

# Generalized Logistic 분포형을 이용한 수공구조물의 위험도에 대한 불확실성 해석

## Uncertainty Analysis of the Risk of Hydraulic Structures Using Generalized Logistic Distribution

신홍준\* , 허준행\*\*

Hongjoon Shin, Jun-Haeng Heo

---

### Abstract

Statistical concepts and methods are routinely utilized in a number of design and management problems in engineering hydrology. This is because most of hydrological processes have some degree of randomness and uncertainty. Thus, the concepts of risk and uncertainty are commonly utilized for designing and evaluating hydraulic structures such as spillways and dikes. Therefore, in this study, uncertainty analysis considering the variance of design floods is performed to evaluate the uncertainty of the hydrologic risk of flood related hydraulic structures using frequency analysis.

*Keywords* : Uncertainty, Risk of Failure, Generalized Logistic Distribution

---

### 1. 서론

추정값의 오차는 크게 표본 자료의 부족으로 인한 오차와 부적절한 분포형의 선택으로 인한 오차로 나눌 수 있다. 그러므로 특정 재현기간에 대한 quantile의 추정값은 분포형의 정확도를 나타내는 척도가 존재하지 않는다면 추정값 자체로는 큰 의미를 갖는다고 할 수 없다. 위에서 언급한 오차 중 본 연구에서 사용되는 표준오차는 표본 자료의 부족으로 인한 오차와 관련이 있다고 할 수 있는데, 추정값의 표준오차는 일반적으로 매개변수 추정방법에 다르며 각 매개변수 추정방법은 각기 다른 표준오차를 나타내게 되어 가장 효율적인 방법은 quantile에 대한 표준오차 추정값 중 가장 작은 값을 가지는 매개변수 추정방법이 될 것이다 (Rao와 Hamed, 2000).

현재까지 표준오차와 신뢰구간과 관련된 연구는 많이 있어왔다. 신뢰구간과 표준오차와 관련된 초창기의 연구는 Yevjevich (1964)에 의해 정리된 바 있으며, Nash와 Amorocho (1966)는 normal 분포형과 EV1 분포형에 대해서 특정재현기간과 관련된 추정값을 표본크기와 매개변수들의 함수로 유도한 바 있다. 또한 Bobee (1973)는 위험도 측정과 관련하여 신뢰구간을 유도하였으며, Heo 등 (2001)은 모멘트법, 최우도법, 확률가중모멘트법에 의한 3변수 Weibull 분포형의 quantile에 대한 신뢰구간을 유도하였다.

Generalized logistic (GL) 분포형은 영국의 Flood Estimation Handbook (Institute of Hydrology, 1999)에서 영국의 홍수량 자료에 대해서 사용이 추천된 바 있는 분포형이다. 이 분포형의 특징은 형상매개변수가 음수일 경우 추정되는 quantile의 상한계가 존재하지 않는다는 점이다. 즉, 홍수빈도해석에서 상한계를 가진다는 것은 빈도해석 결과로 나타나는 추정값이 관측값의 최대값에 근접

---

\* 정회원.연세대학교 토목공학과 박사과정-E-mail : sinong@yonsei.ac.kr

\*\* 정회원.연세대학교 사회환경시스템공학부 토목환경전공 교수-E-mail : jhheo@yonsei.ac.kr

해진다는 것으로 빈도해석에 있어서 단점 중의 하나로 지적되는 것이다. 이러한 이유로 GL 분포형의 적용이 점차 증가하고 있는 추세라고 할 수 있으나, 분포형의 정확도를 나타내는 신뢰구간에 대한 연구는 아직 미흡한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 모멘트법(method of moments), 최우도법(method of maximumlikelihood), 확률가중모멘트법(method of probability weighted moments)에 의한 GL 분포형의 quantile 추정 과정을 정리하였으며, 각 quantile 추정값의 근사적인 분산을 표본크기, 재현기간, 매개변수들의 함수로 나타내었다. 또한 Monte Carlo 모의 실험을 수행하여 이렇게 유도된 quantile에 대한 신뢰구간의 적용성을 살펴보았다.

