

곡선좌표계에서의 2차원 흐름의 수치해석

Numerical Analysis of Two-dimensional Flow in Curvilinear Coordinate System

김형준* · 조용식** · 김수진***
Kim, Hyung-Jun·Cho, Yong-Sik·Kim, Sujin

요 지

본 연구는 곡선좌표계에서 유한차분기법(finite difference method)을 이용하여 2차원 흐름이 모의가능한 수치모형을 개발하는 것이다. 기존의 연구는 대부분 직교좌표계(cartesian coordinate system)에서의 격자망을 대상으로 개발되고 적용되었기 때문에 불규칙한 흐름의 경계 및 형상을 올바르게 표현하기 어려웠다. 유한요소법이나 유한체적법같은 수치모의기법들이 개발되어 비구조격자체계를 구성하고 자연현상에 가까운 경계 표현할 수 있도록 개발되었다. 하지만 위의 기법들은 질량과 운동량과 같은 물리량을 보존하기 위해서 매우 조밀한 격자체계를 가져야만 한다. 이에 본 연구에서는 기존의 문제점들을 해결하기 위하여 곡선좌표계(curvilinear coordinate system)를 이용하여 지배방정식을 표현하고 2차원 흐름을 모의할 수 있는 모형을 구축한다. 수치모형은 leap-frog기법과 1차 정확도의 풍상차분기법(upwind scheme)을 사용하여 구성하였다.

본 연구에서 개발된 모형을 사각수조 및 만곡수로흐름에 적용하여 모의결과를 해석해 및 실험관측값과 비교하였다. 이로부터 본 수치모형이 해석해 및 실험치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

핵심용어: 곡선좌표계, 2차원 천수방정식, leap-frog기법, 풍상차분기법

1. 서론

수치모형을 개발하기 위하여 계산영역의 경계를 적절히 처리하는 것은 매우 중요하다. 특히, 하천의 흐름을 모의하기 위한 수치모형은 하천의 사행과 하폭의 변화, 교량 및 수제와 같은 수공구조물 등에 의한 매우 복잡한 계산영역을 다룰 수 있어야 한다. 일반적으로 적용되는 직교좌표계의 2차원 지배방정식을 균일한 유한차분격자에 적용하여 수치모형을 구성하면, 곡선으로 구성된 계산경계를 적절히 표현할 수 없다. 곡선을 표현하기 위하여 물리적인 가정을 통하여 계산격자를 구성하는 것이 일반적이지만, 계단형으로 구성된 경계에 의해 수치모형의 정확성은 현저히 감소한다. 또한, 하천의 흐름을 적절히 표현하기 위하여 하폭방향과 흐름방향의 유속 및 유량을 정확히 알 수 없는 단점이 있다.

유한차분법의 단점을 보완하고 하천의 흐름을 정확히 모의하기 위하여, 유한요소법, 유한체적법과 같은 불균일 삼각망을 이용한 수치기법이 활발히 연구되고 있다. 그러나, 불균일 삼각망을 이용한 수치기법은 삼각망의 구성에 따른 모형의 정확성이 영향을 받으며, 격자생성 과정이 매우 복잡하다. 이에 본 연구에서는 직교좌표계의 지배방정식을 곡선좌표계의 지배방정식으로 변환하고 유한차분기법을 이용하여 수치모형을 새롭게 구성하였다.

*정회원·한양대학교 토목공학과 대학원 박사수료·E-mail : john0705@ihanyang.ac.kr
**정회원·한양대학교 토목공학과 부교수·E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr
***정회원·한양대학교 토목공학과 대학원 석사과정·E-mail : greensjk@ihanyang.ac.kr

2. 지배방정식과 수치모형

일반적으로 자유수면을 갖는 하천의 흐름을 모의하는 수치모형은 2차원 Saint Venant방정식을 지배방정식으로 사용한다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial y} = gh(S_{oy} - S_{fy}) \quad (3)$$

식 (1)~(3)에서 h 는 수심, P 와 Q 는 x -축 및 y -축 방향의 흐름체적률로서, 수심과 유속의 곱으로 표현된다. S_o 와 S_f 는 하상경사와 바닥 마찰에 의한 에너지경사를 나타내며, 특히 에너지 경사는 Manning공식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. 식 (4)의 n 은 Manning의 조도계수이다.

$$S_{fx} = \frac{n^2}{h^{4/3}} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad S_{fy} = \frac{n^2}{h^{4/3}} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4)$$

