2차원 수리해석을 위한 범용 Mesh Generation의 개발(II)

Development of Mesh Generator for 2D Hydraulic Analysis(II)

김유진*, 장형상, 김홍식***, 서일원****

Eugene Kim, Hyung Sang Jang, Hong Sik Kim, Il Won Seo

요 지

하천의 2차원 흐름, 유사이동 그리고, 오염 확산의 정도를 알아보기 위해 유한 요소법을 이용한 해석 방법이 널리 사용되고 있다. 유한 요소법을 이용할 때 유한 요소망 생성이 필수적이며, 해석 결과에 크게 영향을 주는 변수로 작용하게 된다. 본 연구에서는 복잡한 경계를 가진 하천의 유한 요소망 생성을 위해 대표적인 비구조적 요소망 생성 기법인 Delaunay 삼각화 기법과 흐름의 특성을 잘 나타낼 수 있도록 Transfinite 보간법을 이용한 구조적 요소망 생성 기법을 구현하였다. 그리고, 본 연구에 의해 생성된 유한 요소망의 형질 평가를 통해서 해석 결과에 대한 신뢰성을 높였으며, 요소망 생성 GUI 프로그램을 통하여 요소망에 대한 1차식의 요소와 2차식의 요소간의 변환, 되돌리기, 다시 실행 등의 기능을 지원하여 사용의 편리성을 추가하였다.

핵심용어 : 유한요소, Mesh, FEM, 수치해석, Delaunay

1. 서 론

하천의 2차원 흐름 해석, 유사이동 해석, 오염 확산 해석을 위한 유체의 수치해석법은 다양한 방법이 존재하지만 보통 사용되는 방법들은 유한요소법, 유한차분법, 유한차분법의 변형인 유한체적법, 경계적분법등이 있다. 유체에 대한 수치해석 기법으로 전통적으로 가장 많이 사용되고 있는 방법은 유한차분법으로 정렬된 요소망을 이용하여 흐름을 지배하는 Navier-Stokes 방정식을 푼다. 그러나 유한차분법은 구조적 요소망(structured mesh)을 구성하여야 한다는 전제조건으로 인하여 복잡한 형상의 하천의 경우 요소망 구성에 많은 시간을 소모하게 된다. 이에 비하여 유한요소법은 복잡한 형상을 표현하기가 상대적으로 간단하여 다양한 하천의 해석에 쉽게 이용할 수 있으며, 비구조적 요소망(unstructured mesh)을 이용하여 적응적 요소망을 생성할 수 있다.

본 연구에서는 하천의 2차원 흐름, 유사이동 그리고, 오염 확산의 유한요소해석을 위한 요소망 생성 시 복잡한 하천의 경우 많이 사용되는 대표적인 비구조적 요소망 생성 기법인 Delaunay 삼각화 기법과 흐름의 특성을 잘 나타낼 수 있도록 Transfinite 보간법을 이용한 구조적 요소망 생성 기법을 구현하였다. 구성된 삼각형 요소망에 대한 형질의 평가는 삼각형 요소의 외접원의 반지름과 내접원의 반지름의 비로 평가를 수행하였다. 그리고 요소망 생성 GUI 프로그램을 통하여 요소망에 대한 1차식의 요소와 2차식의 요소간의 변환, 그리고 되돌리기, 다시 실행 등의 기능을 지

* 정회원・(주)웹솔루스 시스템사업부 과장・E-mail : icepc@websolus.co.kr
** 정회원・(주)웹솔루스 시스템사업부 대리・E-mail : hsjang@websolus.co.kr
*** 정회원・(주)웹솔루스 이사 공학박사・E-mail : hotae@websolus.co.kr
**** 정회원・서울대학교 지구환경시스템공학부 교수・E-mail : seoilwon@snu.ac.kr

원하여 사용의 편리성을 추가하였다.

2. 비구조적 자동 삼각 요소망 생성(Unstructured automatic triangular mesh)

본 연구에서 개발된 자동 삼각 요소망 생성 알고리즘의 모두 5 단계로 구성되며, 각 알고리즘의 구현 방법에 대해 설명하도록 한다.

2. 1. 해석 영역 생성(Analysis Domain Construction)

그림 1. 에서와 같이 해석하고자 하는 영역의 경계는 방향성을 가지게 된다. 본 연구에서는 외부 경계 모서리 절점은 반시계 방향으로 구성되며, 내부 경계 절점은 시계 방향으로 구성하였다. 그림 2. 에서는 외부 경계 절점은 1→2→3→4→5→6 의 순서대로 저장되며, 내부 경계 절점은 1'→2'→3'→4'→5'→6' 의 순서대로 저장된다. 이러한 방향성을 가진 경계는 내부와 외부의 판별을 용이하게 한다.

