

P2P1 유한요소 공식을 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 반-분리 해법에 관한 연구

*

조명환* · 최형권** · 유정열*** · 박재인****

Study of the semi-segregation algorithms of the incompressible Navier-Stokes equations using P2P1 finite element formulation

Myung H. Cho*, Hyoung G. Choi**, Jung Y. Yoo*** and Jae I. Park****

Keywords : semi-segregation(반-분리), semi-implicit(반-내재적), Strouhal number(스트로울수)

Abstract

The conventional segregated finite element formulation produces a small and simple matrix at each step than in an integrated formulation. And the memory and cost requirements of computations are significantly reduced because the pressure equation for the mass conservation of the Navier-Stokes equations is constructed only once if the mesh is fixed. However, segregated finite element formulation solves Poisson equation of elliptic type so that it always needs a pressure boundary condition along a boundary even when physical information on pressure is not provided. On the other hand, the conventional integrated finite element formulation in which the governing equations are simultaneously treated has an advantage over a segregated formulation in the sense that it can give a more robust convergence behavior because all variables are implicitly combined. Further it needs a very small number of iterations to achieve convergence. However, the saddle-point-type matrix (SPTM) in the integrated formulation is assembled and preconditioned every time step, so that it needs a large memory and computing time. Therefore, we newly proposed the P2P1 semi-segregation formulation. In order to utilize the fact that the pressure equation is assembled and preconditioned only once in the segregated finite element formulation, a fixed symmetric SPTM has been obtained for the continuity constraint of the present semi-segregation finite element formulation. The momentum equation in the semi-segregation finite element formulation will be separated from the continuity equation so that the saddle-point-type matrix is assembled and preconditioned only once during the whole computation as long as the mesh does not change. For a comparison of the CPU time, accuracy and condition number between the two methods, they have been applied to the well-known benchmark problem. It is shown that the newly proposed semi-segregation finite element formulation performs better than the conventional integrated finite element formulation in terms of the computation time.

1. 서론

유한요소법의 분리 공식화(segregated formulation)에서는 속도장과 압력장을 따로 풀게 되므로 각 단계에서 얻어지는 행렬은 속도장과 압력장을 동시에 푸는 통합 공식화(integrated formulation)의 행렬보다 더 작고 예조건화(pre-conditioning)하기가 쉽다. 반면에, 별개의 타원형 압력방정식을 풀어야 하므로 이에 대한 추가적인 경계조건이 필요한 단점이 존재한다. 일반적으로 개방 경계(open boundary) 문제들의 경우에 출구에서의 압력과 압력구배가 모두 미지수인 경우가 있다. 따라서, 적당한 출구 경계조건을 부과하는 문제는 쉽지 않을 뿐만 아니라 분리 계열의 수치해법에 있어서 중요한 관심사 중의 하나이다. Ramaswamy와 Jue⁽¹⁾는 개방 경계에서 압력에 대한 경계조건을 처리하기 위해서 경계를 포함하는 유한요소로부터 별개의 방정식을 유도하여 이를 경계조건으로 대체하였다. 또한, Tabarrok과 Su⁽²⁾는 분리 유한요소법에서 압력 경계조건과의 과잉 제한조건(over constraint)으로 인하여 정확한 압력경계조

건이 부여되기 위해서는 압력방정식의 반복해법이 필요함을 지적하였다. 한편, Choi 등⁽³⁾은 개방 경계조건과 점착 경계조건에 공통으로 적용할 수 있는 압력 경계조건을 제안하였다. 반면, 통합 유한요소법은 별도의 압력방정식을 풀지 않고 압력과 속도장을 동시에 계산하므로, 분리 알고리즘에서 압력방정식의 경계조건으로 인하여 생기는 문제를 근본적으로 피할 수 있고 모든 변수들이 내재적으로 결합되어 있기 때문에 분리 유한요소법에 비해 유동장이 복잡한 경우 좀더 견고한 수렴이력을 보인다는 장점이 있다.^(4, 5) 그렇지만, 통합 정식화할 경우 생성된 전체행렬의 예조건화는 분리해법의 그것보다 상당히 복잡하고 많이 알려져 있지 않으며 매 시간단계마다 전체 행렬의 조립(assembly)과 예조건화를 해야 하는데 따른 계산시간의 증가를 피할 수 없다.⁽⁶⁾ 이와 같이 분리 알고리즘과 통합 알고리즘에 기반한 유한요소 정식화는 각각 장단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 분리 유한요소법의 장점을 유지하면서 동시에 통합 유한요소법의 장점을 취할 수 있는 '반-분리 유한요소법(semi-segregation FEM)'을 제안하고 그 성능을 평가하

