

## 등방성 난류에서 침강하는 무거운 입자의 거동

정재달\* · 여경민\*\* · 이창훈\*\*\*

### On behavior of settling heavy particles in isotropic turbulence

Jaedal Jung\*, Kyongmin Yeo\*\* and Changhoon Lee\*\*\*

**Keywords :** Heavy particle(무거운 입자), Inertia effect(관성효과), Gravity(중력), Isotropy(등방성)

#### Abstract

Particle suspension is frequently observed in many natural flows such as in the atmosphere and the ocean as well as in various engineering flows. Recently, airborne micro or nano-scale particles in atmosphere attract much attention from environmental society since small particle cause serious environmental problems in the industrialized areas. Also, the characteristics of such heavy particles' behavior is quite different from its fluid particles because the inertia force and buoyance force acting on the heavy particles are different than those acting on fluid particles. Therefore, our studies is to investigate the characteristics of the behavior of heavy particles considering the inertia effect with or without gravity effect, but do not consider modification of turbulence by the particles, that is one-way interaction. We carried out direct numerical simulation of isotropic turbulence with particles under the Stokes drag assumption for a spherical particle. These results can be used in the development of a stochastic model for predicting particle's behavior.

#### 1. 서론

부유 입자가 있는 난류에 대한 해석은 유체분야에서 매우 흥미 있는 주제 중 하나이다. 부유되어 있는 입자들은 난류의 확산에 영향을 미치고 더불어 난류의 특성의 변화를 일으키기 원인이 된다. 또한 대기, 해수 환경 내의 오염 물질의 확산을 조절하고 예측하는데 있어서 이러한 부유 입자를 가진 난류에 대한 연구는 더욱 중요성을 가진다. 특히, 중력과 같은 외부에서의 힘에 의한 입자의 침강 속도는 입자가 얼마나 오랫동안 부유된 상태를 유지하는 지를 결정하는 중요한 요소이다. 따라서 가장 단순한 형태의 균질성난류라 할 수 있는 등방성난류는 난류가 지니는 보편적인 특성을 잘 설명할 수 있기 때문에 그 희소성에도 불구하고 일찍부터 이러한 조건하에서 입자의 확산에 대한 실험과 수치해석 등이 행하여 졌다.

부유입자에 의한 난류의 확산은 라그랑지안 해석 기법을 도입하여 연구를 진행하여 왔다. 하지만 실험적인 측면에서는 입자의 궤적을 추적하며 통계량을 얻는 것이 실질적으로 불가능하기 때문에 Snyder, Lumley, Wells, Stock은 격자가 생성된 난류 내에서 입자에 대한 난류의 확산 정보를 얻어 내었다. 또한, 직접수치모사(DNS)는 난류 내의 유체입자와 부유된 입자의 라그랑지안 통계량을 얻는데 활용되었다 (Fung and Perkins, Squires and Eaton, Yeung and Pope). Wang & Maxey (1993) 는 관성을 갖고

있는 부유 입자의 평균 침강 속도는 Kolmogorov 크기의 종단 속도와 비교하여 상당부분 증가되었으며, 이 때, 부유 입자들은 소용돌이도가 낮고 변형률 속도가 높은 곳에 주로 응집하는 현상을 수치모사를 통해 관찰하였다. 이 후, Fung(1998)은 선형이 아닌 비선형의 항력을 받는 구형 입자에서의 침강 속도의 변화에 대하여 설명하였다.

부유 입자를 난류에 적용함에 따라 발생하는 현상은 앞에서 언급한 바와 같이 두 가지로 나눌 수 있다. 첫 번째는 난류에 의한 부유 입자의 거동에 대한 변화이고, 두 번째는 부유 입자로 인한 난류 특성의 변화이다(Squires and Eaton, 1990). 본 논문에서는 후자는 무시하고 순수하게 유체 입자가 부유 입자에 미치는 영향만을 고려하여 라그랑지안적 관점에서 Kolmogorov 크기에 비례하는 관성과 종단 속도를 주었을 시 발생하는 유체 입자와 부유 입자의 거동의 변화를 알아보려고 한다. 이를 위해서 등방성 난류에서의 직접수치모사를 수행하였으며 부유 입자의 유무에 따라 비교 분석을 하였고, 각각에 대한 상관관계 또한 제시하였다.