## 2. 모형

GL 분포형은 2변수 logistic 분포형의 일반화된 모형이며 kappa 분포형의 특수한 모형이라고 할 수 있다. Logistic 분포형으로부터의 일반화 과정은 기존의 문헌들에서 정의되었던 것들과는 다른 것으로, Ahmad 등 (1988)의 log-logistic 분포형을 재매개변수화한 형태라고 할 수 있다. 또한 GL 분포형의 명칭은 generalized Pareto 분포형이나 generalized extreme value 분포형과 같이 분포형의 특징을 반영하기 위해 붙이진 것으로 (Hosking과 Wallis, 1997), GL 분포형의 누가분포 함수와 확률밀도함수는 각각 다음과 같다.

$$F(x) = \left[ 1 + \left\{ 1 - \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0) \right\}^{1/\beta} \right]^{-1} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0) \right\}^{1/\beta - 1} \left[ 1 + \left\{ 1 - \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0) \right\}^{1/\beta} \right]^{-2} \quad (2)$$

여기서,  $x_0$ 는 위치매개변수,  $\alpha$ 는 크기매개변수,  $\beta$ 는 형상매개변수이다.

또한 GL 분포형의 범위는 다음과 같이 주어진다.

$\beta < 0$ 인 경우,  $x_0 + \alpha/\beta \leq x < \infty$ ,  $\beta > 0$ 인 경우,  $-\infty < x \leq x_0 + \alpha/\beta$

여기서,  $\beta = 0$ 인 경우 GL 분포형은 2변수 logistic 분포형이 된다.

GL 분포형의 평균, 분산, 왜곡도계수는 다음과 같이 주어진다.

$$\mu = x_0 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - g_1) \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (g_2 - g_1^2) \quad (4)$$

$$C_s \equiv \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\beta}{|\beta|} \frac{-g_3 + 3g_1g_2 - 2g_1^3}{(g_2 - g_1^2)^{3/2}} \quad (5)$$

여기서,  $g_r = \Gamma(1 + r\beta)\Gamma(1 - r\beta)$ ,  $\Gamma(\cdot)$ 는 gamma 함수이다.

## 3. Quantile의 신뢰구간

### 3.1 모멘트법에 의한 표준오차

표본에 대한 0~2차 모멘트를 사용하면  $\hat{x}_T$ 의 분산은 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Kite, 1988).

$$s_T^2 = \left( \frac{\mu_2}{N} \right) \left[ 1 + K_T \gamma_1 + \frac{K_T^2 (\gamma_2 - 1)}{4} + \left( \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_1} \right) \left\{ 2\gamma_2 - 3\gamma_1^2 - 6 + K_T \left( \gamma_3 - \frac{6}{4} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{10}{4} \gamma_1 \right) \right\} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial K_T}{\partial \gamma_1} \right)^2 \left\{ \gamma_4 - 3\gamma_1 \gamma_3 - 6\gamma_2 + \frac{9}{4} \gamma_1^2 \gamma_2 + \frac{35}{4} \gamma_1^2 + 9 \right\} \right] \quad (6)$$

여기서,  $\gamma_j$ 는 cumulant이며,  $\gamma_1$ 에 대한  $K_T$ 의 편미분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial K_T}{\partial \gamma_1} = \left( \frac{\partial K_T}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \beta}{\partial \gamma_1} \right) = \frac{\partial K_T / \partial \beta}{\partial \gamma_1 / \partial \beta} \quad (7)$$

식 (7)의 우변은 다음과 같이 2개의 부분편미분으로 나눌 수 있다.

$$\frac{\partial K_T}{\partial \beta} = \frac{\beta}{|\beta|} \left[ \frac{d_1 + (T-1)^{-\beta} \log(T-1)}{(g_2 - g_1^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{(g_1 - (T-1)^{-\beta})(d_2 - 2g_1 d_1)}{(g_2 - g_1^2)^{3/2}} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} = \frac{\beta}{|\beta|} \left[ \frac{3d_1 g_2 + 3g_1 d_2 - d_3 - 6g_1^2 d_1}{(g_2 - g_1^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(3g_1 g_2 - g_3 - 2g_1^3)(d_2 - 2g_1 g_2)}{(g_2 - g_1^2)^{5/2}} \right] \quad (9)$$

여기서,  $d_r = r g_r \{ \psi(1+r\beta) - \psi(1-r\beta) \}$ ,  $\psi(\cdot)$ 는 digamma 함수이다.