복잡한 곡선형의 계산영역을 고려하기 위하여 지배방정식을 연쇄법칙을 이용하여 곡선좌표계로 변환한다. 곡선좌표계(ξ, η)는 수평방향성분 $\xi = \xi(x, y)$ 와 $\eta = \eta(x, y)$ 로 구성된다. 식(5)의 관계를 이용하여 직교좌표계의 물리량을 곡선좌표계로 변환하여 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (5)$$

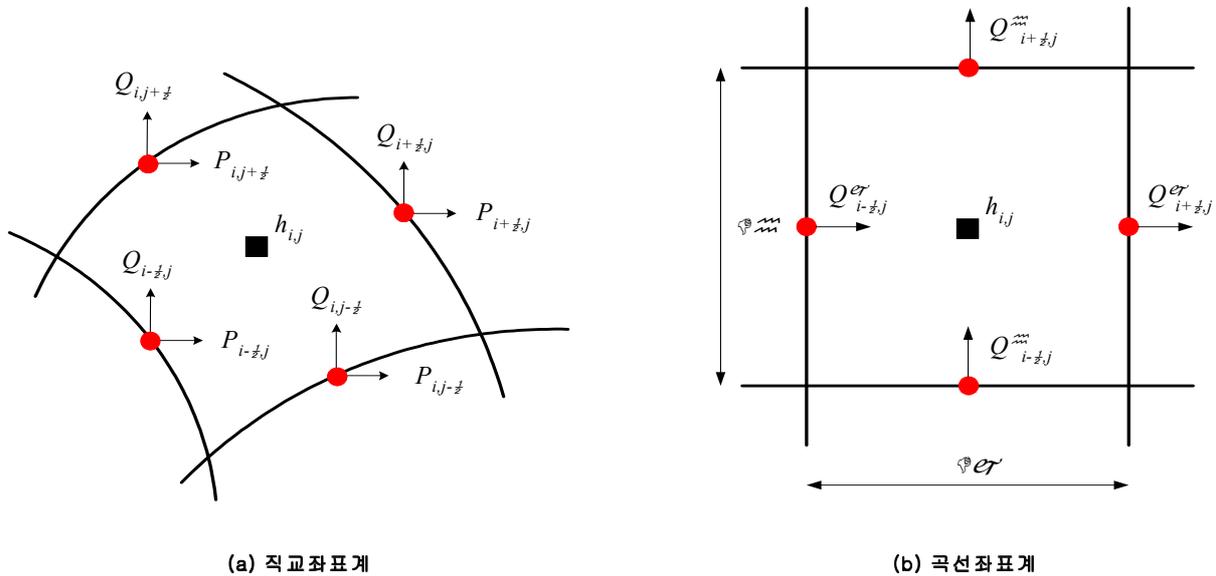


그림 1. 좌표변환 및 엇갈림격자체계

Viviani(1974)와 Vinokur(1974)의 연구결과에 의하면, 복잡한 영역에 흐르는 유체의 흐름을 모의하기 위하여 지배방정식을 직교좌표계에서 곡선좌표계로 변환할 경우, 곡선좌표계의 전개에 앞서 각 항을 Jacobian J

로 나누어 주고 다시 합성하여야 물리량을 적절히 보존할 수 있는 것으로 나타났다. 식(1)의 연속방정식은 식(5)의 관계를 적용하여 쉽게 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) = 0 \quad (6)$$

식 (6)에서 Q^ξ 는 수평방향인 ξ -축 방향의 체적흐름율이며, Q^η 는 연직방향인 η -축 방향의 체적흐름율을 나타낸다. 직교좌표계의 체적흐름률인 P 및 Q 와의 관계는 식(7)과 같다.