2. 2. 절점 생성(Boundary & Inside Node Generation)

외부 및 내부 경계의 절점은 각 경계 선분 마다 식 (1) 에 의한 방법으로 그림 2. 과 같이 절점을 생성하게 된다.

$$d' = \frac{l}{INT(\frac{l}{d})} \qquad (1)$$

(d' : 분할할 크기, l : 경계 선분의 길이, d : 입력 받은 요소의 크기, $INT()$: 정수화 함수)

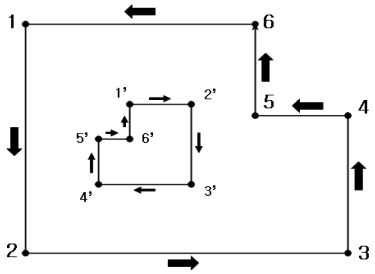


그림 1. 해석 영역 생성그림

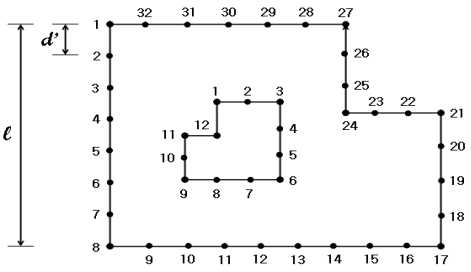


그림 2. 외부 및 내부 경계 절점 생성

내부의 절점은 Regular Grid Method를 사용하여 생성한다. 그림 3. 와 같이 해석 영역을 모두 포함하는 가상의 격자를 구성하고 그 격자의 교차점을 절점으로 취한다. 여기서, 경계 외부에 생성된 절점은 삭제되며, 또한 경계와 너무 가까운 절점(경계와의 수직 거리가 0.3d보다 작은 절점)도 삭제된다.

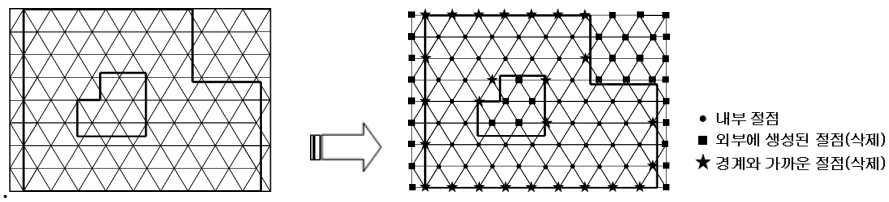


그림 3. 내부 절점 생성 (Boundary Node Generation)

2. 3. 삼각화(Incremental Delaunay Triangulation)

2. 1. 과 2. 2. 에서 생성된 절점들을 Delaunay Triangulation 방법을 사용하여 삼각 요소화 한다. 그림 4. 와 같이 Delaunay Triangulation 은 세 점을 가진 한 삼각형의 외접원 안에 다른 절점이 없다면 이 삼각형은 삼각 요소화 할 수 있다는 정리이다.

본 연구에서 적용된 Delaunay Triangulation 은 Bowyer-Watson이 제시한 수정된 Delaunay 알고리즘으로 절점들을 x 또는 y 좌표로 정렬하여 적용하였을 때 O(N^1.5)의 복잡도를 가진다. 그림 5. 과 같이 Bowyer-Watson's algorithm 은 본래 생성된 삼각 요소망에 절점을 추가하였을 때 추가된 절점 주위의 삼각 요소망을 효율적으로 재 생성하는 방법이지마, 초기에 모든 절점을 포함하는 Super-Triangle 을 이용하여 가상으로 절점이 추가되어지는 것처럼 하여 삼각 요소망을 생성한 후에 Super-Triangle과 외부 삼각형 요소를 삭제하는 방법으로 삼각 요소망을 구현한다.

(a) ΔABC ∉ Delaunay Triangulation Set (b) ∀Δ ∉ Delaunay Triangulation set

그림 4. Delaunay Triangulation

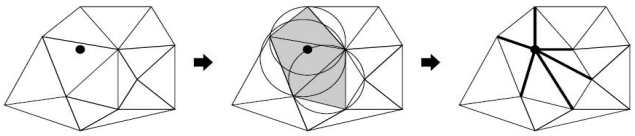


그림 5. Bowyer-Watson's Algorithm

2. 4. 경계 회복(Boundary Recovery)

그림 6.에서 볼 수 있듯이 삼각화를 수행하게 되면 해석 영역 경계 외부에도 삼각 요소들이 생성된다. 이러한 해석 영역 외부의 삼각 요소들은 삭제되어지며, 그림 8. 와 같이 해석 영역의 경계를 가로 지르는 삼각 요소들은 Edge Swap 의 방법으로 경계를 유지하도록 한다.

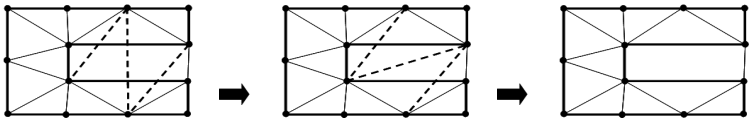


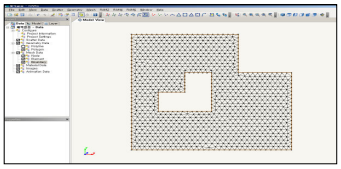
그림 6. Boundary Recovery

2. 5. 유연화(Smoothing)

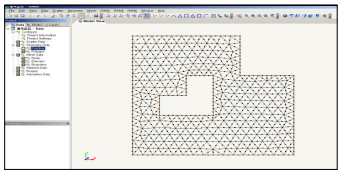
유연화(Smoothing) 방법으로는 Laplacian method, Angle-based method, Optimization-based method 등 많은 방법들이 있다. 본 연구에서는 가장 널리 사용되며, 빠르고 효율적인 Laplacian smoothing 방법(식 (2))을 적용하여 삼각 요소망을 유연화 하였다.

