

제 4 회 한국 유체공학 학술대회

김경록* · 정재달** · 이창훈***

The Third National Congress on Fluids Engineering:

Kyungrock Kim*, Jaedal Jung** and Canghoon Lee***

Keywords : Heavy particle(무거운 입자), Lagrangian stochastic model(라그랑지안 스토크스틱 모델), Fluid particle(유체입자)

Abstract

In this study we perform Lagrangian stochastic model simulation for heavy particle. Reynolds(2002) construct simple LSM for heavy particle, which lack in detailed parameter study and statistics of turbulent flow within his paper. we investigate more simple but important turbulent statistics such as autocorrelation for velocity and acceleration, Lagrangian structure function and dispersion statistics parameterized by using DNS

1. 서론

난류 유동에서 무거운 입자의 거동에 대한 연구는 입자들이 수동적으로 유체입자를 따라가는 이상적인 경우가 아닌 입자가 가진 관성력과 중력 등이 가미된 더 복잡한 유체유동과 입자의 거동 현상을 규명하고자 하는 노력에서 비롯된다. 배기 가스나 오염 물질에 대한 거동은 실제로 입자가 가진 무게에 의해 순수한 유체 입자와 다른 추적 곡선을 (particle trajectory) 따라간다는 사실은 잘 알려진 사실이다. 유체의 거동과 상이한 무거운 입자의 거동에 대한 효과와 현상은 입자가 가진 관성과 (inertia) 중력이나 Thermoporetic force 혹은 전자기력과 같은 외력에 의해 발생하는 입자의 평균속도에 의해서 복잡한 양상을 띤다. 이런 현상에 대한 실험적이고 수치적인 연구뿐 아니라 이론적이고 모델링 접근적인 연구로 많은 연구들이 수행되었다.

무거운 입자에 대한 최초의 보고는 Yudine (1959)에 의해서 무거운 입자들이 입자가 가진 관성력과 중력에 의해서 passive 한 유체입자를 따라가지 못하고 벗어나는 궤적을 가진다는 crossing trajectory에 대한 보고를 하였다. 또한 Csanady (1963)은 입자의 확산이 free fall velocity 에 반비례하여 줄어든다는 사실을 밝혀냈다. 또한 Squires & Eaton (1991)은 Stokes number (St)가 0에서부터 증가함에 따라 low vorticity region과 high strain rate region으로 무거운 입자들이 이동하여 응집되는 결과를 발표하였다. 이들의 연구에 의하면, Stokes number 가 1 일 때 가장 응집되는 정도가 심하며, 다시 Stokes number가 1 보다 작을 경우는 거의 유체입자와 유사한 운동을 보여 주지만 Stokes number 가 1보다 커지면 무거운 입자가 가지는 inertia 와 중력 효과에 의해서 탄도 미사일 효과가 (ballistic effect) 나타나기 때문에 입자가 low vorticity 나 high strain rate

region으로 무거운 입자가 응집되지 않는다는 결과를 발표하였다. 이런 결과는 Bifarelle et al. (2006)의 결과에서 보여주는 바와 같이 low vorticity region 이 바로 가속도가 정체되는 영역이라는 것을 보여주었다. 이런 관점에서 봤을 때 Stokes number가 1일 때 무거운 입자가 가진 전체적인 힘과 유체의 힘 사이에 평형을 이루어 상대적으로 고요한 low vorticity region에 입자들이 응집되는 경향을 보인다고 생각할 수 있다. Stokes number가 τ_p / τ_η 로 정의된다는 것을 봤을 때 이 값이 1일 라는 것은 τ_p (relaxation time scale)가 1이 되는 무거운 입자의 의 입장에서는 콜모고로프 시간만큼 동안 유체에 힘을 받아야만 제 속도를 회복할 수 있다는 것을 의미한다. 유체의 vortex 가 콜모고로프 시간 구간 정도의 사이즈를 가진다는 것을 보면, vortex의 중앙을 통과하거나 vortex를 가로지르는 운동을 필연적으로, 랜덤하게 겪게 되는데, 무거운 입자는 항상 vortex의 반지름 즉 1/2 kolmogorov 시간만큼 반대 가속도와 정가속를 경험하게 된다. 따라서 기이하게도(?), Stokes number 가 1인 입자는 충분히 자신의 속도를 낼 수 없기 때문에 항상 자신의 속도 1/2 이하의 힘과 속도로 유체 속을 부유하다가 결국은 vortex사이 즉 low vorticity region에 갇히게 되는 운명에 처하게 된다. 이것을 Eaton & Hwang (2005) 과 Wang & Maxey (1993)들이 vortex trapping 현상이라고 말한 근거이다.

