

# Boussinesq방정식을 이용한 불규칙파의 쇄파해석

## Numerical Analysis of Random Waves Breaking using Boussinesq Equation

이종인\*·김영택\*\*

Jong In Lee, Young Taek Kim

---

### Abstract

The accuracy impact of using high-order Boussinesq-type model as compared to the typical order model is examined in this paper. The multi-layer model developed by Lynett and Liu(2004a) is used for simulating of wave breaking over a step region. The overall comparisons between the two-layer model and the hydraulic experiments are quite good. The one-layer model overshoots the wave near the breakpoint, while the two-layer model shoals at a rate more consistent with the experimental data.

**Key words:** hydraulic experiment, high-order Boussinesq model, multi-layer model, wave breaking

---

## 1. 서론

현재까지 1차원 또는 2차원의 파랑의 전파변형을 해석하고자 하는 많은 Boussinesq형 방정식이 유도되고, 적용되어 왔다. Peregrine(1967)의 Boussinesq방정식과 Wu(1981)의 일반화된 Boussinesq방정식은 연직방향 유속장에 2차 다항식근사를 적용한 것으로 크게 두가지 문제점을 내포하고 있다. 첫 번째는 중간수심역에서 파랑의 전파에 대한 주기분산성이 약하다는 것이고, 두 번째는 약비선형의 가정으로 인해 비선형성이 강한 경우에 정도 높은 해석이 어렵다는 한계가 있었다. Nwogu(1993)는 임의수심에서의 유속을 이용함으로써 기존 Boussinesq방정식의 주기분산특성을 개선하였으며, 이 방정식은 선형분산식과 비교해 볼 때 중간수심역까지 분산특성이 개선된 것으로 나타났다. 또한, Liu(1994)와 Wei 등(1995)은 Nwogu(1993)의 방정식을 확장하여 중간수심역에도 적용이 가능하고, 강비선형의 파랑의 전파를 해석할 수 있는 방정식으로 유도하였다. Lynett과 Liu(2004 a,b)는 연직방향 유속장에 고차 다항식근사를 적용하는 대신 연직방향의 수피를  $N$ 개의 층으로 분할한 후, 각각의 층에 2차 다항식근사를 적용하고, 각 층을 접합시키는 방법을 적용하여 고차 Boussinesq방정식을 유도하였다. 이러한 접근을 통해 고차 다항식근사의 적용으로 인한 고차 공간미분항이 없는 방정식을 유도하였다. 본 연구에서는 Lynett과 Liu에 의해 유도된  $N$ 층 Boussinesq방정식의 적용성을 검증하기 위해 step 지형에서 불규칙파에 대한 쇄파 수리모형실험과 수치해석을 수행하여 그 결과를 비교하였다.

## 2. 지배방정식

본 연구에서 적용한  $N$ 층모형의 연속방정식 (1), 운동방정식 (2) 및 접합방정식 (3)은 각각 다음과 같으며, 자세한 유도과정은 Lynett과 Liu(2004b)를 참조할 수 있다.