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\zeta & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^\xi \\ Q^\eta \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(5)와 식(7)에서 나타난 바와 같이 직교좌표계와 일반좌표계의 물리량을 간단한 식으로 정리 할 수 있다. 곡선좌표계의 운동량방정식을 유도하기 위하여 식(5)와 식(7)의 관계를 이용하여 x -축 및 y -축 방향의 운동량방정식을 ξ -축 및 η -축 방향의 운동량방정식으로 변환하면 식 (8)~(9)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(Q^\xi)^2}{Jh} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{Q^\xi Q^\eta}{Jh} \right) + gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\ = \frac{PQ^\xi}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{PQ^\eta}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{QQ^\xi}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \right) + \frac{QQ^\eta}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\xi_y}{J} \right) + gh(S_o^\xi - S_f^\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q^\xi Q^\eta}{Jh} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{(Q^\eta)^2}{Jh} \right) + gh \left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\ = \frac{PQ^\xi}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_x}{J} \right) + \frac{PQ^\eta}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \right) + \frac{QQ^\xi}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\eta_y}{J} \right) + \frac{QQ^\eta}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_y}{J} \right) + gh(S_o^\eta - S_f^\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

식(6)의 연속방정식과 식(8)과 식(9)의 운동량방정식을 이용하여 곡선좌표계의 흐름을 모의할 수 있는 수치모형을 구성한다. 2차원 Saint Venant 방정식을 해석하기 위하여 양해법의 일종인 leap-frog기법을 이용하였으며, 운동량방정식에 포함된 비선형항의 정확도를 향상시키기 위하여 1차 정확도의 풍상차분기법(1st-order upwind scheme)을 함께 사용하였다. 경계조건의 설정 및 계산상의 편의를 위하여 변수 h , Q^ξ , Q^η 의 계산점을 겹치지 않도록 배치한 엇갈림격자를 사용하였다. Leap-frog기법을 이용한 연속방정식의 차분식은 식(10) 같으며, 운동량방정식의 이송항의 비선형적 특성을 고려하기 위하여 식 (12)와 같이 1차 정확도의 풍상차분기법을 적용하였다.

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{h}{J} \right)_{i,j}^{n+1/2} - \left(\frac{h}{J} \right)_{i,j}^{n-1/2} \right] + \frac{1}{\Delta \xi} \left[\left(\frac{Q^\xi}{J} \right)_{i+1/2,j}^n - \left(\frac{Q^\xi}{J} \right)_{i-1/2,j}^n \right] + \frac{1}{\Delta \eta} \left[\left(\frac{Q^\eta}{J} \right)_{i,j+1/2}^n - \left(\frac{Q^\eta}{J} \right)_{i,j-1/2}^n \right] = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u\phi}{J} \right) &= \frac{1}{\Delta \xi} \left[\left(\frac{u\phi}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{u\phi}{J} \right)_{i-1,j} \right] & \text{if } u \geq 0 \\ &= \frac{1}{\Delta \xi} \left[\left(\frac{u\phi}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{u\phi}{J} \right)_{i+1,j} \right] & \text{if } u < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

3. 수치모형의 적용

본 연구에서 개발한 모형을 검증하기 위하여 해석해가 존재하는 정사각형 수조내의 유체의 진동을 모의하고 그 결과를 비교하였다. Lynch와 Gray(1978)는 유체의 점성 및 비선형항과 마찰을 무시한 경우에 대하여 정사각형 수조내의 자유진동에 대한 해석해를 제시하였다. 바닥이 평평하고 한번의 길이가 L 인 수조에 정지상태의 수심이 d 이고 파고가 ζ_0 , 주기 $T = \sqrt{2}L/\sqrt{gd}$ 인 경우 수조내의 지점 (x, y) 에서 유체의 거동에 대한 수면변화 및 x -축 및 y -축 방향의 유속에 대한 해를 식(12) ~ (14)와 같이 제시하였다.

$$\eta(t) = -\frac{\zeta_0}{2} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} + d \quad (12)$$

$$u(t) = -\frac{\zeta_0 g T}{4L} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (13)$$

$$v(t) = -\frac{\zeta_0 g T}{4L} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (14)$$

본 수치모의에서 적용한 사각형수조는 한번의 길이가 $100m$ 이고 정지상태의 수심이 $2.0m$, 파고가 $0.5m$ 인 경우에 대하여 모의하였으며, $(x, y) = (22.5m, 22.5m)$ 지점에서 4주기동안 모의한 결과를 해석해와 비교하였다. 본 연구에서 개발한 수치모형이 자유수면의 변화를 매우 정확히 모의하였으며, x -축 및 y -축 방향의 유속도 비교적 정확히 모의하고 있음을 알 수 있다.

