다. 근본 경계조건 (IV), (V)를 활용하기 위해서는 가상적인 전하 밀도와 자하 밀도가 필요하다. 가상적인 원천밀도의 필요성은 그림 2에 보인 것처럼 모드 정합이 이루어지는 불연속 평면에서 전기장과 자기장의 불연속 때문이다. 전기장



▶▶ 그림 3. 구형도파관 스텝의 구조 수렴 특성($f = 5$ [GHz], $a_1 = 2b_1 = 20.19$ [mm], $a_2 = 2b_2 = 54.61$ [mm])

과 자기장에 불연속이 생기면 맥스웰 방정식 관점에서는 등가 원천이 존재하는 것과 등가이기 때문이다.

그림 4는 구형도파관 스텝의 H_z 자기장 분포를 나타낸다. 경계면에서 자기장의 크기가 모두 연속이므로 그림 3의 수치 해석 명확성을 다시 한 번 확인할 수 있다.



▶▶ 그림 4. 구형도파관 스텝의 H_z 자기장 분포도

참고 문헌

- [1] L. F. Jelsma, E. D. Tweed, R. L. Phillips, and R. W. Taylor, "Boundary conditions for the four vector potential," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.18, No.9, pp.648–650, Sept. 1970.
- [2] T. B. A. Senior and J. L. Volakis, "Derivation and application of a class of generalized boundary conditions," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.37, No.12, pp.1566–1572, Dec. 1989.
- [3] K. F. Warnick, R. H. Selfridge, and D. V. Arnold, "Electromagnetic boundary conditions and differential forms," IEE Proc. - Microw. Antennas Propag., Vol.142, No.4, pp.326–332, Aug. 1995.
- [4] C. Yeh, "Boundary conditions in electromagnetics," Phys. Rev. E, Vol.48, No.2, pp.1426–1427, Aug. 1993.