### 3.2 최우도법에 의한 표준오차

최우도법에 의한 quantile 추정값의 분산은 다음의 분산, 공분산을 이용하여 구할 수 있다.

$$Var(x_0) = 3\alpha^2 (-S_1 S_3 + S_4 \beta^2 + S_1 S_3 S_4 \beta^2 - S_5^2 - 1) D^{-1} \quad (10)$$

$$Var(\alpha) = 3\alpha^2 \beta^2 (S_1^2 S_3 g_2 - 2S_1 S_5 g_2 + S_1 S_4 g_2 \beta^2 - S_5^2 + 2S_1 S_2 S_5 - S_1^2 S_2^2) D^{-1} \quad (11)$$

$$Var(\beta) = 3\beta^4 S_1 (g_2 + S_1 S_3 g_2 - S_1 S_2^2) D^{-1} \quad (12)$$

$$Cov(x_0, \alpha) = -3\alpha^2 \beta (-S_1 S_2 S_5 + S_1 S_2 S_4 \beta^2 - S_5^2 + S_1 S_3 S_5 + S_5 - S_1 S_2) D^{-1} \quad (13)$$

$$Cov(x_0, \beta) = -3\alpha \beta^2 S_5 (-S_1 S_2 + 1 + S_1 S_3) D^{-1} \quad (14)$$

$$Cov(\alpha, \beta) = 3\alpha \beta^3 S_1 (-S_5 g_2 + S_1 S_3 g_2 + g_2 + S_2 S_5 - S_1 S_2^2) D^{-1} \quad (15)$$

여기서,  $S_1 = 1 - \beta^2$ ,  $S_2 = g_2 - g_1$ ,  $S_3 = g_2 - 2g_1$ ,  $S_4 = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{\pi^2}{3}$ ,  $S_5 = g_1 \left\{ 1 - \frac{\beta(1-\beta^2)}{\psi(1-\beta) - \psi(\beta)} \right\}$ ,

$D = N \left\{ (S_2^2 - S_3 g_2) S_1^2 + (g_2 + S_1 S_3 g_2 - S_1 S_2^2) S_1 S_4 \beta^2 + (2S_2 - g_2 - \frac{1}{S_1} - S_3) S_1 S_5^2 - S_1 g_2 \right\}$ .

### 3.3 확률가중모멘트법에 의한 표준오차

확률가중모멘트법에 의한 quantile 추정값의 분산은 다음의 분산, 공분산을 이용하여 구한다.

$$Var(\hat{x}_0) = N^{-1} [ g_{00}^2 V_{00} + g_{01}^2 V_{11} + g_{02}^2 V_{22} + 2g_{00} g_{01} V_{01} + 2g_{00} g_{02} V_{02} + 2g_{01} g_{02} V_{12} ] \quad (16)$$

$$Var(\hat{\alpha}) = N^{-1} [ g_{10}^2 V_{00} + g_{11}^2 V_{11} + g_{12}^2 V_{22} + 2g_{10} g_{11} V_{01} + 2g_{10} g_{12} V_{02} + 2g_{11} g_{12} V_{12} ] \quad (17)$$

$$Var(\hat{\beta}) = N^{-1} [g_{20}^2 V_{00} + g_{21}^2 V_{11} + g_{22}^2 V_{22} + 2g_{20}g_{21} V_{01} + 2g_{20}g_{22} V_{02} + 2g_{21}g_{22} V_{12}] \quad (18)$$