고자 한다. 본 논문에서는 P2P1 요소를 사용한 반-분리 유한요소법, 완전 내재적 통합 유한요소법과 운동방정식의 대류항을 외재적으로 처리함으로써 비선형항의 반복계산이 필요치 않는 반-내재적 통합 유한요소법을 잘 알려진 표준문제에 적용함으로써 그 정확도 및 계산시간을 비교하고자 한다.

2. 이론

지배 방정식은 비정상, 비압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식이며 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= 0, \\ \dot{u}_i + u_j u_{i,j} &= -\frac{1}{\rho} p_{,i} + (\tau_{ij})_{,j}, \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, ‘·’와 ‘;’는 각각 시간미분 및 공간미분을 의미하며, ρ , p , u_i 는 각각 밀도, 압력, i 성분 속도이며, S_i 는 자연대류에서의 부력과 같은 외력항을 나타내고, τ_{ij} 는 전단응력으로 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{ij} = \nu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

여기서, ν 는 동점성계수를 나타내며, 식 (1)에 대한 경계조건은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} u_i |_{\Gamma_1} &= b_i, \\ \sigma_{ij} n_j |_{\Gamma_2} &= t_i, \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, Γ_1 은 Dirichlet 경계조건이 부여된 경계부분을 나타내며, Γ_2 는 Neumann 경계조건이 부여된 경계부분을 나타낸다. b_i 는 경계 Γ_1 에서 지정된 속도벡터를 나타내며, t_i 는 경계 Γ_2 에서 지정된 인력을, 그리고 n_j 는 경계 Γ_2 에 수직인 단위 법선벡터를 나타낸다.

2.1 P2P1 완전 내재적(fully-implicit) 통합 유한요소 공식

P2P1 완전 내재적 통합 유한요소 공식은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(u_j^{n+1} u_{i,j}^{n+1} + u_j^n u_{i,j}^n) &= -\frac{1}{\rho} p_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2}(\tau_{ij}^{n+1} + \tau_{ij}^n)_{,j}, \\ u_{i,i}^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 Δt 는 시간간격(time step), 상첨자 n 은 이전 시간단계를 나타내며, 대류항과 점성항의 시간적분은 2 차 정확도를 가지는 완전 내재적인 Crank-Nicolson 법을 사용하였으며 운동방정식의 비선형항을 선형화하기 위해서 순차 근사법(successive approximation method)을 사용하였다.⁽⁷⁾

2.1 P2P1 반-내재적(semi-implicit) 통합 유한요소 공식

P2P1 반-내재적 통합 유한요소 공식은 식 (5)와 같이 나타

낼 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left(\frac{3}{2} u_j^n u_{i,j}^n - \frac{1}{2} u_j^{n-1} u_{i,j}^{n-1} \right) &= -\frac{1}{\rho} p_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2}(\tau_{ij}^{n+1} + \tau_{ij}^n)_{,j}, \\ u_{i,i}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

대류항의 시간적분은 Adams-Bashforth를 점성항에 대해서는 Crank-Nicolson 법을 사용하였다.

2.2 P2P1 반-분리 유한요소 공식

P2P1 반-분리 유한요소 공식은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} - u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho} p_{i,j}^n + \frac{1}{2}(\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n)_{,j}, \quad (6a)$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} p_{i,j}^n, \quad (6b)$$

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} p_{i,j}^{n+1}, \\ u_{i,i}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (6c)$$

