

이상유동의 동적 전기 임피던스 가시화에 대한 전류패턴의 영향

정순일*, U.Z. Ijaz**, A.K. Khambampati**, 김신**, 김경연**, 김민찬***

Effect of input current patterns on dynamic electrical impedance imaging of two-phase flows

Soon Il Chung*, U.Z. Ijaz**, A.K. Khambampati**, Sin Kim**, Kyung Youn Kim**,
Min Chan Kim

Keywords : Two-phase flow, Electrical impedance tomography, Dynamic imaging, Input current patterns

Abstract

In electrical impedance tomography (EIT) an array of electrodes is attached on the boundary of an object and small alternating currents are injected through these electrodes, and then the resulting voltages are measured. An estimation for the cross-sectional resistivity distribution in the object is obtained by using these current and voltage data in a nondestructive manner. In this paper, the electrical impedance imaging of two-phase flows undergoing rapid transient is considered with a special emphasis on the effect of the current pattern on the image reconstruction. The trigonometric current pattern, which is commonly used in the conventional static electrical impedance imaging, shows poor performance in case of the dynamic imaging considered in this work. Extensive numerical experiments are conducted with various kinds of current patterns and their effects on the image reconstruction performance are examined.

1. 서론

전기 임피던스 단층촬영법(electrical impedance tomography; EIT)은 시스템 구현 시에 하드웨어 비용이 비교적 저렴하고, 비파괴적인 방법으로 측정 대상물에 대한 임피던스 추정이 가능하므로, 의공학, 지질학 및 재료 공학 등에서 모니터링 도구로 주목받고 있다. 특히, X-ray 및 MRI 단층촬영법에 비해 아직 복원된 영상의 공간 해상도(spatial resolution)는 떨어지지만, 순간 해상도(temporal resolution)가 뛰어나고 인체에 대한 안정성이 보장됨은 물론, 임피던스 특성 파악이 가능하므로, 의공학 분야와 공정 단층촬영 (process tomography) 분야에 그 이용 범위가 확대될 것으로 판단된다. 본 논문에서는 2상유동장의 상분포를 가시화하기 위해 EIT 도입하였으며, 2상유동장이 빠른 전이를 겪고 있어 기존의 정적 EIT (static EIT) 기법으로는 영상복원이 불가능하여 동적 EIT (dynamic EIT) 기법을 도입하였다. 그리고 전류 주입 패턴이 영상복원에 상당한 영향을 미치므로 흔히 사용되는 몇 가지 전류 주입 패턴에 대해 각 방법이 동적 EIT 영상복원에 미치는 영향을 평가하였다.

2. EIT의 기본원리

EIT는 측정하고자 하는 계에 약한 전류를 흘려주고 계의 경계면의 여러 위치에서 전압을 측정하여 물체 내부의 저항 분포를 예측하여 물체 내부의 단층 영상을 얻는 기술이다. EIT 시

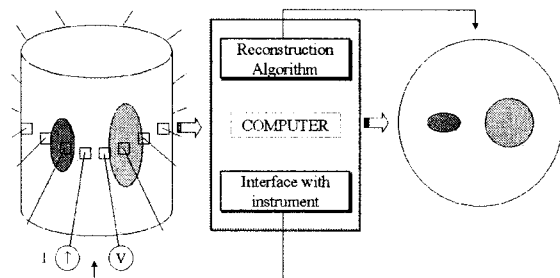


Fig.1. Schematic diagram of EIT image reconstruction system.

스템은 Fig.1에서 보는 바와 같이 신호를 입력하고 측정하는 하드웨어부와 측정된 전압을 이용하여 표적의 저항률 분포를 계산하는 영상 복원 알고리즘으로 구성된다. 경계면에서 측정된 전압을 이용하여 계의 내부 저항 분포를 얻는 영상 복원 알고리즘은 계의 경계면에서 여러 개의 전극을 통해 전류를 주입하고 내부 저항 분포의 함수에 따라 경계면에 유도되는 전압을 계산하는 정 문제(forward problem)와 역으로 경계면에 유도된 전압 값을 이용하여 계 내부의 저항 분포를 추정하고 계의 영상을 복원하는 역 문제(inverse problem)로 이루어진다. 정 문제와 역 문제에 대한 자세한 설명은 아래에 주어진다.