이런 복잡한 유동현상을 예측하기 위한 많은 저자들이 모델링을 시도했지만 이전의 author들은 이런 복잡한 현상에 대한 이해가 부족한 상태에서 모델을 시작했기 때문에 모델의 정확도와 접근법이 부족하다. 다행스럽게도, Porzorsky & Minier (1999), Reynolds & Locono (2004) 와 Reynolds & Cohen (2004) 들이 heavy particle 모델에 대한 괄목한 성과를 내기 시작했다. Heavy particle을 모델하기 위한 접근은 크게 두가지 있는데, 첫 번째는 heavy particle을 직접 따라가는 모델을 시도하는 방법과 (Reynolds & Cohen, 2004) heavy particle의 운동의 통계적인 물리량을 구해 모델식에 사용하는 방법이 있다. (Porzorsky & Minier, 1999; Reynolds & Locono) 순수한 유

* 연세대학교 기계공학과 대학원, rkim@yonsei.ac.kr

** 연세대학교 기계공학과 대학원, erussel@yonsei.ac.kr

*** 연세대학교 기계공학과, clec@yonsei.ac.kr

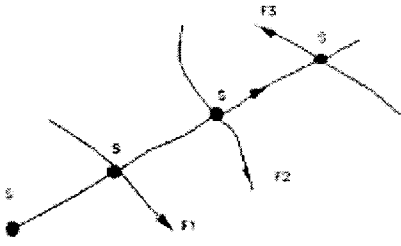


Fig. 1: Fluid elements (F1, F2, F3) and heavy particle path (s) 체 입자를 기술할 때는 유체 분자의 운동을 continuous Brownian 운동으로 기술할 수 있지만, Fig. 1 에서 처럼 무거운 입자가 경험하는 유체 정보가 불연속인 (discontinuity) 경우는 fractional Brownian motion으로 기술해야 하는 수학적 어려움이 있다. (Reynolds & Cohen, 2004) 또한 설사 수학적 어려움을 극복한다 해도 구성된 모델식이 서문 앞에서 설명한 모든 물리적인 현상을 예측한다고 기대 하기 힘들다. 따라서 본 연구는 후자의 방법, 즉 heavy particle의 통계적인 물리량을 DNS로 산정한 이후 모델식에 활용하는 방법을 사용하였다. 이 방식은 Reynolds (2002, 2004)의 방법과 흡사하지만, 더 넓은 시간 척도와 통계적인 난류량을 analytical solution으로 표현하였다. 2 장에서는 모델링 개념에 대해 설명하고 3장에서는 난류 통계량의 예측을 보여주고 4장에서 결론을 얘기하겠다.

2. 지배 방정식

2.1 Heavy particle을 따라가는 유체 입자의 모델

Heavy particle을 따라가는 유체 입자(이하 따라가는 유체 입자)에 대한 모델식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$du = a(u,t)dt + b(u,t)dW \dots\dots\dots 1)$$

$a(u,t)$ 는 drift term 이며 따라가는 유체 입자의 운동의 trajectory를 결정해주는 항이며 $b(u,t)$ 는 diffusion term 으로 랜덤한 분자의 확산을 표현하는 항이다. dW 는 분포는 Gaussian이고 평균이 0이고 분산이 dt 인 Wiener process 를 겪는 Brownian 운동에 대한 항이다. 1)식은 자연스럽게 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$du = T_x^{-1}u + \sqrt{2\sigma_u^2 T_x^{-1}}dW \dots\dots\dots 2)$$

여기서 T_x 는 따라가는 유체입자의 Lagrangian time scale로 본 연구에서는 DNS를 사용하여 구하였다. 물론 여기서 사용한 가정은 따라가는 유체 입자의 경우 Kolmogorov similarity theory 의 철학에 기반을 두고 있다. 또한 Kolmogorov 시간 척도인 τ_η 고려하여 Reynolds number 효과를 고려한 모델을 생각하면 다음과 같다.

$$dA = (T_x^{-1} + \tau_\eta^{-1})Adt + T_x^{-1}\tau_\eta^{-1} + \sqrt{2\sigma_u^2(T_x^{-1} + \tau_\eta^{-1})T_x^{-1}\tau_\eta^{-1}} \dots\dots\dots 3)$$

2.2 Heavy particle에 대한 모델

Maxey & Reily(1983) 에 의해서 heavy particle 에 대한 equation of motion 에 대한 완전해가 구해졌다. 하지만 여기서는 무거운 입자의 농도가 유체 입자의 농도보다 상당히 높다는 가정을 하면 Basset history 항과 virtual mass에 의한 항 등이 사라져 중력 효과를 고려하지 않은 다음과 같은 식으로 구성 된다.