대류항과 점성항의 시간적분은 Crank-Nicolson 법을 사용하였으며 반-분리 유한요소법은 압력에 의한 항을 대류항과 점성항에 의한 항으로부터 분리하며 각 분할단계(fractional step)에서의 중간 속도는 연속방정식을 반드시 만족하지는 않는다. 첫 번째 분할단계에서는 중간속도 \hat{u}_i 를 구하며 식 (6a)의 중간속도 \hat{u}_i 에 대한 비선형항을 선형화하기 위해서 순차 근사법(successive approximation method)을 사용하였다. 한편, 압력과 속도에 대한 형상 함수는 마지막 분할단계에서 얻어지는 속도와 압력이 연성된 식이 LBB 조건을 만족해야 하므로 속도는 압력보다 한 차수 높은 형상함수를 사용한다. 여기서 LBB 조건이란 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 통합 유한요소 해석에서 속도와 압력에 대한 형상함수의 선택에 있어서 안정된 해를 얻기 위한 형상함수에 대한 제한조건을 나타내며 자세한 내용은 참고문헌 (7, 8, 9, 10)을 참고한다. 반-분리 유한요소법의 마지막 분할단계에서는 연속방정식을 만족시키기 위해서 압력과 속도가 연성된 안장점 형태의 행렬(saddle-point-type matrix, SPTM)을 쓴다. 이 행렬은 식 (6c)로부터 유도되며, 허용되는 모든 함수 $W \in V$ 와 $q \in P$ 에 대해서 다음의 식을 만족하는 $u_i \in H^1$ 와 $p \in L^2$ 를 찾는다.⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[W \cdot \rho \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x_j} (-p^{n+1} \delta_{ij}) \right] d\Omega + \int_{\Gamma} W p^{n+1} \delta_{ij} \cdot n_j d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

위에서 W 와 q 는 각각 속도와 압력에 대한 형상함수인데 P2P1 요소를 적용하므로 각각 2 차와 1 차 다항식으로 표현된

다. 속도장과 압력장의 해를 동시에 얻는 전통적인 통합 유한 요소법과 비교할 때, 식 (6c)는 주어진 격자계에 대하여 한 번만 행렬의 조립과 예조건화를 하면 되므로 계산의 효율성을 증대시킬 수 있게 된다. P2P1 요소를 이용한 반-분리 공식화의 경우 식 (6c)에서 생성된 행렬은 아래와 같은 안장점 형태가 된다:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

이 때 연속방정식에 압력항이 포함되어 있지 않기 때문에 전체행렬의 영 구역(zero block)이 생기게 된다. 이 영 구역은 기존의 ILU 예조건화의 성능을 떨어뜨리기 때문에 연속방정식에 압력변수가 포함되어 있다고 가정하여 ILU 예조건인자를 수정한 AILU(adaptive ILU)를 적용하였다. AILU 기법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (6)을 참고한다.

3. 수치해석 결과

계산을 수행한 컴퓨터 사양으로 CPU는 Pentium IV 2 GHz이며 Memory는 2 GByte이다. Operating System은 Redhat Linux 7.3이며, Compiler는 Intel(R) Fortran 6.0이고, L2 cache size는 512 kByte이다. 반-분리 유한요소 공식과 통합 유한요소 공식을 원형 실린더 주위에서의 비정상 유동에 대해 그 해의 정확도 및 계산시간을 비교하였다.

3.1 원형 실린더 주위에서의 유동

반-분리 유한요소 공식과 통합 유한요소 공식을 비교하기 위해서 원형 실린더 주위에서의 비정상 상태의 유동에 대해 그 결과를 조사하였다. 사용된 격자계 및 경계조건은 Fig. 1 과 같으며, 격자 생성은 상용 프로그램인 ICEM-CFD 4.0 을 사용하였고, 요소 수는 6846 개이다. 실린더 후류에서의 보다 효과적인 계산을 위해서 실린더 뒷부분에 더 집중된 격자를 주었으며, D 는 실린더의 직경을 의미하고, 계산 영역은 가로, 세로방향으로 각각 $37D$, $56D$ 이며 $\Delta t = 0.01$ 로 주었다. 먼저, 실린더 뒤쪽에서의 유동의 주기적인 현상을 살펴보기 위해 스트로울수(Strouhal number, St)를 세 기법들에 대하여 비교하였다.