2.1 정 문제

계의 경계면에 여러 개의 전극을 통해 전류를 주입하고 이미 알고 있는 저항 분포의 함수로써 경계면에 유기되는 전압은 다

* 제주대학교 에너지공학과, soonil@cheju.ac.kr

음과 같이 Neumann형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식으로 기술된다. 본 연구에서는 전극과 내부와의 접촉 저항을 고려한 완전 전극 모델(complete electrode model)을 고려하였다.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u + z_l \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial v} = U_l \quad \text{on } e_l, l=1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\int_{e_l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial v} dS = I_l \quad l=1, 2, \dots, L \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (4)$$

여기서 Ω , $\partial\Omega$, ρ , e_l , z_l , U_l , v , L 은 각각 물체의 내부 영역, 물체의 경계면, 내부저항, l 번째 전극, l 번째 전극에서의 접촉 저항, l 번째 전극에서의 측정 전압, 법선 벡터, 전극 수이다. 위의 조건에 부가하여, 해의 존재성과 유일성을 보장하기 위하여 위의 경계 조건에 키르히호프의 법칙(Kirchhoff's law)을 만족하는 주입 전류 조건과 측정 전압에 대한 조건을 부가한다.

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad (6)$$

식 (1)-(6)으로 주어지는 방정식의 해석적인 해는 구할 수 없으므로 수치적 방법인 유한 요소법(Finite Element Method; FEM), 유한 차분법(Finite Difference Method; FDM), 경계 요소법(Boundary Element Method; BEM)등이 사용되고 있으며, 본 논문에서는 FEM을 사용하여 해를 구하고 있다. FEM에서는 계산 영역 Ω 를 매우 작은 요소로 세분하고 각 요소내의 저항 값이 일정하다고 가정하여 내부의 노드의 전압 u 를 다음과 같이 계산한다.

$$Y u = c \quad (7)$$

여기서, stiffness matrix $Y \in R^{M \times M}$ 는 저항률 분포의 함수이며, $c \in R^{M \times 1}$ 는 force vector로 주입 전류 패턴(pattern)의 함수이고, M 은 FEM의 총 노드수이다.

2.2 역 문제와 확장 칼만 필터

계의 경계면에 전극을 통해 주입한 전류 패턴과 경계면의 전극에 유기되는 전압값을 이용하여 내부의 저항률을 추정하는 과정을 역 문제라 한다.

미지 표적의 저항률 분포 $\rho_k \in R^{N \times 1}$ 를 시스템의 상태 변수로 설정하면 이산 시간 상태 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\rho_{k+1} = F_k \rho_k + w_k \quad (8)$$

여기서 $F_k \in R^{N \times N}$ 는 상태 천이 행렬로써 일반적으로 프로세스 모델로부터 구해진다. N 은 FEM의 총 요소 수이다. 이때 $F_k = I_N$ (단위행렬)이면 random walk 모델이 된다. 그리고 $w_k \in R^{N \times 1}$ 는 다음과 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안(white Gaussian) 프로세스 잡음이라 가정한다.

$$\Gamma_k^w = E[w_k w_k^T] \quad (9)$$

한편, $U_k \in R^L$ 이고 $V_k \in R^L$ 로 다음과 같이 정의된다.

$$U_k = [U_k^1 U_k^2 \dots U_k^L]^T \text{ and } V_k = [V_k^1 V_k^2 \dots V_k^L]^T \quad (10)$$