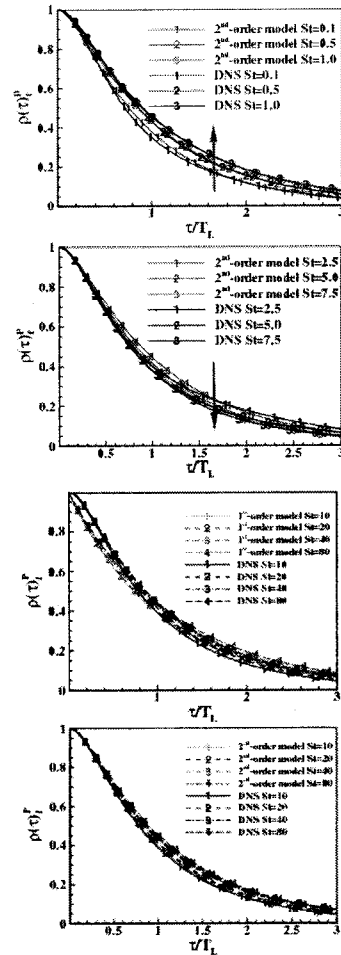


Fig. 2: velocity autocorrelation prediction for fluid particle along a heavy particle by DNS and model prediction; black line and number is DNS, color line and number is model prediction

$$dv = \tau_p^{-1}(u - v)dt \dots\dots\dots 4)$$

여기서 τ_p 는 relaxation time scael이며 u 와 v 는 각각 따라가는 유체입자의 속도와 무거운 입자의 속도 이다. 4)식과 2)을 결합하면 다음과 같은 무거운 입자에 대한 가속도 식이 나온다. (Reynolds, 2004)

$$dA_p = -(T_x^{-1} + \tau_p^{-1})dt - T_x^{-1}\tau_p^{-1} + \sqrt{2\sigma_v^2(T_x^{-1} + \tau_p^{-1})T_x^{-1}\tau_p^{-1}}dW \dots\dots\dots 5)$$

또한 3) 식과 4)식을 결합하면 Hyper-acceleration에 대한 다음 식을 구할 수 있다.

$$d\dot{A}_p = -(T_x^{-1} + \tau_\eta^{-1} + \tau_p^{-1})\dot{A}dt - (T_x^{-1}\tau_\eta^{-1} + T_x^{-1}\tau_p^{-1} + \tau_\eta^{-1}\tau_p^{-1})\dot{A}dt - T_x^{-1}\tau_\eta^{-1}\tau_p^{-1} + \sqrt{2\sigma_v^2(T_x^{-1} + \tau_\eta^{-1} + \tau_p^{-1})T_x^{-1}\tau_\eta^{-1}\tau_p^{-1}}dW \dots\dots 6)$$

3. 난류 통계량

3.1 속도와 가속도에 대한 Autocorrelation function

속도와 가속도에 대한 autocorrelation 함수는 Sawford (1991) 에 의해 해석되었는데, 5)번식과 6)번식에 대한 속도에 대한 autocorrelation function은 각각 다음과 같이 주어진다.