$$Cov(\hat{x}_0, \hat{\alpha}) = N^{-1} [g_{10}g_{00} V_{00} + g_{11}g_{01} V_{11} + g_{12}g_{02} V_{22} \\ + (g_{10}g_{01} + g_{11}g_{00}) V_{01} + (g_{10}g_{02} + g_{12}g_{00}) V_{02} + (g_{11}g_{02} + g_{12}g_{01}) V_{12}] \quad (19)$$

$$Cov(\hat{x}_0, \hat{\beta}) = N^{-1} [g_{20}g_{00} V_{00} + g_{21}g_{01} V_{11} + g_{22}g_{02} V_{22} \\ + (g_{20}g_{01} + g_{21}g_{00}) V_{01} + (g_{20}g_{02} + g_{22}g_{00}) V_{02} + (g_{21}g_{02} + g_{22}g_{01}) V_{12}] \quad (20)$$

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = N^{-1} [g_{20}g_{10} V_{00} + g_{21}g_{11} V_{11} + g_{22}g_{12} V_{22} \\ + (g_{20}g_{11} + g_{21}g_{10}) V_{01} + (g_{20}g_{12} + g_{22}g_{10}) V_{02} + (g_{21}g_{12} + g_{22}g_{11}) V_{12}] \quad (21)$$

여 기 서 ,  $g_{00} = \frac{1}{g_1} \left\{ \frac{(1-\beta)^2 (g_1-1)}{\beta^2} + 1 - \frac{1-\beta}{\beta} d_1 \right\}$ ,  $g_{11} = \frac{2}{g_1} \{1 - (3-\beta)d_1\}$ ,  $g_{22} = -\frac{6}{\alpha g_1}$ ,  
 $g_{10} = \frac{1}{g_1} \{(1-\beta)d_1 - 1\}$ ,  $g_{01} = \frac{2}{g_1} \left\{ \frac{(2\beta-3)(g_1-1)}{\beta^2} + \frac{(3-\beta)}{\beta} d_1 \right\}$ ,  $g_{02} = \frac{6}{g_1} \left\{ \frac{(g_1-1)}{\beta^2} - \frac{d_1}{\beta} \right\}$ ,  $g_{12} = \frac{6d_1}{g_1}$ ,  
 $g_{20} = \frac{\beta-1}{\alpha g_1}$ ,  $g_{21} = \frac{2}{g_1} \frac{(3-\beta)}{\alpha}$ ,  $V_{00} = J_{00} + J_{00}$ ,  $J_{00} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(1-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(2)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 1 & 1+2\beta \\ 2 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  $V_{11} = J_{11} + J_{11}$ ,  
 $J_{11} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(3-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(4)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 2 & 1+2\beta \\ 4 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  $V_{22} = J_{22} + J_{22}$ ,  $J_{22} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(5-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(6)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 3 & 1+2\beta \\ 6 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  
 $V_{01} = V_{10} = J_{01} + J_{10}$ ,  $J_{01} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(2-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(3)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 2 & 1+2\beta \\ 3 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  $J_{10} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(2-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(3)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 1 & 1+2\beta \\ 3 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  
 $V_{02} = V_{20} = J_{02} + J_{20}$ ,  $J_{02} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(3-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(4)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 3 & 1+2\beta \\ 4 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  $J_{20} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(3-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(4)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 1 & 1+2\beta \\ 4 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  
 $V_{12} = V_{21} = J_{12} + J_{21}$ ,  $J_{12} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(4-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(5)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 3 & 1+2\beta \\ 5 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  $J_{21} = \frac{\alpha^2 \Gamma(1+2\beta) \Gamma(4-2\beta)}{(1+\beta) \Gamma(5)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1 & 2 & 1+2\beta \\ 5 & 2+\beta \end{matrix} \right]$ ,  
 $d_1 = \psi(1+\beta) - \psi(1-\beta)$ ,  $g_1 = \Gamma(1+\beta) \Gamma(1-\beta)$ .

