

하상변동 수치모의를 위한 유한요소법 알고리즘 개발

Development of FEM Algorithm for Modeling Bed Elevation Change

김태범*, 최성욱**, 민경덕***

Tae Beom Kim, Sung-Uk Choi, Kyung Duck Min

요 지

자연하천은 일반적으로 만곡수로나 사행수로 형태를 보이고 있으며, 직선수로에서와 달리 원심력에 기인한 이차류 영향을 받게 된다. 이차류에 의해서 수면에서는 만곡부 바깥쪽으로, 하상에서는 만곡부 안쪽으로의 흐름특성을 보이게 된다. 만곡부 안쪽으로 가해지는 하상 전단응력에 기인하여 하상에서의 입자가 만곡부 안쪽으로 이송되며, 결과적으로 만곡부 안쪽에는 점사주가, 바깥쪽에는 소(pool)가 생성된다. 또한 지형경사의 생성으로 입자에 가해지는 중력효과도 변화된다. 따라서 이와 같은 자연하천의 흐름과 하상변동을 수치모의하기 위해서는 만곡부 이차류 특성을 고려한 모형이 필요하다.

본 연구에서는 수심 적분된 흐름방정식과 하상토 보존방정식(Exner equation)을 이용한 하상변동을 위한 비연계 수치모형을 위해서 하상토 보존방정식의 유한요소 알고리즘을 개발하였다. 하상토 보존방정식은 흐름 특성에 따른 평형 유사량의 공간변화율을 이용하여 일정 기간 동안의 하상 변화량을 계산한다. 이 때 이차류에 의한 하상 전단응력의 편각 및 지형경사 변화에 따른 실제 입자의 이송방향을 보정하여 평형 유사량이 계산된다. 이러한 보정식을 적용시키기 위해서는 유속성분의 공간변화량 및 지형경사의 공간성분이 필요하다. 유한요소법은 연속성 변수를 이산화시켜 근사해를 구하는 수치기법의 일종이기 때문에, 요소망이 불규칙적으로 구성되었을 경우 임의의 절점에서 연속성을 지닌 변수의 공간변화율을 계산하는데 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 평형 유사량 계산 시에 절점이 아닌 요소 내부에서 평형 유사량을 계산하는, 하상토 보존방정식의 새로운 유한요소 알고리즘을 개발하고, 새로운 알고리즘을 적용시킨 수치모형의 검증을 행하였다.

경계조건 알고리즘의 검증으로 위해서 Soni 등 (1980)이 행한 상류 유입 유사량에 따른 하상변동을 수치모의하고 실험치와 비교하였으며, Suttmuller와 Glerum (1980)이 수행한 만곡수로에서의 하상변동을 모의하고 실험과 비교하였다. 새로운 알고리즘을 적용시킨 하상토 보존방정식의 유한요소 수치모형의 결과는 매우 안정적이며, 실험과 매우 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 본 수치모델은 현재 균일한 입자의 하상토만을 고려하므로, 입자분급이나 하상 장갑화 현상 등은 무시한다.

핵심용어 : 유한요소법, 유사이송, 하상변동, 만곡수로

1. 서 론

사행천과 같이 횡방향 변화가 다양하게 발생하는 자연하천에서의 하상변동을 수치모의하기 위해서 유한요소법의 하나인 SU/PG법(Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin Scheme)을 이용하여 수심 적분된 흐름방정식에 대한 해를 구하고, Exner 방정식을 이용하여 하상변동을 모의하는 비연

* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사후 연구원 · Email : geo108@naver.com