이것들은 각각 k 번째 주입되는 전류에 의해 경계 전극에서 유도되는 측정된 전압과 계산된 전압이라고 두면 측정 방정식은 다음과 같이 내부의 저항률 분포의 비선형 함수로 기술될 수 있다.

$$U_k = V_k(\rho_k) + v_k \quad (11)$$

여기서 v_k 는 다음과 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안 측정 잡음이라 가정한다.

$$\Gamma_v = E[v_k v_k^T] \quad (12)$$

식 (11)을 반복 연산 과정에서 갱신되는 저항률 값 $\rho_{k|k-1}$ 에 대해 1차 테일러 전개하면 다음과 같이 선형화 할 수 있다.

$$U_k = V_k(\rho_{k|k-1}) + J_k(\rho_{k|k-1}) \cdot (\rho_k - \rho_{k|k-1}) + H.O.T_s + v_k \quad (13)$$

여기서 H.O.Ts는 고차항으로 부가 잡음(additive noise)로 생각할 수 있다. $J_k(\rho_{k|k-1}) \in R^{L \times N}$ 은 다음과 같이 정의되는 jacobian 행렬이다.

$$J_k(\rho_{k|k-1}) \equiv \left. \frac{\partial V_k}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_{k|k-1}} \quad (14)$$

식 (13)에서 의사 측정치(pseudo-measurement) y_k 를 다음과 같이 정의하면,

$$y_k \equiv U_k - V_k(\rho_{k|k-1}) + J_k(\rho_{k|k-1}) \rho_{k|k-1} \quad (15)$$

다음과 같은 선형화된 의사 측정 방정식으로 전개할 수 있다.

$$y_k = J_k(\rho_{k|k-1}) \rho_k + \bar{v}_k \quad (16)$$

여기서 \bar{v}_k 는 측정오차와 선형화 오차를 함께 고려한 것으로 다음과 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안 측정 잡음이라 가정한다.

$$\Gamma_k = E[\bar{v}_k \bar{v}_k^T] \quad (17)$$

식 (8)과 식 (16)로 구성되는 동적 모델에 대한 EKF는 다음과 같이 설정되는 비용 함수(cost functional)를 최소화하는 ρ_k 을 구하는 방법으로 요약될 수 있다.

$$G^a(\rho_k) = \frac{1}{2} \left\{ \|\rho_k - \rho_{k-1}\|_{C_{k-1}^{-1}}^2 + \|y_k - J_k(\rho_{k-1})\rho_k\|_{(\Gamma_k)^{-1}}^2 \right\} \quad (18)$$

여기서 $C_{k-1} \in R^{N \times N}$ 은 오차 공분산 행렬이고 다음과 같이 정의 된다.

$$C_{k-1} \equiv E[(\rho_k - \rho_{k-1})(\rho_k - \rho_{k-1})^T] \quad (19)$$

한편, 이때 설계된 EKF는 칼만 이득 행렬 계산 시에 이노베이션 프로세스(innovation process) 공분산 행렬의 역행렬을 구해야 하는데 이는 EIT 역문제의 부정치성으로 인하여 공분산 행렬의 상태수가 매우 큰 경우가 발생하므로 역행렬 계산 시에 부정확성을 초래한다. 이러한 부정치성 문제를 극복하기 위해 비용함수에 다음과 같은 제약조건(constraint)을 추가한 spatial regularization 기법을 사용한다.

$$G^b(\rho_k) = \frac{1}{2} \left\{ \|\rho_k - \rho_{k-1}\|_{C_{k-1}^{-1}}^2 + \|y_k - J_k(\rho_{k-1})\rho_k\|_{(\Gamma_k)^{-1}}^2 + \alpha \|\mathcal{R}\rho_k\|^2 \right\} \quad (20)$$

여기서 α 는 regularization 파라미터이고 \mathcal{R} 은 regularization 행렬이며 본 연구에서는 일반화된 Tikhonov 기법(generalized Tikhonov technique : GTT)을 사용하였다. GTT에서는 FEM의 인접한 각 요소들 사이에 smoothness 가정을 전제로 다음과 같이 regularization 행렬을 구한다.

$$R_i = (0, 0, \dots, 0, -1, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \quad (21)$$

여기서 R_i 는 행렬 \mathcal{R} 의 i 번째 row이고, 3은 i 번째 column에 위치하며 -1은 FEM mesh에서 i 번째 요소와 인접하는 요소들의 위치에 있게 된다.