#### 2. 직접 수치 모사

입자유동해석을 위해서 등방성유동에 대한 직접 수치 모사가 수행되었다. Navier-Stokes 방정식의 해를 구하기 위해서 spectral 방법을 사용하였다. 공간 차분에 대해서는 주방향, 횡방향, 수직방향에 대한 dealiased Fourier 방법이 사용되었고, 시간 차분으로는 3차 Runge-Kutta 방법이 사용되었다. 계산 영역은  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$  이며, 사용된 격자계는  $64^3$ 이다.

#### 2.1 지배 방정식

\* 연세대학교, e-russell@yonsei.ac.kr

\*\* Brown Uni. Kyong\_Min\_Yeo@brown.edu

\*\*\* 연세대학교 기계공학과, clee@yonsei.ac.kr

rotational 형태의 Navier-Stokes와 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + H_i + \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

여기서,  $f_i$ 는 외부에서 작용하는 힘을 나타낸다. 작은 스케일의 난류의 특성은 통계학적 균질성, 등방성, 그리고 일반성이다. 균질한 등방성 난류는 난류의 가장 단순한 형태이며 작은 스케일에서의 보편적인 특성을 지니고 있지만 통계학적으로는 고정되어 있지 않다. 그래서 통계학적으로 고정된 속도장을 유지하기 위해 위와 같이 외부에서 힘을 가하게 된다. 본 연구에서는 Eswaran and Pope(1988)가 제시한 Uhlenbeck-Ornstein(UO) random processes에 기초를 둔 forcing 방법을 사용하였다.

## 2.2 입자 추적 기법

### 2.2.1 3-dimensional 4-point Hermite interpolation

일반적으로 입자의 위치는 계산 도메인의 그리드 포인트의 위치와 일치하지 않는다. 그래서 필수적으로 입자의 위치에서의 유체량 즉, 속도, 압력, 가속도 등을 구하기 위해서 정확도가 높은 내삽법을 사용한다. 모든 파수 영역에서의 속도정보를 직접 합을 이용하여 임의의 지점에서의 속도를 구하는 Spectral 내삽법은 가장 높은 정확도를 갖는 방법이지만 그 계산비용적인 측면에 있어서는 비효율적이기 때문에 라그랑지안 통계량을 얻는데 적합성이 떨어진다. 최근에 Choi et al.(2004)은 한 방향에 대한 6th-order 라그랑지안 다항식을 이용한 내삽법과 2-point Hermite 내삽법 등을 비교하여 Chebyshev 다항식을 조합한 4th-order Hermite 내삽법을 제시하였다. 이는 다른 내삽법에 비해 정확도와 시간적인 측면에서 충분한 적합성을 가진다. 그러므로 4-point Hermite 내삽법을 3차원으로 확장하여 입자의 위치에서의 유체의 량을 구하였다.

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^4 u(l, m, n) H_l H_m H_n + \frac{\partial u(l, m, n)}{\partial x} G_l H_m H_n + \frac{\partial u(l, m, n)}{\partial y} H_l G_m H_n + \frac{\partial u(l, m, n)}{\partial z} H_l H_m G_n + \frac{\partial^2 u(l, m, n)}{\partial x \partial y} G_l G_m H_n + \frac{\partial^2 u(l, m, n)}{\partial x \partial z} G_l H_m G_n + \frac{\partial^2 u(l, m, n)}{\partial y \partial z} H_l G_m G_n + \frac{\partial^2 u(l, m, n)}{\partial x \partial y \partial z} G_l G_m G_n, \quad (3)$$