** 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수 · Email : schoi@yonsei.ac.kr

*** 연세대학교 지구시스템학과 교수 · Email : min@yonsei.ac.kr

계 수치모형을 제시한바 있다(김태범 등, 2005). 기 개발된 모형의 최대 장점은 만곡부 이차류 효과와 하상경사에 의한 중력 효과를 반영하여 하상에서의 유사이송 방향에 대한 보정이 이루어졌다는 점이며, 만곡수로에서의 유한요소법을 이용한 하상변동 가능성을 살펴보았다. 기 개발 모형에서 적용시킨 Exner 방정식의 해를 구함에 있어서, 각 절점에서 만곡부의 이차류 효과 및 지형경사에 의한 보정을 계산하는데, 유속 및 지형경사의 공간변화율이 보정식에 필요하다. 유한요소망에서 유속 및 지형경사의 공간변화율을 각 절점에서 구할 때, 특히 흐름 특성이나 지형경사가 급변할 때 수치적 불안정이 유발된다. 따라서 기 개발된 모형의 수치 안정성 확보에 중점을 두어 하상변동 수치모형을 개선할 필요성이 있다. 절점에서 유속이나 지형의 공간변화율 계산을 피하는 새로운 방법을 모색해야 하며, 유사이송 방향 보정에 따른 불안정성을 개선하도록 하여야 한다.

본 연구에서는 유한요소법을 이용한 하상변동 수치모의를 위한 새로운 알고리즘을 개발하였으며, 새롭게 개선된 하상변동 수치모형의 안정성과 실용성을 알아보기 위해서, 실내수로 실험자료를 이용한 알고리즘 검증 및 적용성을 살펴보았다.

2. 지배방정식

하상변동 계산을 위해서 Exner 방정식을 이용한다.

$$(1-p')\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ty}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

여기서 p' 은 공극율, z_b 는 하상고, q_{tx} 와 q_{ty} 는 단위 폭 당 유사량의 x , y 성분이다. 만곡부 이차류에 의한 전단응력 방향의 변화는 다음과 같다.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F}{R}h\right) \quad (2)$$

여기서 α 는 이차류에 의한 하상전단응력의 방향, $1/R$ 은 유선의 곡률 (R 은 유선의 곡률반경)이며, u , v 는 수심 평균된 유속의 x , y 성분, h 는 수심이다. 계수 F 는 Jansen (1979)이 제안한 다음 식으로 계산될 수 있다.

$$F = \frac{2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right) = \frac{2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{n\sqrt{g}}{\kappa h^{1/6}}\right) \quad (3)$$

여기서 C 는 Chezy 계수, n 은 Manning의 조도계수, κ 는 von Kármán 상수이다. 식 (2)에서 우변의 두 번째 항이 이차류에 의한 하상의 전단응력 편차 (δ)를 나타낸다 (그림 1). 그림 1에서 β 는 지형경사, Φ 는 입자의 이송방향이다. 식 (2)에서 유선의 곡률은 유선을 따라 이동할 때 유선과 x 축 사이의 각도 변화율로 표현될 수 있으며, 아래와 같은 식으로 정리된다.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{V^3} \left[\left(u^2 \frac{\partial v}{\partial x} + uv \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(uv \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (4)$$

지형경사가 입자의 이송방향과 일치하지 않을 경우, 중력 효과로 인해서 입자의 이송방향 (Φ)은 하상전단응력 방향 (α)과 일치하지 않게 된다. Struiksmá 등 (1985)은 만곡부에서의 유사이송에 관한 연구에서 지형경사에 대한 유사의 이송방향 보정식으로 다음과 같은 식을 사용하였다.

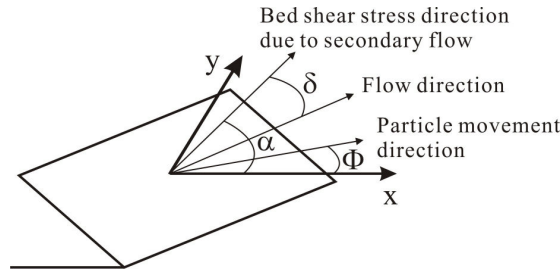


그림 3.1.1 만곡부 이차류에 의한 하상전단응력 방향 변화 및 지형경사에 따른 중력효과

$$\tan\Phi = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{f_s\theta_*} \frac{\partial z_b}{\partial y}}{\cos\alpha - \frac{1}{f_s\theta_*} \frac{\partial z_b}{\partial x}} \quad (5)$$