확장된 의사측정벡터 $\overline{y}_k \in R^{(L+M) \times 1}$ 및 의사행렬 $H_k \in R^{(L+M) \times N}$ 을 다음과 같이 정의하면,

$$\overline{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad H_k = \begin{pmatrix} J_k \\ \sqrt{\alpha} R \end{pmatrix} \quad (22)$$

식 (20)의 비용함수는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$G(\rho_k) = \frac{1}{2} \left\{ \|\rho_k - \rho_{k-1}\|_{C_{k-1}^{-1}}^2 + \|\overline{y}_k - H_k \rho_k\|_{(\Gamma_k)^{-1}}^2 \right\} \quad (23)$$

여기서 $\Gamma_k \in R^{(L+M) \times (L+M)}$ 은 확장된 공분산 행렬이고 다음과 같이 정의 된다.

$$\Gamma_k \equiv \text{Blockdiag}[\overline{\Gamma}_k, I_N] \quad (24)$$

식 (23)을 최소화하는 Extended Kalman Filter는 다음과 같이 측정갱신 단계(measurement updating step; filtering step)와 시간갱신 단계(time updating step; prediction step)의 반복 순환 과정으로 구성되어 있다.

(i)측정갱신 단계

$$G_k = C_{k-1} H_k^T [H_k C_{k-1} H_k^T + \Gamma_k]^{-1} \quad (25a)$$

$$C_{k,k} = (I - G_k H_k) C_{k-1} \quad (25b)$$

$$\rho_{k,k} = \rho_{k-1} + G_k [y_k - H_k \rho_{k-1}] \quad (25c)$$

(ii)시간갱신 단계

$$C_{k+1,k} = F_k C_{k,k} F_k^T + \Gamma_k^w \quad (26a)$$

$$\rho_{k+1,k} = F_k \rho_{k,k} \quad (26b)$$

3. 전류 패턴

전류 입력 패턴에는 adjacent method, opposite method, multi-reference method, adaptive method 등이 있다. Adjacent method는 전류는 이웃하는 두 전극을 통하여 주입되고, 전압은 전류가 주입되는 전극 쌍을 제외한 모든 전극 쌍에 대하여 측정된다. 주입되는 전류는 대부분이 시스템의 경계 근처를 통하여 흐르게 되므로 경계면 근처에서는 저항률의 변화에 대한 민감도가 좋다. Opposite method는 전류가 서로 대칭인 두 전극을 통하여 주입되고, 전압은 전류 주입 전극에 이웃하는 전극을 기준 전극으로 하여 측정된다. 표적이 전극에서 멀리 떨어질수록 민감도가 좋다. Multi-reference method는 하나의 기준 전극을 제외한 나머지 전극에 전극 개수만큼의 전류 원을 이용하여 동시에 전류가 주입되며 기준 전극에 대한 전위차를 모든 전극에 대해 동시에 측정한다. 그리고 나서는 기준 전극을 바꾸어 가면서 측정을 계속한다. 주입전류의 크기를 적절히 선택하면 대체로 균일한 분포를 제공할 수 있으므로 좋은 민감도를 얻을 수 있다. Adaptive method에서는 앞에서 언급한 방법과는 달리 미리 정해진 전류 주입 패턴을 사용하지 않고 저항 분포에 따라 최적의 민감도를 반복계산을 통해 찾아가는 방법으로 optimal current method라고도 한다.