---

\* 정회원·한국건설기술연구원 수자원연구부선임연구원·E-mail: jilee@kict.re.kr

\*\* 정회원·한국건설기술연구원 수자원연구부선임연구원·E-mail: ytkim@kict.re.kr

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_{n=1}^N \left( \frac{b_{n-1}}{h_0} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{h_0} \eta_n \right) \mathbf{u}_n - \nabla \cdot \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \frac{d_n}{h_0} \left[ \frac{\left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^3 - \left( \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right)^3}{6} - \frac{\left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right) z_n^2}{2} \right] \nabla S_n \\ & - \nabla \cdot \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \frac{d_n}{h_0} \left[ \frac{\left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^2 - \left( \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right)^2}{2} - \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right) z_n \right] \nabla T_n = O(\mu_n^4) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \epsilon_0 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \zeta + \mu_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\kappa_1^2}{2} \nabla S_1 + \kappa_1 \nabla T_1 \right) + \epsilon_0 \mu_1^2 \left[ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \kappa_1) \nabla T_1 + \kappa_1 \nabla (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1) + \kappa_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \kappa_1) \nabla S_1 + \frac{\kappa_1}{2} \nabla (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla S_1) \right] \\ & + \epsilon_0 \mu_0^2 \left[ T_1 \nabla T_1 - \nabla \left( \zeta \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] + \epsilon_0^2 \mu_0^2 \nabla \left( \zeta S_1 T_1 - \frac{h_0}{d_1} \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial S_1}{\partial t} - \zeta \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1 \right) + \epsilon_0^2 \epsilon_1 \mu_0^2 \nabla \left[ \frac{\zeta^2}{2} \left( S_1^2 - \frac{h_0}{d_1} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla S_1 \right) \right] - \mathbf{R}_b - \mathbf{R}_f = O(\mu_0^2 \mu_1^2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_n + \mu_n^2 \left[ \frac{\kappa_n^2 - \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^2}{2} \nabla S_n + \left( \kappa_n - \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right) \nabla T_n \right] = \mathbf{u}_{n-1} + \mu_{n-1}^2 \left[ \frac{\kappa_{n-1}^2 - \left( \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} \eta_{n-1} \right)^2}{2} \nabla S_{n-1} + \left( \kappa_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} \eta_{n-1} \right) \nabla T_{n-1} \right] \quad (3)$$

식(1) ~ 식(3)에서  $S_n$  과  $T_n$  은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$S_n = \frac{d_n}{h_0} \nabla \cdot \mathbf{u}_n, \quad T_n = \sum_{m=n}^{N-1} \eta_m \left( \frac{b_m}{d_{m+1}} S_{m+1} - \frac{b_m}{d_m} S_m \right) + \nabla \cdot (h \mathbf{u}_N) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{u}_n(x, y, \kappa_n(x, y, t), t)$  은  $z = \kappa_n(x, y, t)$  에서 정의되는 수평유속이다. 본 지배방정식은 연속방정식, 운동방정식 및 접합방정식으로 구성되며, 연속방정식은  $\zeta$ , 운동방정식은  $\mathbf{u}_1$  을 산정하는데 이용되고,  $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$  은 접합방정식을 이용하여 구하게 된다.

본 연구에서는 불규칙파의 쇄파실험결과와 비교하기 위해 1층(one-layer)모형과 2층(two-layer) 모형을 이용하였다. 1층모형, 즉  $N=1$ 인 경우에는 Wei와 Kirby(1995) 및 Hsaio와 Liu(2002)에 의해 유도된 강비선형 Boussinesq방정식과 동일하다.  $N=2$ 인 경우, 즉 2층모형에 대한 자세한 유도과정 및 지배방정식은 Lynett (2002) 및 Lynett과 Liu(2004a)를 참조할 수 있다.

### 3. 수리모형실험

쇄파실험은 길이 56m, 폭 1m, 높이 2m의 수로에서 수행되었으며, 사용된 조파기는 피스톤형(piston type)이다. 그림1은 본 실험의 개념도로서  $x=-11.5$ m 위치에 조파기가 위치하며, 수로의 양단에는 소파시설이 설치되어 있다. 그리고 실험에 적용된 step 지형의 사면경사는 1/40, step의 높이( $h_s$ )는 0.4m로 일정하며, 주요 계측구간은  $x=6$ m ~  $x=26$ m이다. 수면자료의 계측을 위해 쇄파가 발생하지 않는 구간에는 1m 또는 0.5m 간격, 쇄파가 발생하는 주변 구간에는 0.25m 간격으로 파고계를 배치하였다. 그림 1에서  $h_0$ 는 조파기 전면 수심이며,  $h_1(=h_0-h_s)$ 은 step 상단의 수심이다. 본 실험은 수심, 입사파의 주기 및 파고를 달리하며 수행되었다.

### 4. 결과분석 및 검토

본 연구에서는 고차 Boussinesq방정식을 이용한 수치모형의 정확도를 검증하기 위해 step 지형에 대해 불규칙파를 입사파로 한 쇄파 수리모형실험을 수행하고, 그 결과를 수치해석결과와 비교하였다. 입사파조건은  $k_{s0} A_{s0} = 0.056 \sim 0.144$ ,  $k_{s0} h_0 = 0.653 \sim 1.360$ 이고, 수치해석은 1층모형(기존 강비선형 Boussinesq모형)과 2층모형(다층모형에서  $N=2$ 인 모형)을 사용하였다. 수리실험 및 수치해석으로부터 도출된 자유수면자료를 이용하여 유의파고, 유의파봉높이, 유의파곡높이 및 평균수위를 산정하여 각각 비교하였다.