여기서 f_s 는 1~2 사이의 형상계수, θ_* 은 아래와 같이 정의되는 Shields parameter이다.

$$\theta_* = \frac{u^2 + v^2}{C^2(\gamma_s - 1)d_{50}} = \frac{n^2 V^2}{h^{1/3}(\gamma_s - 1)d_{50}} \quad (6)$$

여기서 d_{50} 은 입자의 중앙입경, $V = \sqrt{p^2 + q^2}/h$ 로 수심 평균된 유속이며, γ_s 는 유사의 단위중량이다. 식 (1)에서 총유사량의 x, y 방향 성분은 식 (5)에서 얻어진 유사이송 방향 각도를 이용하여 아래와 같이 계산된다.

$$q_{tx} = \cos\Phi q_t \quad (7)$$

$$q_{ty} = \sin\Phi q_t \quad (8)$$

3. 유한요소 알고리즘의 개발

시간에 대한 편미분항을 이산화하기 위해서 본 연구에서는 Beam and Warming alternate direction implicit (ADI) scheme을 응용한 유한차분 음해기법을 사용하였다. Exner 방정식에 음해기법을 적용시켜 정리하면 식 (9)와 같다.

$$\frac{\Delta z_b}{\Delta t} + \frac{1-\theta}{1-p'} \left(\frac{\partial q_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ty}}{\partial y} \right)^n + \frac{\theta}{1-p'} \left(\frac{\partial q_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ty}}{\partial y} \right)^{n+1} = 0 \quad (9)$$

식 (9)에 가중 잔차법을 적용시키고, Green의 정리를 이용하여 정리하면, 아래와 같은 식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} N^* \frac{\Delta z_b}{\Delta t} d\Omega = \frac{1-\theta}{1-p'} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N^*}{\partial x} q_{tx}^n + \frac{\partial N^*}{\partial y} q_{ty}^n \right) d\Omega - \frac{1-\theta}{1-p'} \int_{\Gamma} N^* (n_x q_{tx}^n + n_y q_{ty}^n) d\Gamma \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\theta}{1-p'} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N^*}{\partial x} q_{tx}^{n+1} + \frac{\partial N^*}{\partial y} q_{ty}^{n+1} \right) d\Omega \\
& - \frac{\theta}{1-p'} \int_{\Gamma} N^* (n_x q_{tx}^{n+1} + n_y q_{ty}^{n+1}) d\Gamma
\end{aligned}$$

식 (10)의 우변 두 번째 항과 마지막 항에서 Γ 는 요소의 경계를 의미하며, 요소경계를 따라 적분됨을 나타낸다. Δz_b 는 아래와 같은 근사식을 적용시킨다.

$$U = \sum_{j=1}^{NP} N_j U_j \quad (11)$$

여기서 U 는 절점 상에서 정의되는 변수이고, N_i 은 각 절점마다 정의되는 보간함수 또는 형상함수이며, NP 는 절점의 총 개수이다. 따라서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{A}] [\Delta \mathbf{z}_b] = \Delta t \frac{1-\theta}{1-p'} [\mathbf{R}^n] + \Delta t \frac{\theta}{1-p'} [\mathbf{R}^{n+1}] \quad (12)$$

여기서

$$A_{ij} = \int_{\Omega^e} (N_i^* N_j) d\Omega \quad (13)$$

$$R_i^n = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^*}{\partial x} q_{tx}^n + \frac{\partial N_i^*}{\partial y} q_{ty}^n \right) d\Omega - \int_{\Gamma^e} N_i^* (n_x q_{tx}^n + n_y N_i^* q_{ty}^n) d\Gamma \quad (14)$$

이다.

4. 하상변동 수치모형의 검증

본 연구에서 개발된 하상변동 수치모형 알고리즘의 검증을 위해서 Laboratory of Fluid Mechanics (LFM)의 180° 실내만곡수로 (Sutmuller와 Glerum, 1980)를 적용하였다. 또한 경계조건에 대한 적용성을 살펴보기 위해서 Soni 등 (1980)의 실험에 대한 수치모의를 수행하였다. 수치모형에 적용된 흐름 및 유사특성은 표1과 같다.