Multi-reference의 한 종류인 trigonometric 전류 입력 패턴은 정적과 동적영상복원에 자주 사용된다. 이 방법은 32개의 전극에 각기 상이한 전류를 입력하되 전체적으로 전류의 세기 분포를 Fourier 급수로 표현한 것이고 전류 패턴은 다음과 같다.

$$I_l^k = \begin{cases} I_0 \cos(k \xi_l) & l=1, 2, \dots, L, \quad k=1, 2, \dots, L/2 \\ I_0 \sin(k \xi_l) & l=1, 2, \dots, L, \quad k=1, 2, \dots, L/2-1 \end{cases}$$

여기서 L 은 전극수이고 $\xi_l = 2\pi l/L$ 이다.

4. 수치실험

본 논문에서는 동적 영상복원을 위해 복원능력이 뛰어난 확장 칼만 필터(EKF)를 사용하였다. 동적영상은 fig.2와 같이 크기가 큰 표적이 천천히 위로 올라오고 있어서 단면에서 볼 때는 점점 크기가 커지는 형태로 나타났다.

본 연구에서는 정문제를 해결하기 위해 3104개의 요소(N)와 1049개의 노드(M)를 갖는 FEM mesh를 사용하였다. 역문제를 해결하기 위해서는 정문제의 요소 수보다 1/4이 작은 776개의

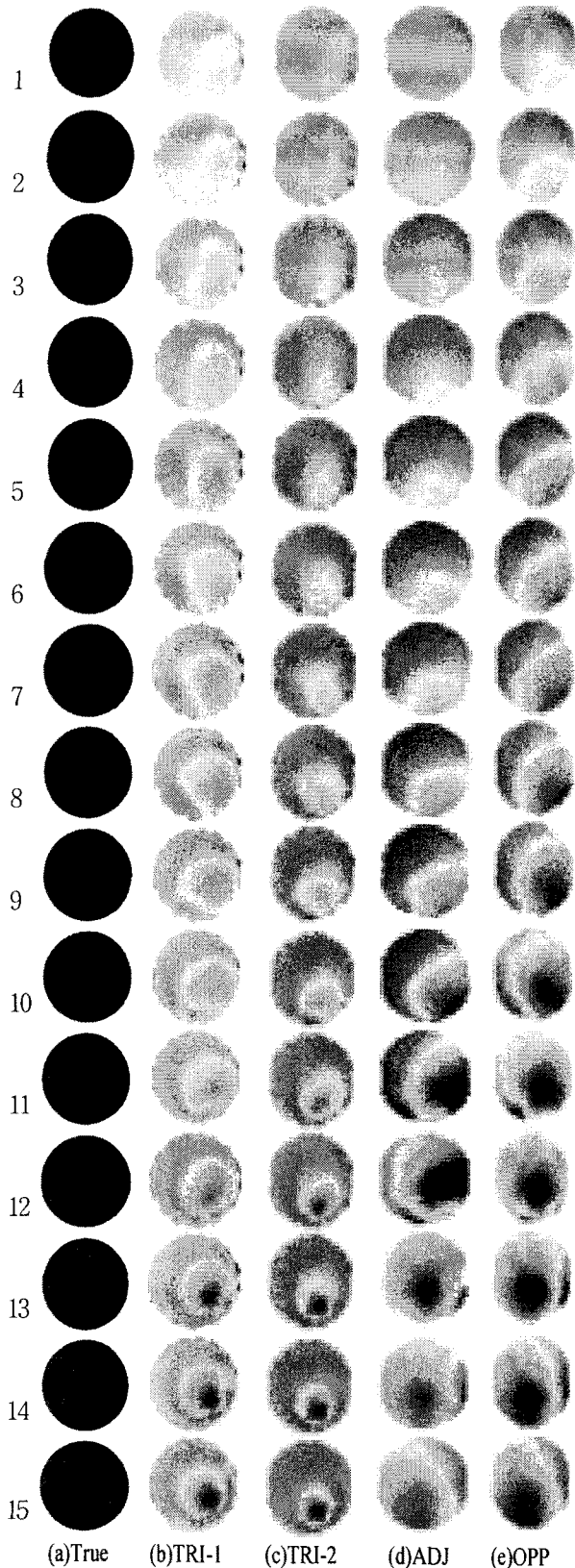


Fig.2.Reconstructed images

요소(N)와 453개의 노드(M)를 갖는 FEM mesh를 사용하였다.