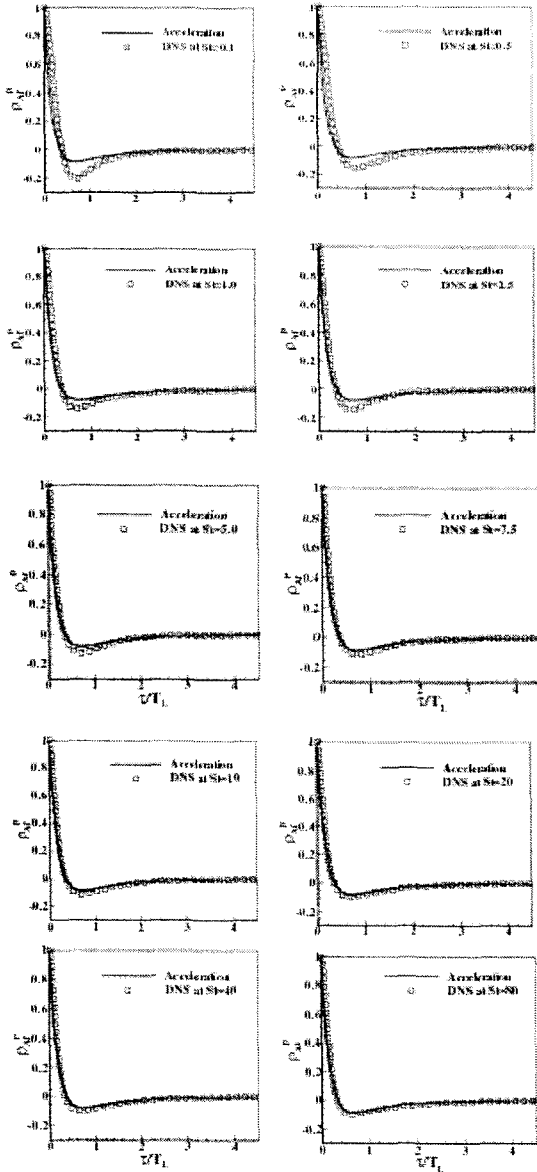


Fig. 3: Acceleration autocorrelation prediction for fluid particle along a heavy particle; symbol is DNS and red line is acc, model.

$$R_u(t) = \frac{T_\chi^{-1} \exp(-t/T_\chi) - \tau_\eta^{-1} \exp(-t/\tau_\eta)}{T_\chi - \tau_\eta} \dots\dots\dots 7)$$

과

$$R_u(t) = F \left[T_\chi \left(\frac{\tau_p^{-1} \exp(-t/T_\chi) - T_\chi^{-1} \exp(-t/\tau_p)}{\tau_p^{-2} - T_\chi^{-2}} \right) - \tau_\eta \left(\frac{\tau_p^{-1} \exp(-t/\tau_\eta) - \tau_\eta^{-1} \exp(-t/\tau_p)}{\tau_\eta^{-2} - \tau_p^{-2}} \right) \right] \dots\dots\dots 8)$$

그리고 여기서 F 는 다음과 같이 주어진다.

$$F = \frac{(T_\chi^{-1} + \tau_\eta^{-1})(T_\chi^{-1} + \tau_p^{-1})(\tau_\eta^{-1} + \tau_p^{-1})T_\chi^{-1}\tau_\eta^{-1}}{(T_\chi^{-1} + \tau_\eta^{-1} + \tau_p^{-1})(T_\chi^2 - \tau_\eta^2)} \dots\dots\dots 9)$$

가속도에 대한 autocorrelation 함수는 다음과 같은 kinematic relationship에 의해 구할 수 있다.

$$\sigma_A^2 R_A(t) = \sigma_u^2 R_u(t) / dt^2 \dots\dots\dots 10)$$

3.2 Lagrangian 속도 구조 함수와 Mean square dispersion.

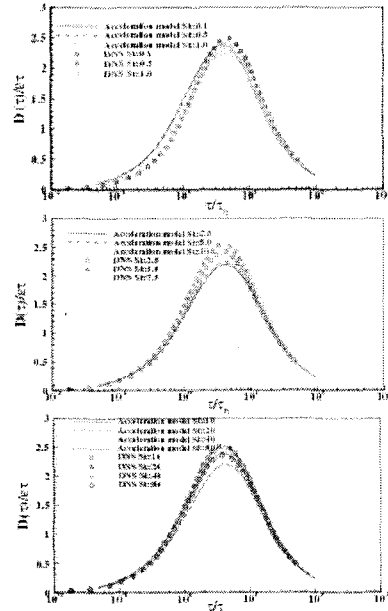


Fig. 4: Lagrangian velocity structure function prediction for fluid particle along a heavy particle; Symbol is DNS, line is model.