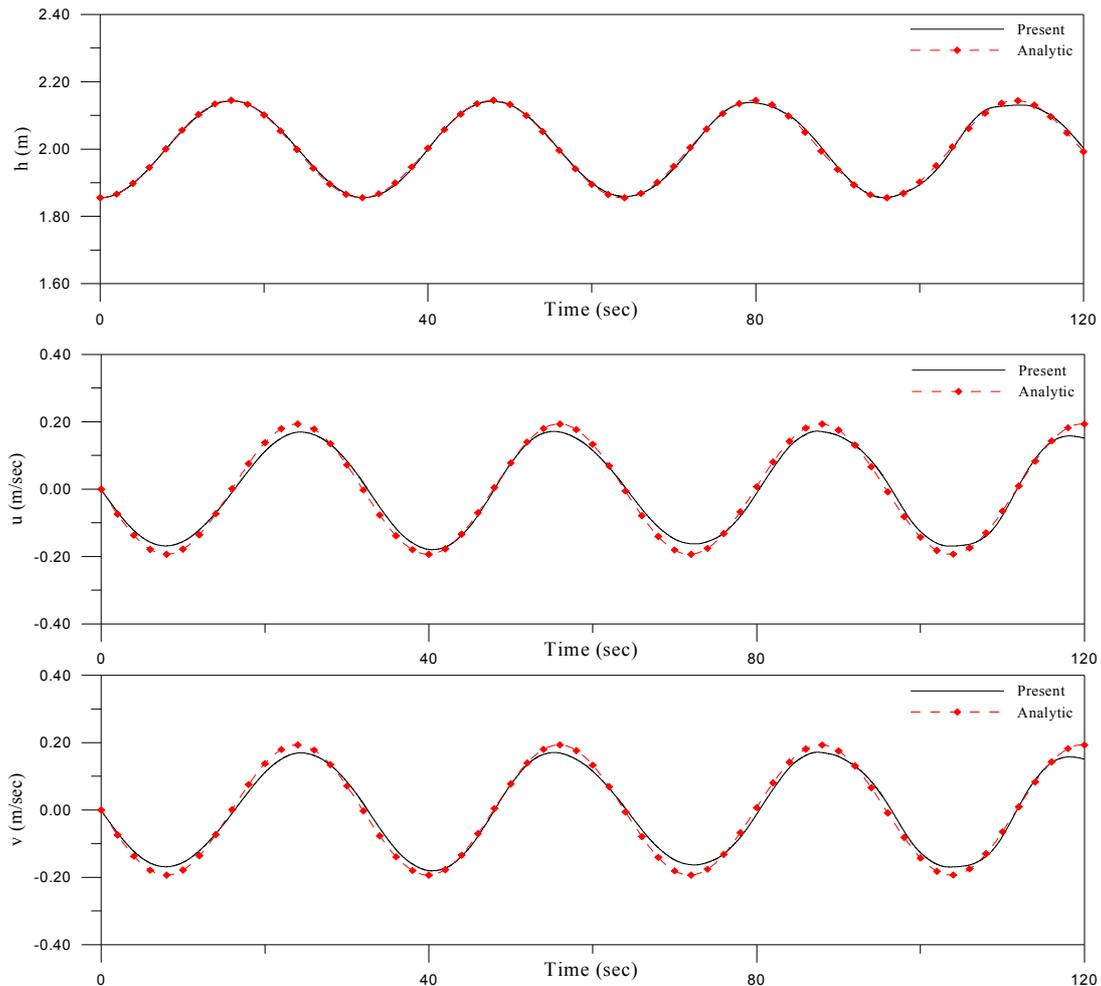


그림 2. 사각수조내의 자유진동 모의결과

다음으로 만곡수로의 흐름에 대하여 수치모의를 실시하고, Chow(1957)에 수록되어 있는 Shurky(1950)의 180° 만곡수로 흐름의 실험자료와 결과를 비교하였다. Shurky의 수리모형실험에 사용된 수로는 폭이 0.3m, 길이가 3.5m 정도인 철재수로로서, 만곡부의 내부 곡률반경이 0.15m이다. 수조의 실험에 적용된 상류경계조건은 수심이 0.3m, 유속이 0.623m/sec이며, 하류경계조건은 수심은 0.28m이다. Shurky가 수로의 하상경사에 대한 명확한 값을 제시하지 않았으므로 Kim 등(2003)의 모의에 사용한 $S_o = 7.0 \times 10^{-3}$ 을 적용하였으며 Manning 조도계수 n 은 Chow(1957)의 추천값 0.010을 적용하였다. 본 연구에서 개발한 수치모형의 결과와 수리실험의 결과를 비교하여 그림 3에 나타내었다. 전반적으로 만곡부의 흐름을 적절히 모의하고 있음을 알 수 있다.