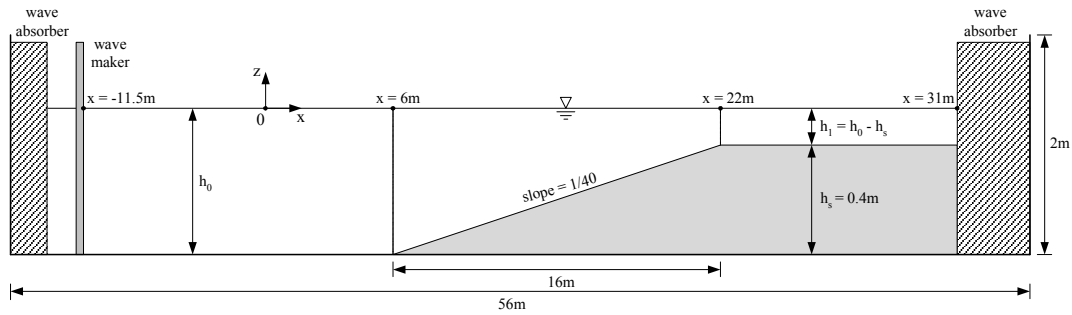


그림 1. 수리실험 및 수치해석 영역

그림 2는  $h_0=0.40\text{m}(h_1=0.0\text{m})$ 인 경우에 대한 결과를 도시한 것이다. 그림 2는 입사파의 비선형성( $k_{s0}A_{s0}$ )이 상대적으로 작은 경우로서 각각  $k_{s0}A_{s0}=0.059, 0.044, 0.037$  및  $0.031$  조건의 수리실험 및 수치해석 결과를 비교한 것이다. 1층모형의 경우가 2층모형에 의한 결과보다 유의파고가 약간 크게 예측되었으나, 수치해석결과와 수리실험결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 파랑의 쇄파로 인한 평균수위 상승도 잘 재현됨을 알 수 있다. 2층모형의 경우에는 유의파고, 유의파봉고, 유의파곡고 및 평균수위가 실험결과와 잘 일치하였으며, 1층모형(기존 강비선형 모형)의 경우에는 유의파봉고가 약간 크게 예측됨으로 인해 유의파고 또한 실험결과에 비해 다소 크게 나타났다. 그리고 동일한 입사파고 조건에서 주기가 길어질수록 쇄파지점에서의 쇄파파고는 크게 나타났다.

#### 참고문헌

- Hsiao, S.C. and Liu, P.L.-F. (2002). Nonlinear water waves propagating over a permeable bed. *Proc. Royal Society of London A.*, 485, 1291-1322.
- Liu, P.L.-F. (1994). Model equations for wave propagation from deep to shallow water. In *Advanced in Coastal Engineering* (ed. P.L.-F. Liu), Vol.1, 125-157, World Scientific.
- Lynett, P. (2002). A multi-layer approach to modeling generation, propagation, and interaction of water waves. Ph.D. Thesis, Cornell University, USA.
- Lynett, P. and Liu, P.L.-F. (2004a). A two-Layer approach to water wave modeling. *Proc. Royal Society of London A.*, 460, 2637-2669.
- Lynett, P. and Liu, P.L.-F. (2004b). Linear analysis of the multi-Layer model. *Coastal Engineering*, 51(6), 439-454.
- Nwogu, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 119(6), 618-638.
- Peregrine, D.H. (1967). Long waves on a beach. *J. of Fluid Mechanics*, 27, 815-827.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T. and Subramanya, R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I. Highly nonlinear unsteady waves. *J. of Fluid Mechanics*, 294, 71-92.
- Wu, T.Y. (1981). Long waves in ocean and coastal waters. *J. of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 107, 501-522.