4-point Hermite 내삽법에 대한 기저함수를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= (11\xi^7 - 52\xi^6 + 59\xi^5 + 50\xi^4 - 124\xi^3 + 56\xi^2)/108 \\ H_2(\xi) &= (27\xi^7 - 81\xi^6 - 54\xi^5 + 270\xi^4 + 27\xi^3 - 297\xi^2)/108 + 1 \\ H_3(\xi) &= (-27\xi^7 + 108\xi^6 - 27\xi^5 - 270\xi^4 + 108\xi^3 + 216\xi^2)/108 \\ H_4(\xi) &= (-11\xi^7 + 25\xi^6 + 22\xi^5 - 50\xi^4 - 11\xi^3 + 25\xi^2)/108, \\ G_1(\xi) &= (3\xi^7 - 15\xi^6 + 21\xi^5 + 3\xi^4 - 24\xi^3 + 12\xi^2)h/108 \\ G_2(\xi) &= (27\xi^7 - 108\xi^6 + 54\xi^5 + 216\xi^4 - 189\xi^3 - 108\xi^2)h/108 + h\xi \\ G_3(\xi) &= (27\xi^7 - 81\xi^6 - 27\xi^5 + 189\xi^4 - 108\xi^3)h/108 \\ G_4(\xi) &= (3\xi^7 - 6\xi^6 - 6\xi^5 + 12\xi^4 + 3\xi^3 - 6\xi^2)h/108, \end{aligned} \quad (4)$$

$\xi = (x - x_2)/h, \xi = (x - x_2)/h$  또는  $\xi = (x - x_2)/h$  이고,  $h$  그리드 크기를 나타낸다.

### 2.2.2 유체 입자에 대한 운동 방정식

유체 입자의 운동경로는 입자에 대한 운동 방정식의 적분에 의해 구할 수 있고 다음과 같다.

$$\frac{dX(t, X_0)}{dt} = V(t, X_0), \quad (6)$$

여기서,  $X_0, X, V$ 는 각각 초기위치와 시간  $t$ 에서의 유체입자의 위치와 속도를 나타낸다. Navier-Stokes의 해를 구할 때와 마찬가지로 시간 차분에 대해서는 RK3를 적용하였고, 공간 차분에 대해서는 계산비용을 절감하기 위해 4th-order 중심차분 방법을 사용하였다.

### 2.2.2 부유 입자에 대한 운동 방정식

난류에서 부유 입자에 대한 운동 방정식은 high-order항을 제외하면 다음과 같다.(Maxey & Riley)

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = (m_p - m_f)g_i + m_f \frac{Du_i}{Dt} - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt}(V_i - u_i) - 6\pi a \mu (V_i - u_i), \quad (7)$$

여기서  $m_p$ 는 입자의 질량,  $m_f$ 는 부유 입자가 위치한 곳의 유체의 질량,  $g_i$ 는 중력가속도,  $a$ 는 부유 입자의 반경을 나타낸다. (7)의 오른쪽에 있는 항들을 살펴보면 각각 부력, 유체의 가속도, 부유입자의 질량에 의한 관성력, Stokes 저항을 의미하고 있다. (7)식을  $m_p$ 로 나누고 부유 입자의 밀도가 유체 입자의 밀도보다 충분히 크다고 가정하면 즉,  $\rho_p \gg \rho_f$  이면 무거운 입자에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 단순하게 표현할 수 있다.