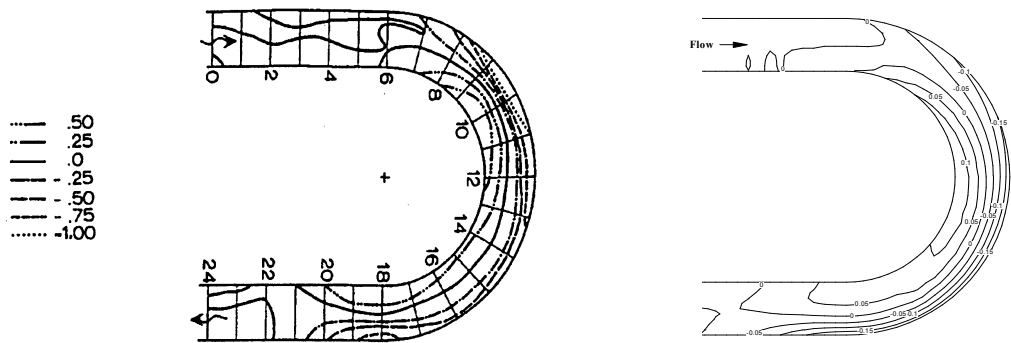
4.1 180° 만곡수로

총유사량은 Engelund와 Hansen (1972) 공식을 이용하였으며, 평평한 수로를 초기조건으로 시작하여 2시간 경과한 모의 결과를 얻었다. 그림 1은 Sutmuller와 Glerum (1980)의 실내수로실험과 본 모형에 의한 하상변동량($\Delta z/h_0$) 결과이다. 계산 결과 만곡수로의 내측에서 퇴적 그리고 외측에서는 침식현상이 발생하는 양상을 잘 나타내고 있다. 입자의 이송방향은 초기에는 이차류 영향을 크게 받아 만곡부의 안쪽으로 향하는 입자의 이송이 우세하게 나타나지만, 시간이 지남에 따라 만곡부 내측에는 퇴적이, 외측에는 침식이 발생하는 하상변동에 따라, 지형경사에 의한 중력의 영향이 증가하게 된다. 이러한 경사진 지형에서 입자에 작용하는 중력효과로 인해서 이차류 효과에 의한 영향이 감소하게 된다. 따라서 하상변동이 평형상태에 다다를수록 이차류 효과와 지형경사에 의한 중력효과가 서로 상쇄되어 만곡수로와 거의 평행한 방향으로 입자의 이송방향이 설정된다. 하지만, 실내실험에서는 만곡유입 후의 대략 45° 구간에서 최대 퇴적과 최대 침식이 발생하고 있

는 반면에, 모형의 결과는 대략 80° 이상의 만곡부 외측을 따라 최대 침식양상을 보이고 있고, 최대 퇴적구간도 실험에 비해서 더욱 넓다.

표 1. LFM 실험과 Soni 등 실험에 관한 흐름 및 유사 특성

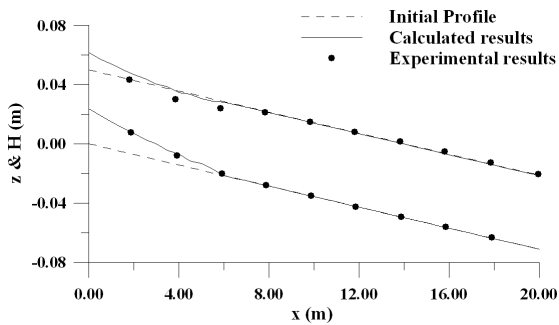
Flume	유량(Q) [m ³ /s]	폭(B) [m]	수심(h) [m]	유속(V) [m/s]	경사(S) [%]	Chezy 계수(C)	중앙입경 [mm]	곡률반경 [m]	곡선길이 [m]
LFM	0.17	1.7	0.2	0.5	1.80	26.4	0.78	4.25	13.35
Soni 등	0.02	1.0	0.05	0.4	3.56	30.0	0.32	.	.