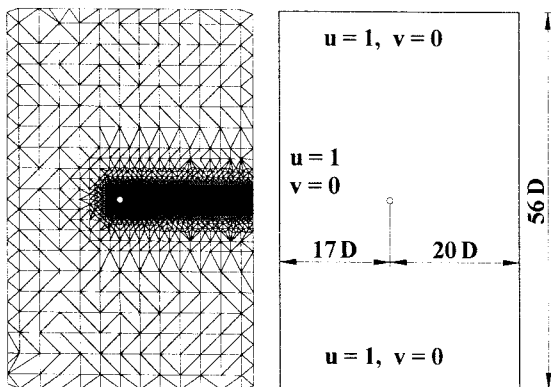


Fig. 1 Nonuniform grid system and the boundary conditions for the flow behind a circular cylinder

본 논문에서는 $Re_D = 100$ 인 경우에 대해 주기적인 보텍스 shedding 현상을 조사하였다. Fig. 2 는 각 기법들에 따른 실린더 뒤쪽 한 점에서의 속도 u 에 대한 시간진전을 나타낸다. 실린더 후류에서 주기적인 형태가 보임을 알 수 있으며, 보텍스 shedding 현상의 주기는 세 기법 모두의 경우에 $6.13D/u_\infty$ 로 같은 결과를 보인다. Table 1 은 각 기법들의 스트로울수를 비교한 것이다. 각 기법들의 결과를 실험적 연구인 Williamson⁽¹²⁾의 결과와 기존의 수치 결과들⁽¹³⁻¹⁵⁾과 비교하였으며 세 기법 모두 Williamson 의 결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Table 2 는 반-분리 유한요소법의 안장점 형태의 행렬과 통합 유한요소법에서의 안장점 형태의 행렬에서 계산된 조건수(Condition number)로서 예조건화를 사용한 경우에 각 기법의 조건수가 얼마나 감소하는지를 나타낸다. 일반적으로 행렬의 반복해법(iterative solver)에 의한 반복계산 횟수는 조건수의 제곱근에 비례하므로 조건수가 작을수록 같은 조건하에서 그 계산속도가 빠를 것임을 예측할 수 있다. 마지막으로 세 기법의 계산시간을 살펴보면 Table 3 과 같다. P2P1 반-분리 유한요소 공식이 반-내재적 통합 유한요소 공식과 비교해 약 3.5 배 정도 빨랐으며, 완전 내재적 통합 유한요소 공식에 비해서는 15 배 이상 빠른 계산속도를 보였다. 반-내재적 통합 유한요소 공식이 완전 내재적 통합 유한요소 공식보다 계산시간이 적게 걸린 이유는 반-내재적 통합 유한요소 공식은 완전 내재적 통합 유한요소 공식과는 달리 대류항의 비선형 항을 외재적

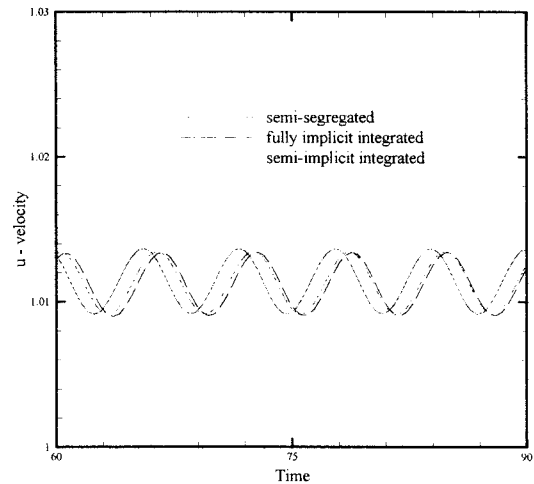


Fig. 2 Temporal evolution of the velocity at a point behind a circular cylinder

Table 1 Comparison of the present results with others for the flow past a circular cylinder

Reference	Method	St
Present study	Semi-segregated	0.163
Present study	Fully implicit integrated	0.163
Present study	Semi-implicit integrated	0.163
Williamson ⁽¹²⁾	Experiment	0.164
Braza et al. ⁽¹³⁾	FVM (13530 grid points)	0.160
Karniadakis et al. ⁽¹⁴⁾	Spectral element method	0.179
Kwon and Choi ⁽¹⁵⁾	FDM (321 × 321)	0.165

Table 2 Condition number

	Without pre-conditioning	ILU pre-conditioning
Semi-segregation FEM	0.47109E+07	0.87869E+02
Fully implicit integrated FEM	0.45694E+07	0.92933E+02
Semi-implicit integrated FEM	0.44693E+07	0.93114E+02

Table 3 CPU time for the flow past a circular cylinder

Method	CPU Time (second)
Semi-segregation FEM	5200
Fully implicit integrated FEM	78600
Semi-implicit integrated FEM	18350

으로 풀기 때문에 반복계산을 할 필요가 없어지며 이에 따른 계산시간의 감소를 가져오고 있는 것으로 판단되며, 반-분리 유한요소 공식이 통합 유한요소 공식을 사용할 때에 비해 행렬의 크기가 작고 이에 따른 반복해법의 계산횟수가 줄어들 뿐만 아니라 매 시간 단계마다 행렬의 조립과 예조건화를 하지 않아도 되기 때문에 통합 유한요소 공식에 비해 계산속도가 빠른 것이라 여겨진다.