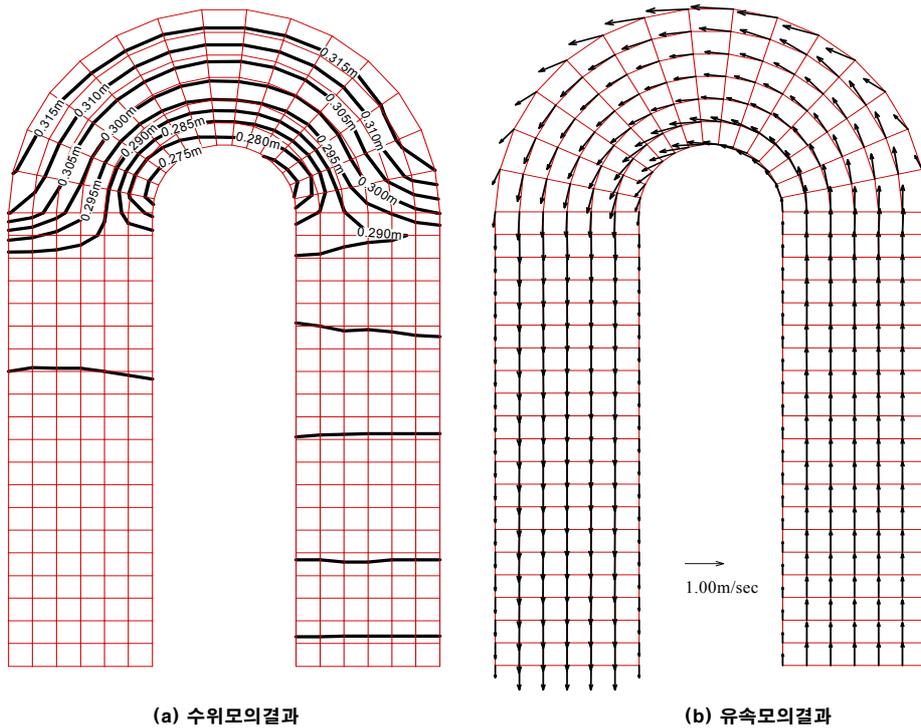


그림 3. 180° 만곡수로에서의 흐름 모의결과

4. 결론

본 연구에서는 직교좌표계의 지배방정식의 단점을 보완하기 위하여 곡선좌표계의 지배방정식을 유도하고 유한차분기법을 이용하여 수치모형을 개발하였다. 우선 자연하천의 복잡한 지형에 의한 흐름을 모의하기 위하여 Jacobian J 와 연쇄법칙을 이용하여 직교좌표계의 방정식을 곡선좌표계의 지배방정식으로 변환하였다. 연속방정식과 운동량방정식에 포함된 선형항은 간단한 형태의 2차정확도 기법인 leap-frog기법을 이용하였으며, 운동량방정식에 포함된 비선형항은 1차정확도의 풍상차분기법을 이용하여 차분화하였다.

본 연구에서 개발한 수치모형을 검증하기 위하여 우선 해석해가 존재하는 사각형수로 내의 유체의 진동을 모의하였다. 다음으로 곡선좌표계의 방정식이 하천이 만곡하는 부분의 흐름을 정확히 모의하는지 판단하기 위하여 Shurky(1950)의 실험결과와 수치모의의 결과를 비교하였다. 모의결과 본 연구에서 개발한 수치모형이 만곡부의 흐름을 적절히 모의할 수 있음을 알 수 있다.

감사의 글

본 연구는 해양수산부(KSGP)로부터 지원을 받았기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

1. Chow, V.T. (1959). **Open-channel hydraulics**, McGrawhill.
2. Kim, C.W., Yoon, T.H., Cho, Y.-S and Kim, S.T. (2003). A two-dimensional conservative finite difference model in nonorthogonal coordinate system. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 41, No. 4, pp. 395-403.
3. Shurky (1950). A Flow around bends in an open flume, *Transactions ASCE*, Vol. 115, pp. 713-727.
4. Vinokur, M. (1974) Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems, *J. Comput. Phys.*, Vol. 14, pp. 105-125.
5. Viviand, H. (1974). Conservation form of gas dynamics equations, *Rech. Aerosp.*, No. 1974-1, pp. 65-68.