Lagrangian 속도 구조함수는 다음과 같은 수식으로 주어진다.

$$D(t) = 2\sigma_u^2(1 - R_u(t)) \dots\dots\dots 11)$$

여기서 우리는 속도에 대한 autocorrelation 함수의 정보를 알고 있다면 라그랑지안 속도 구조함수를 구할 수 있다. 결과적으로 잘 알려진 C_0^* 를 구하기 위해서 다음과 같은 analytic한 형태로 표현하면 구할 수 있다. 즉 $C_0^* = D(t)/\epsilon t$ 은 inertial range에서의 속도 구조함수와 관계식으로 일반적으로 낮은 Reynolds수에서는 C_0^* 가 뾰족한 peak 형태로 나타난다.

또한 Mean square dispersion 은 Taylor 정리에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_x^2 = \int_0^t (t-s)R_u(s)ds \dots\dots\dots 12)$$

여기서도 속도에 대한 autocorrelation 함수만 주어지면 수식에 의해서 정확하게 Mean square dispersion을 구할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 등방성 난류에서 heavy particle을 직접 따라가는 방법이 아닌 heavy particle이 가진 물리적 성질을 DNS 데이터로 추출하여 통계적인 방식으로 시간척도(time scale)과 속도에 대한 root mean square 값을 이용하여 모델링 parameter로 사용하였다. 여기서는 Kolomogorov similarity theory가 일반적으로 성립한다는 강력한 가정하에 논리를 전개할 수 있다. 결과에서도 알 수 있듯이 heavy particle 모델링을 하기 위해서 입자를 집적 따라가는 모델식을 세우는 것은 time consuming 일뿐 더러 예측도 좋지 알려져 있지만 통계적인 접근 방식으로 전개한 모델링은 아주 우수한 예측력을 가진다고 볼 수 있다. 또한 모델의 차수를 높으면 예측력이 더 좋아지는 것은 순수하게 τ_η 를 고려하여 Reynolds number 효과가 들어갔다고도 볼 수 있지만, 물리적으로 작은 시간척도를 고려하여 큰 척도인 라그랑지안 타임척도에 의한 부족한 점을 보완했다고 볼 수 있다.

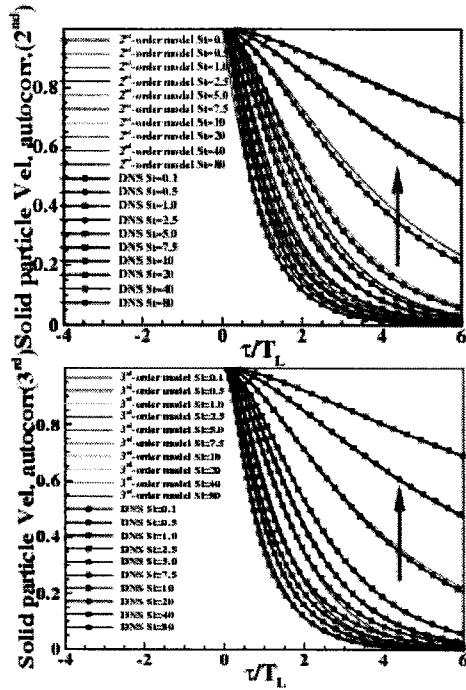


Fig. 5: velocity autocorrelation prediction for heavy particle itself by DNS and second and third-order model, respectively; symbol is DNS, line is model prediction

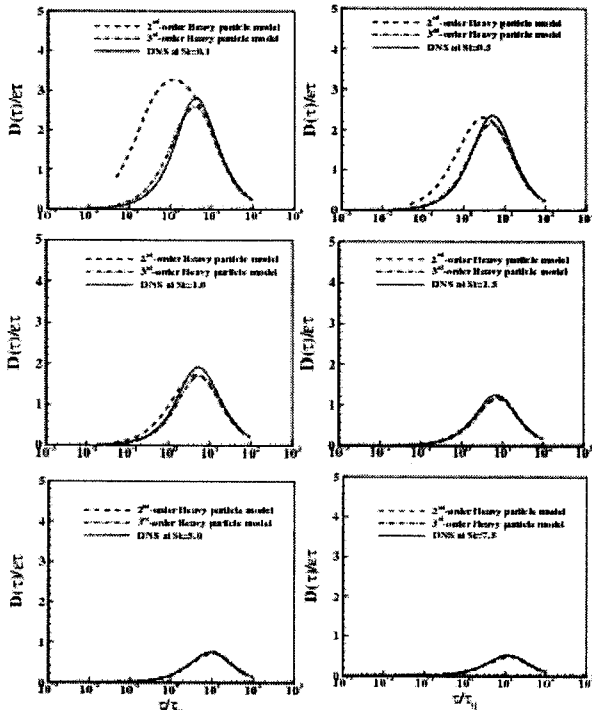


Fig. 6: Lagrangian velocity structure function prediction by DNS and second and third-order model; black solid line is DNS, red dashed line is second-order model and blue-dashed line is third-order model