#### 4. Monte Carlo 모의실험

본 연구에서 모의실험은 모멘트법, 최우도법, 확률가중모멘트법에 의한 quantile의 신뢰구간의 적용성을 검토하기 위해 수행되었다. 이를 위해 위치매개변수와 크기매개변수는 각각 0, 1로 고정시켰으며, 형상매개변수는 왜곡도계수 -1.0, -0.5, +0.5, +1.0에 해당하는 +0.11387, +0.06134, -0.06134, -0.11387으로 변화시켰다. 이는 모멘트법에 의한 표준오차가  $\mu_6$  때문에  $|\beta| \leq 1/6$ 인 범위에서만 존재하므로 형상매개변수의 범위를 제한한 것이다. 가정된 매개변수에 대해서 표본크기  $N = 10, 25, 50, 100, 200, 300$ 에 대한 10,000개의 자료들을 발생시켰으며, 각각의 발생된 자료와 매개변수 추정방법에 대해서 매개변수들을 추정하고, 추정된 매개변수들을 이용하여 quantile과 표준오차를 계산하여 신뢰구간을 계산하였다. 또한 상대편이  $RBIAS = BIAS(\hat{x}_{1-\beta})/x_{1-\beta}$ 와 상대평균제곱근오차  $RRMSE = \sqrt{MSE(\hat{x}_{1-\beta})}/x_{1-\beta}$ 를 이용하여 신뢰구간의 적용성을 파악하고자 하였다.

다음의 그림 1과 그림 2는  $N=25, T=100$ 인 경우 상한신뢰구간에 대한 상대편이를 나타낸 그림이다. 일반적으로 그림 1에서 모멘트법에 의한 상대편이는 재현기간이 커질수록 증가하는 것을 알 수 있으며, 그림 2에서 모멘트법의 몇몇 경우를 제외하고는  $N \geq 25$ 일 때 상대편이가 0이 가까워지는 것을 알 수 있다.

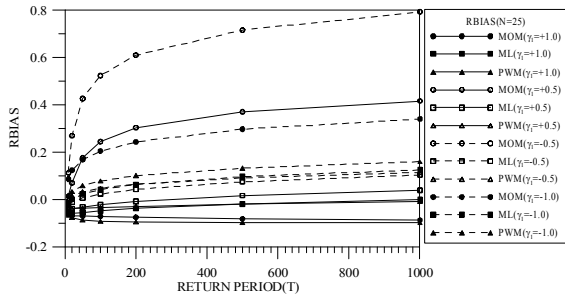


그림 1 N=25일 경우 95% 상한신뢰구간에 대한 상대편이

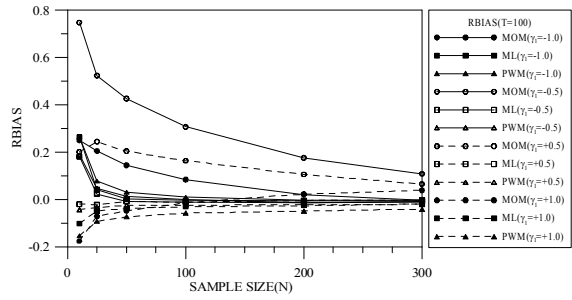


그림 2 T=100일 경우 95% 상한신뢰구간에 대한 상대편이

그림 3과 그림 4는  $N=25$ 와  $T=100$ 일 경우 상한신뢰구간에 대한 상대평균제곱근오차를 나타낸 그림이다. 그림 3에서 상대평균제곱근오차는 일반적으로 재현기간이 커지면 증가하는 것으로 나타나며, 특히 모멘트법에 의한 상대평균제곱근오차는 매우 큰 값을 가지나, 최우도법과 확률가중모멘트법에 의한 상대평균제곱근오차는 비슷한 값을 가지는 것을 알 수 있다. 그림 4에서 표본 크기의 증가에 따라 상대평균제곱근오차가 감소하는 것을 알 수 있다. 하지만  $N \geq 50$ 일 경우에는 최우도법에 의한 결과와 확률가중모멘트법에 의한 결과가 거의 비슷하게 감소하는 경향을 나타내고 있다.