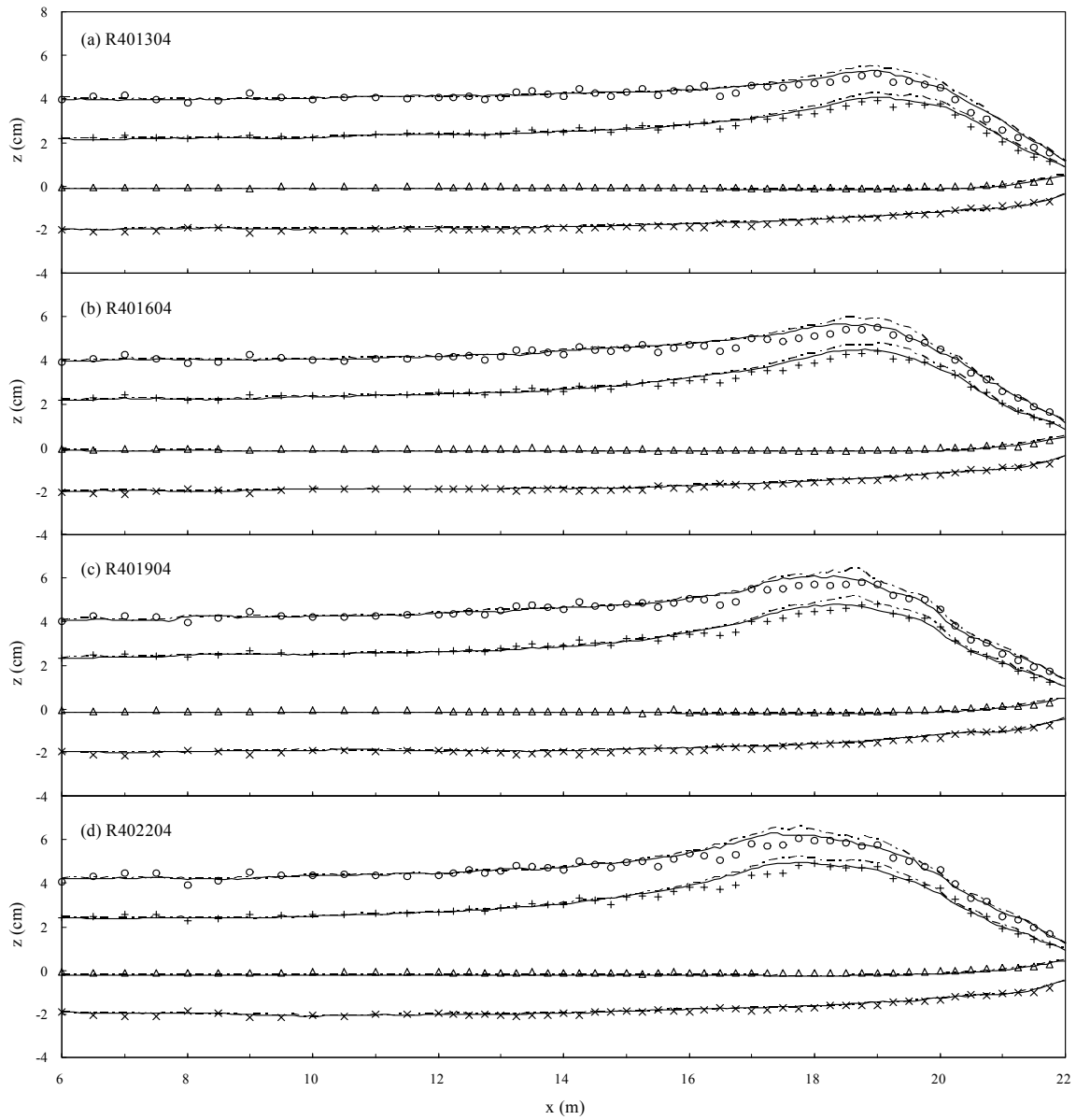


그림 2. 수리실험 및 수치해석결과 비교(Case R401304, R401604, R401904, and R402204).  
 기호: 실험자료(○: 유의파고, +: 유의파봉고, ×: 유의파곡고, △: 평균수위), 점선: 1  
 층모형 결과, 실선: 2층모형 결과