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{\tau}(u_i - V_i) + g_i, \quad (8)$$

$\tau (\equiv 2\rho_p a^2 / 9\mu)$ 는 입자의 특성 시간스케일로 입자의 반응시간(response time)이라 한다(Crowe, Sommerfeld & Tsuji, 1993). 입자의 반응시간이 감소함에 따라 (8)식은 수치적인 어려움이 발생한다(Soltani & Ahmadi, 1995). 이러한 문제를 피하기 위해서는

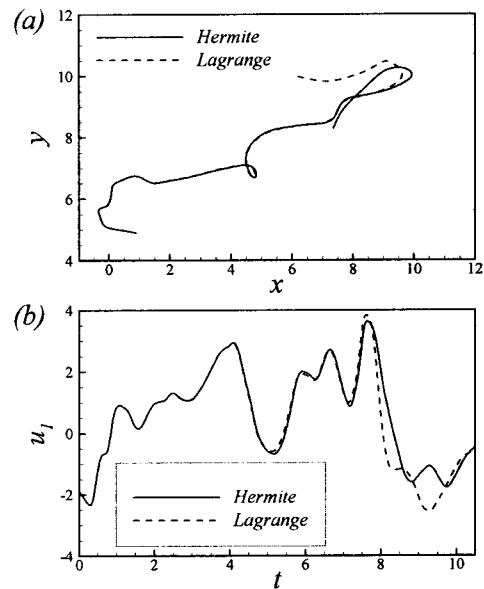


Fig. 1 (a) Sample particle trajectories obtained by Hermite and Lagrangian interpolations on x-y plane and (b) time histories of  $u_1$

운동 방정식의 입자의 속도 대신에 상대 속도의 표현으로 바꾸어 주어야 한다. 중력에 의한 침강을 고려하여 표현한 식은 다음과 같다.

$$\frac{d(W_i - w)e^{t/\tau}}{dt} = -e^{t/\tau} \frac{d(u_i + w)}{dt}, \quad (9)$$

여기서,  $W_i$ 는 유체 입자와 부유 입자와의 상대속도 ( $\equiv V_i - u_i$ ) 나타내고  $w$ 는 침강속도를 의미한다. 그리고 앞에서와 마찬가지로 RK3를 적용하여 계산을 수행하였다.

### 3. 유체 입자에 대한 라그랑지안 분석

내삽법의 정확성을 비교하기 위해서 6th-order 라그랑지안 내삽법과 Hermite 내삽법을 적용하여 입자의 궤적을 확인하였다. Fig 1.은 입자의 궤적과 시간에 따른  $u_1$ 을 보여주고 있다. 초기 시간 때에는 두 내삽법 모두 거의 같은 궤적을 보여주지만 시간이 지난 후에는 유체 입자가 회전운동을 하면서 서로 다른 궤적을 보이기 시작한다. 이와 같이 서로 다른 결과를 보이는 것은 라그랑지안 내삽법이 낮은 정확도를 가지고 있기 때문이다(Choi, Yeo & Lee, 2004).

### 3. 부유 입자에 대한 라그랑지안 분석

부유 입자에 대한 입자 추적 방법을 평가하기 위해서 극단적인  $\tau_p = dt/35$ 인 경우에 대해서 수치해석을 시행하였다. Fig. 2은 시간에 대한 상대속도의 제곱의 평균을 보여주고 있다. 그것에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\langle W_i^2(t) \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (u_i(t, X_0) - V_i(t, X_0))^2 \quad (10)$$

여기서  $N_p$ 는 입자의 개수를 나타낸다.  $\tau_p$ 는  $\tau_\eta$ 의 1000배 만큼 작기 때문에 부유 입자의 거동은 유체 입자 거동과 거의 일치한다. 그리고 본문에 실지는 않았지만 라그랑지안 속도 상관함수 또한 일치함을 확인하였다. 상대속도로부터 입자의 속도를 구하는데 있어서  $\tau_p$ 가 매우 적더라도 수치적으로 안정하고, 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있었다.