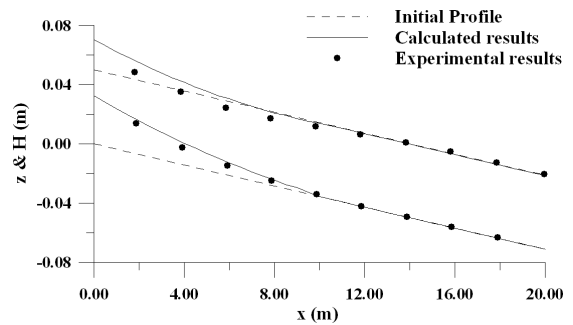
(a) 실내실험

(b) 하상변동량 계산결과

그림 1. LFM 수로의 하상변화량 ($\Delta z/h_0$)



(a) 15분 경과



(b) 30분 경과

그림 2. 상류 유입유사에 의한 하상 및 수위변화

4.2 상류 유입유사가 존재하는 수로

본 모의 실험은 상류에서 유입 유사량이 존재하는 경우이며, Soni 등 (1980)은 이 실험을 통해서 다음과 같은 간단한 평형유사량 산정공식을 제안하였다.

$$q_t = aV^b \quad (15)$$

Soni 등 (1980)의 실험을 통해 산정된 계수값은 $a = 0.00145$, $b = 5.0$ 이다. 본 모의를 위해서 식(15)의 유사량 공식을 사용하였다. 길이 30 m 수로에서 상류단에 공급되는 유사량은 평형유사량의 4배를 사용하였다.

그림 2는 15분, 30분 후의 하상 및 수위 결과이며, Soni 등 (1980)의 실험결과와 비교하고 있다. 시간이 경과함에 따라 하상이 상승하고, 하상 상승 범위가 하류 쪽으로 확대됨을 잘 나타내고 있으며, Soni 등 (1980)의 실험 결과와 비교할 때 매우 유사하다. 특히 15분 경과 시의 수위에서 나타나는 초기 수위보다도 낮아지는 영역이 발생하는 변곡(transient) 현상을 잘 나타내고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 유한요소법을 이용한 하상변동 수치모형의 새로운 알고리즘을 개발하고, 만곡수로에서의 이차류 및 하상경사 영향에 의한 하상변동을 적용, 검증하였다. 또한 상류에 유입유사가 존재하는 경우에 대한 실내실험과 개발된 모형의 결과를 비교, 검증하였다. 본 모형은 홍수시 과대한 유량유입 뿐만 아니라 유사량 유입에 따른 하상변동 모의에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 본 연구에서 새롭게 개발된 알고리즘은 유한요소법을 이용한 하상변동 수치모형의 합리적인 해법을 제시한다.

감사의 글

본 연구는 수자원의 지속적 확보기술개발 사업단의 21세기 프론티어 연구개발 사업의 일환(과제명: RAMS 개발, 과제번호: 2-3-2)으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. 김태범, 최성욱, 민경덕 (2005). 유한요소법을 이용한 만곡수로에서의 2차원 하상변동 수치모형, 2005년 한국수자원학회 학술발표회 논문집 CD.
2. Engelund, F., and Hansen, E. (1972). *A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Streams*, Teknisk Forlag, Copenhagen, 62 pp.
3. Jansen, P. P. (1979). *Principles of River Engineering, the non-tidal alluvial river*, Pitman, London, 509 pp.
4. Soni, J. P., Garde, R. J., and Ranga Raju, K. G. (1980). "Aggradation in streams due to overloading." *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 106, No. HY1, pp. 117-132.
5. Struiksmas, N., Olsen, K. W., Flokstra, C., and De Vriend, H. J. (1985). "Bed deformation in curved alluvial channels". *Journal of Hydraulic Research*, 23(1), pp.57-79
6. Suttmuller, A. M. and Glerum, H. L. (1980). "Description and evaluation of measurements carried out in a bend flume with sand bed." *Rep. No. 14710101*, Delft Univ. of Technology, Dept. of Civil Engineering, Delft, The Netherlands (in Dutch).