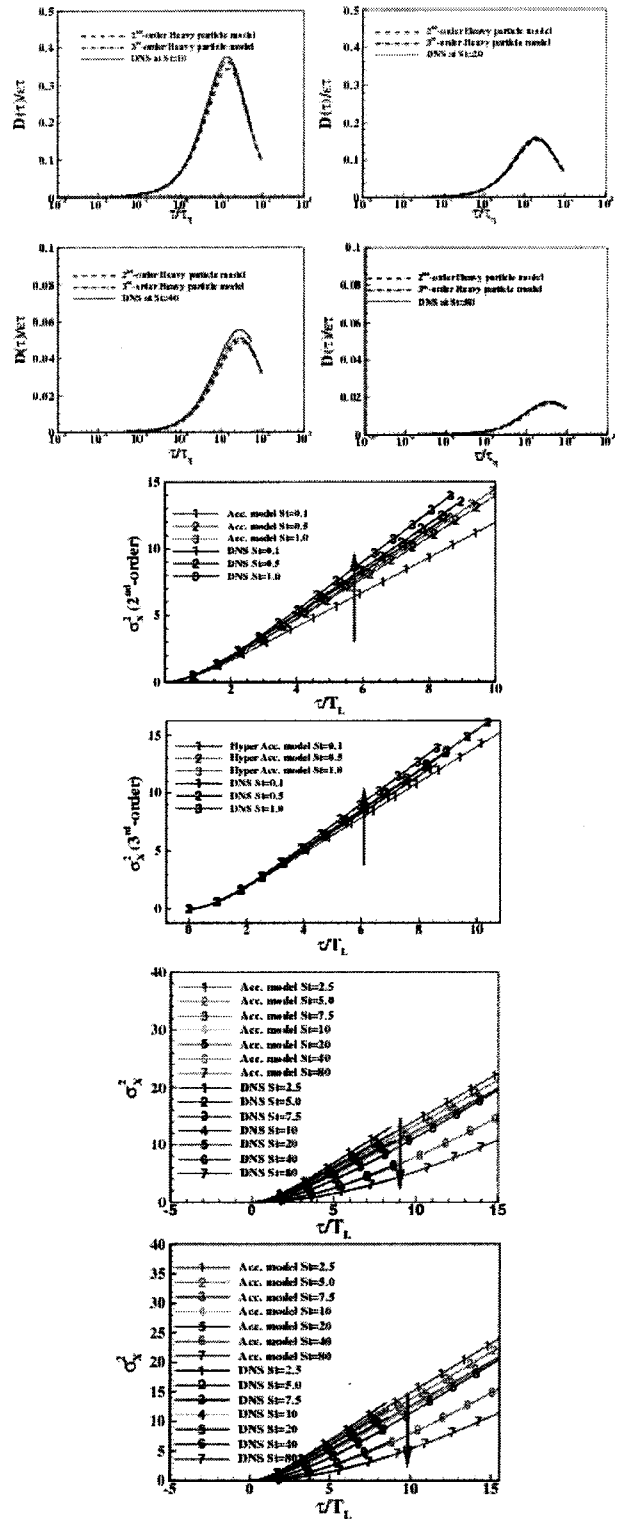


Fig. 7: Mean square dispersion prediction by DNS and model, respectively; black line and number is DNS, color line and number is model prediction.

참고문헌

[1] Porzorski, J. and Minier, J.-P., "On the Lagrangian turbulent dispersion models based on the Langevin equation," *Int. J. Multiphase flow*, 24, 913, 1998
 [2] Reynolds, A. M., "Third-order Lagrangian stochastic modeling," *Phys. Fluids*, 15, 9, 2773, 2003
 [3] Reynolds, A. M. & Cohen, Y. L. "Stochastic simulation of the -

turbulent motion of heavy particle," *phys. Fluids*, 15, L1, 2004
 [4] Reynolds, A. M. & Lacono, G. Lo, "On the simulation of particle trajectories in turbulent flows," *Phys. Fluids*, 16, 12, 4353, 2004
 [5] Sawford, B. L. "Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models in turbulent dispersion," *Phys. Fluids A*, 3, 1577, 1991