Fig 3.는  $\tau_p = 0.1\tau_\eta$ ,  $w/v_\eta = 0, 1, 2, 3$ 인 경우, 중력의 영향을 받는 방향과 그렇지 않은 방향에 대한 부유입자의 속도 상관 관계를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 중력의 영향이 커지면 커질 수록 입자의 속도 상관 관계를 감소하고 있으나

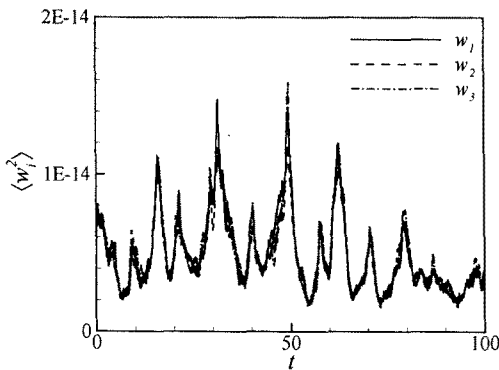


Fig. 2 Time history of mean-square relative velocities for  $Re_\lambda = 47$ .

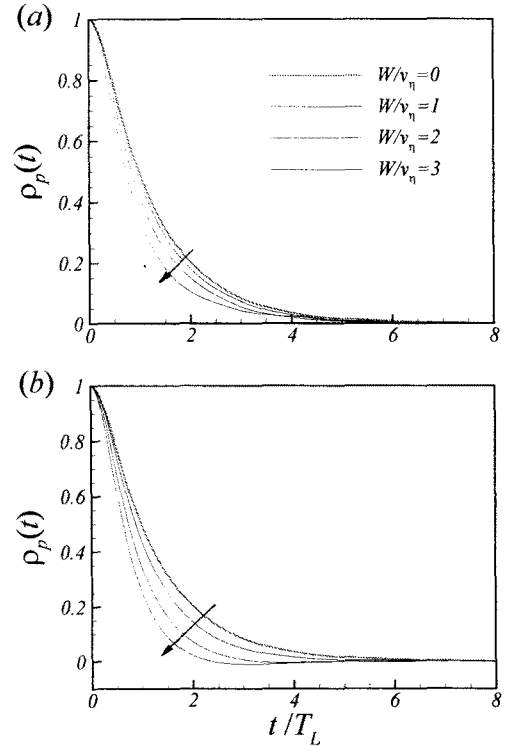


Fig. 3 Effect of settling velocity on the particle Lagrangian velocity autocorrelation for a fixed  $\tau_p = \tau_\eta$  at  $Re_\lambda = 47$ . (a) Settling component, (b) Normal component.

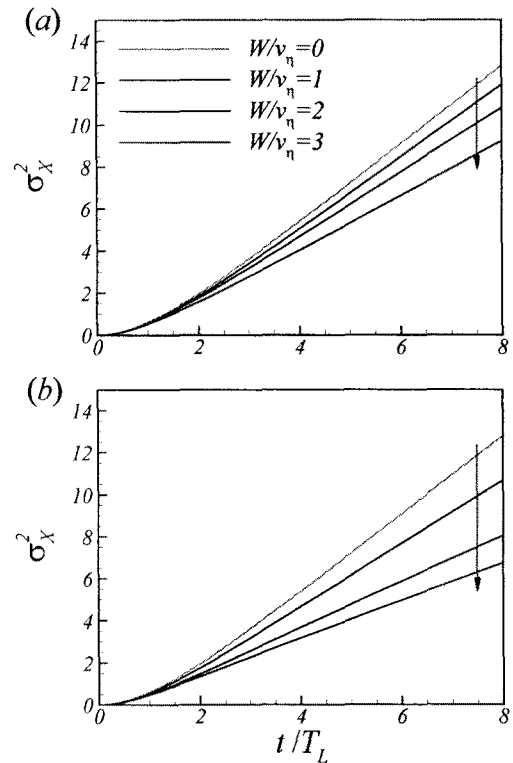


Fig. 4 Mean-square dispersion of settling particles at  $\tau_p = \tau_\eta$ ,  $Re_\lambda = 47$ . (a) Settling component, (b) Normal component.