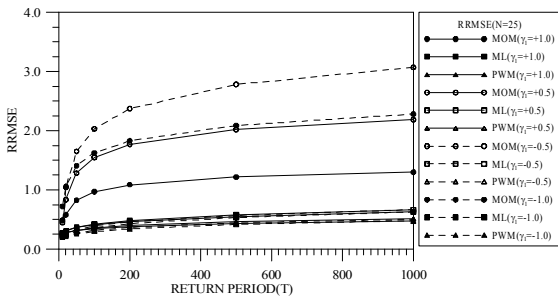


그림 3 N=25일 경우 95% 상한신뢰구간에 대한 상대평균제곱근오차

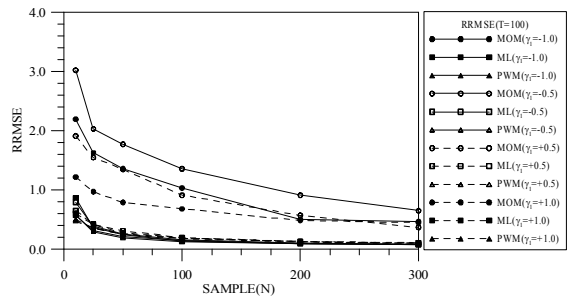


그림 4 T=100일 경우 95% 상한신뢰구간에 대한 상대평균제곱근오차

## 5. 결론

본 논문에서는 모멘트법, 최우도법, 확률가중모멘트법에 기초하여 3변수 generalized logistic (GL) 분포형에 대한 신뢰구간 결정에 관한 연구를 수행하였다. 본 연구에서는 GL 분포형에 대한 quantile 추정값의 근사적인 분산을 표본 크기, 재현기간, 매개변수 등의 함수로 나타내었으며, 이렇게 유도된 분산은 모집단의 quantile에 대한 신뢰구간 추정에 사용될 수 있다.

또한 본 연구에서는 모멘트법, 최우도법, 확률가중모멘트법에 의해 유도된 신뢰구간의 적용성을 파악하기 위해 모의실험을 수행하였다. 최우도법은 몇몇 경우를 제외하고는 일반적으로 모든 재현기간에 대해서 가장 작은 신뢰구간의 상대편이를 보였다. 또한 모멘트법은 왜곡도계수가 0에 접근할수록 상대편이가 증가하는 경향을 보였으나, 최우도법과 확률가중모멘트법은 음으로 왜곡되면서 표본 크기가 큰 경우를 제외하고는 감소하는 경향을 나타내었다. 또한 상대평균제곱근오차는 자료가 대칭일 경우 확률가중모멘트법이 가장 작은 값을 나타내었으나, 자료가 왜곡이 되어 있을 경우에는 최우도법이 상대적으로 작은 표본 크기에 불구하고 가장 작은 값을 가지게 되는 것으로 나타났다.

## 참 고 문 헌

- Ahmad, M.I., Sinclair, C.D., and Werritty, A. (1988). Log-logistic flood frequency analysis with historical information, *Journal of Hydrology*, 98:205-224.
- Bobee, B. (1973). Sample error of T-year events computed by fitting a Pearson type-3 distribution, *Water Resources Research*, 9(5):1264-1270.
- Heo, J.H., Salas, J.D., and Kim, K.D. (2001). Estimation of confidence intervals of quantiles for the Weibull distribution, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15:284-309.
- Hosking, J.R.M. and Wallis, J.R. (1997). *Regional Frequency Analysis*, New York, Cambridge University Press.
- Institute of Hydrology (1999). *Flood Estimation Handbook*, UK, Institute of Hydrology.
- Kite, G.W. (1988). *Frequency and risk analysis in hydrology*, Colorado, Water Resources Publications.
- Nash, J.E. and Amorocho, J. (1966). The accuracy of the prediction of floods of high return period, *Water Resources Research*, 2(2):191-198.
- Rao, A.R. and Hamed, K.H. (2000). *Flood Frequency Analysis*, Florida, CRC Press.
- Yevjevich, V.M. (1964). *Handbook of Applied Hydrology*, New York, McGraw-Hill.