그리고 영상 복원에서는 regularization 파라미터(α)=1, EKF 알고리즘의 프로세스 잡음의 공분산은 $\Gamma_w=0.01I_N$, 측정 잡음의 공분산은 $\Gamma_v=0.001I_L$, 오차 공분산 행렬의 초기치는 $C_{10}=I_N$ 로 설정하였다.

(a)는 실제 이미지를 나타내고 (b)와 (c)는 trigonometric 전류 패턴을 주입한 것으로 각각 $k=1(\text{TRI-1})$, $k=1-2(\text{TRI-2})$ 으로 k값을 주었다. TRI-1과 TRI-2 모두 처음 프레임에서는 낮은 영상을 보여주지만 프레임이 진행하면서 영상 크기와 위치를 대체적으로 잘 보여주고 있다. 그러나 ADJ와 OPP는 영상이 번져 표적의 경계면이 확실치 않다. 그러므로 낮은 모드의 trigonometric 전류 패턴이 동적 영상에 대한 복원 능력이 다른 전류 패턴보다 좋다는 것을 알 수 있었다.

5. 결론

이상유동의 동적 전기 임피던스 가지화에 대한 전류패턴의 영향을 평가하기 위해 여러 가지 전류 패턴을 소개하였고 다양한 수치실험을 수행하였다. 적절한 전류패턴을 선택을 하면 빠른 천이를 겪는 2상유동장의 영상 복원에 동적 EIT의 적용이 가능하다는 것을 알 수 있었다. 결과로부터 trigonometric 전류 패턴이 급변하는 동적 영상 복원에 적절하다는 것을 알 수 있었다.

참고문헌

- [1] J.K. A. SHOLLENBERGER, J. R. TORCZYNSKI, D. R. ADKIN, T. J. O'HERN, and N. B. JACKSON, "Gamma-Densitometry Tomography of Gas Holdup Spatial Distribution in Industrial-Scale Bubble Column," *Chem. Eng. Sci.*, **52**, 2037 (1997)
- [2] J.K. H. CHO, S. KIM, and Y. J. LEE, "A Fast EIT Image Reconstruction Method for the Two-Phase Flow Visualization Method," *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **26**, 637 (1999).
- [3] K. H. CHO, S. KIM, and Y. J. LEE, "Impedance Imaging of Two-Phase Flow Field with Mesh Grouping Algorithm," *Nucl. Eng. Des.*, **204**, 57 (2001).
- [4] K. Y. KIM, B. S. KIM, M. C. KIM, Y. J. LEE, and M.VAUHKONEN, "Image Reconstruction in Time-Varying Electrical Impedance Tomography Based on the Extended Kalman Filter," *Meas. Sci. Technol.*, **12**, 1032 (2001).
- [5] L. M. HEIKKINEN, M. VAUHKONEN, T. SAVOLAINEN, and J. P. KAIPIO, "Modelling of Internal Structures and Electrodes in Electrical Process Tomography," *Meas. Sci. Technol.*, **12**, 1012 (2001).
- [6] L. M. HEIKKINEN, M. VAUHKONEN, T. SAVOLAINEN, K. LEINONEN, and J. P. KAIPIO, "Electrical Process Tomography with Known Internal Structures and Resistivities," *Inverse Prob. Eng.*, **9**, 431 (2001).
- [7] P. R. JOHNSTON and R.M. GULRAJANI, "Selecting the Corner in the L-curve Approach to Tikhonov Regularization," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **47**, 1293 (2000)