침강 방향의 상관 관계는 그 외 방향에 비하여 좀 더 유지되는 것을 알 수 있다. 이는 Csanady와 Yudin이 제시한 것과 같이 부유되어 있는 작고 무거운 입자들은 침강하는 속도 즉, 중력의 효과로 인하여 유동장 내의 난류구조와 같은 소용돌이(eddy)들을 뚫고 지나가려 하기 때문이다(Crossing trajectory effect). Fig 4.에서는 부유입자의 확산에 대한 중력의 영향을 보여주고 있다. 중력의 효과가 증가함에 따라서 입자의 확산은 줄어들고 있는 것을 확인 할 수 있다. 이는 Fig.3에서 설명한 바와는 달리 관성효과(Inertia effect)로 인한 것으로 침강 속도가 작용하지 않는 방향에서는 부유입자들이 역류하는 현상이 발생하기 때문이다.

#### 4. 결론

입자가 부유되어 있는 등방성 난류에서 유체 입자가 부유 입자에 미치는 영향을 알아보기 위해서 직접 수치모사가 수행되었다. 라그랑지안 해석의 효율을 높이기 위해 정확도와 실행시간이 적절한 4-point Hermite 내삽법을 사용하였고, 정확성 또한 비교 검증하였다. 우선 실질적으로 부유 입자가 존재하는 경우의 분석을 하기 전에 극단적인 경우( $\tau_p = dt/35$ )에 대한 안정성과 신뢰성을 확인하였고,  $\tau_p = 0.1\tau_p$ 인 경우에 있어서 중력과 같은 외부 힘에 의한 침강 속도가 존재하는 방향과 그렇지 않은 방향에 대한 침강률과 부유입자와 유체 입자의 속도차의 평균 즉, 평균상대속도를 비교하였다. 또한 각각의 부유 입자와 유체 입자의 속도를 구하여 유체 입자와 부유 입자의 속도의 변화를 확인하였다. 하지만 좀 더 엄밀한 분석을 위해서는 다양한 크기의  $Re_\lambda$ 와  $\tau_p$ ,  $w$ 를 고려하여 그것에 따른 입자들의 상관관계와 부유입자의 침강속도를 비교할 필요성이 있다.

#### 참고문헌

[1] Balachandar, S., Maxey, M. R., 1989, "Methods for evaluating fluid velocities in spectral simulation of turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp.96.

[2] Choi, J. -I., Lee, C., 2003, "Lagrangian statistics in turbulent channel flow." *Phys. Fluids*, Vol. 26, pp. 883.

[3] Crowe, C., Sommerfeld, M. & Tsuji. Y., 1998, *Multiphase flows with droplets and particles*, CRC Press.

[4] Elgobashi, S. & Truesdell, G. C., 1993, "On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I: Turbulence modification," *Phys. Fluids A*, Vol. 5, No. 7, pp. 1790.

[5] Eswaran, V. & Pope, S. B., 1988, "An examination of forcing in direct numerical simulation of turbulence," *Comp. Fluids*, Vol. 16, pp. 257.

[6] Lundbladh, A. et al., 1999, *An efficient spectral method for simulation of incompressible flow over a flat plate*, Royal Institute of Technology.

[7] Lee, C., Kim, B., & Kim, N., 2000, "A simple Lagrangian pdf model for wall-bounded turbulent flows," *KSME Int. J.*, Vol. 14, No. 8, pp. 900.

[8] Maxey, M. R. & Riley, J. J., 1983, "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow," *Phys. Fluids*, Vol. 26, No. 4, pp. 883.

[9] Pope, S. B., 2000, *Turbulence Flows*, Cambridge University Press.

[10] Soltani, M. & Ahmadi, G., 1995, "Direct numerical simulation of particle entrainment in turbulent channel flow," *Phys. Fluids*, Vol. 7, No. 3, pp. 647.

[11] Squires, K. D. & Eaton, J. K., 1990, "Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence," *Phys. Fluids A*, Vol. 2, No. 7, pp. 1191

[12] Squires, K. D. & Eaton, J. K., 1991, "Measurements of particles dispersion obtained from direct numerical simulations of isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 226, pp 1.