4. 결론

비압축성 Navier-Stokes 방정식을 해석하기 위해서 P2P1 반-분리 유한요소 공식을 제안하고 실린더 주위의 유동문제에 대하여 정확도 및 계산시간을 비교하였다.

정확도에서는 세 기법 모두 비슷한 정확도를 보였으며, 계산시간을 살펴보면, 반-분리 유한요소 공식이 반-내재적 유한요소 공식과 비교하여 3.5 배, 완전 내재적 통합 유한요소 공식과 비교하여 15 배 정도 빨랐으며, 이는 기존의 통합 유한요소 공식과 비교했을 때 조건수가 작아서 반복해법의 반복계산 횟수가 작을 뿐만 아니라 매 시간단계마다 행렬의 조립과 예조건화를 하지 않아도 되기 때문에 상당히 계산시간의 단축을 가져왔음을 확인하였다.

고찰된 표준문제에서 확인할 수 있듯이, 반-분리 유한요소 공식이 기존의 통합 유한요소 공식에 비해 정확도를 희생시키지 않으면서도 계산시간에서는 상당한 장점을 가지고 있음을 알 수 있다.

후 기

이 연구는 NGV 기술개발과제와 BK21 사업의 지원으로 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고문헌

[1] B. Ramaswamy and T. C. Jue, 1992, "Some recent trends and developments in finite element analysis for incompressible thermal flows," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 671-707.
 [2] B. Tabarrok, J. Su, 1994, "Semi-implicit Taylor-Galerkin finite element methods for incompressible viscous flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 117, pp. 391-410.

[3] H. G. Choi, H. Choi, J. Y. Yoo, 1997, "A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 143, pp. 333-348.
 [4] R. F. Hanby, D. J. Silvester and J. W. Chew, "A comparison of coupled and segregated iterative solution techniques for incompressible swirling flow," *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 22, pp. 353-373.
 [5] M. H. Cho, H. G. Choi, J. Y. Yoo and J. I. Park, 2006, "Study on the Segregation Algorithms of the incompressible Navier-Stokes equation using P1P1/P2P1 finite element formulation," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 30, No. 3, pp. 262-269.
 [6] Y. S. Nam, H. G. Choi, J. Y. Yoo, 2002, "AILU preconditioning for the finite element formulation of the incompressible Navier-Stokes equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 4323-4339.
 [7] G. F. Carey and J. T. Oden, 1986, "Finite elements, Fluid Mechanics," Vol. 6, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., U. S. A.*
 [8] I. Babuška, 1971, "Errors bounds for finite element method," *Numer. Math.*, Vol. 16, pp. 322-333.
 [9] F. Brezzi, 1976, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers." *RAIRO, Ser. Rouge Anal. Numer.* Vol. 8, R-2.
 [10] T. J. R. Hughes, L. P. Franca and M. Balestre, 1986, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of Stokes problem accommodating equal order interpolations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 59, pp. 85-99.
 [11] K. Namkoong, H. G. Choi, J. Y. Yoo, 2004, "Numerical analysis of two-dimensional motion of a freely falling circular cylinder in an infinite fluid," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 28, No. 6, pp. 713-725.
 [12] C. H. K. Williamson, 1989, "Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 579-627.
 [13] M. Braza, P. Chassaing and H. Ha Minh, 1986, "Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder," *J. Fluid. Mech.*, Vol. 165, pp. 79-130.
 [14] G. E. Karniadakis and G. S. Triantafyllou, 1989, "Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 199, pp. 441-469.
 [15] K. Kwon and H. Choi, 1994, "A passive control of vortex shedding using a splitter plate attached to a circular cylinder," *Proceedings of the KSME 1994 Fall Annual Meeting*, pp. 502-507.