2. 6. 예 제

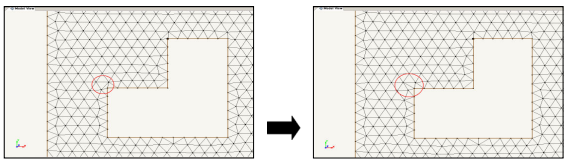
지금까지 살펴본 알고리즘을 통해서 아래 그림 7. 과 같은 예제를 얻을 수 있었다. 또한 1차식의 요소와 2차식의 요소간의 변환, 그리고 되돌리기, 다시 실행, 요소 삭제, 요소 swap 과 같은 기능 지원하여 사용자의 편리성을 추가하였다.



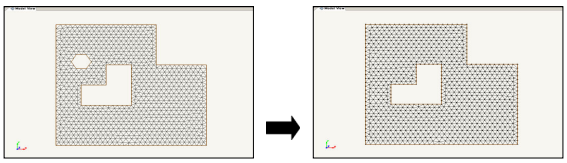
(a) Triangular Mesh



(b) Converting linear mesh into quadratic mesh



(c) Element swap



(d) Element deletion and Undo

그림 7. Examples

3. 구조적 요소망 생성(Structured mesh)

본 연구에서는 구조적 요소망을 생성하기 위해 그림 8. 과 같이 해석 영역(x,y)을 사각형으로 분할한 후 매개변수(u,v) 영역으로 사상한 후 마주보는 경계에 같은 개수의 절점을 생성하여 정형화된 사각 요소망을 생성하였다. 그리고 이를 다시 해석 영역으로 역사상하여 전체 영역에 요소망을 구성하였다.

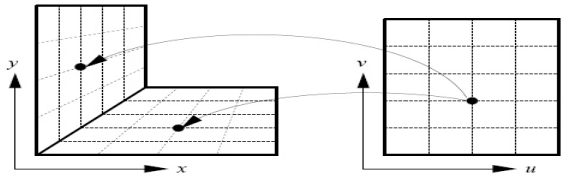


그림 8. Structured mesh

4. 삼각형 요소의 평가

유한 요소의 해석에 있어서 삼각 요소의 형상이 정삼각형에 가까울수록 해의 오차가 적어지게 된다. 본 연구에서 생성된 요소의 형상이 정삼각형에 어느 정도 가까운지 알아보기 위해 식 (2) 의 방법으로 요소 평가를 수행하였다. q의 값이 1에 가까울수록 정삼각형에 가까운 형상이며, 일반적으로 q의 값이 0.5 보다는 커야 좋은 형상의 요소라고 할 수 있다.

$$q = 2\frac{r_{in}}{r_{out}} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} \quad (2)$$

(r_{in} : 내접원의 반지름, r_{out} : 외접원의 반지름, a, b, c : 삼각형 각 변의 길이)

5. 결 론

그림 9. 와 그림 10. 에서는 상용 해석 프로그램인 SMS 8.0 과 본 연구에 의해 개발되어진 프로그램과의 삼각 요소망을 비교, 검토 하였다. 그림 9.에서 볼 수 있듯이 SMS 8.0 에서는 2413개의 삼각 요소를 생성하였고, 몇 개의 요소를 제외하고는 전반적으로 아주 좋은 형질의 요소들을 생성하였다. 또한 그림 10. 과 같이 본 연구 방법에 의해 생성된 요소망에서는 3529개의 삼각 요소가 생성되었으며, 전반적으로 0.5 이상의 형질을 나타내어 비교적 좋은 형질의 요소망을 생성하였다.

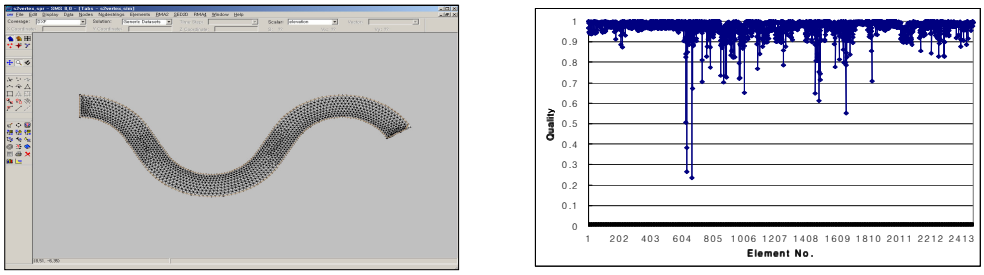


그림 9. SMS Mesh quality

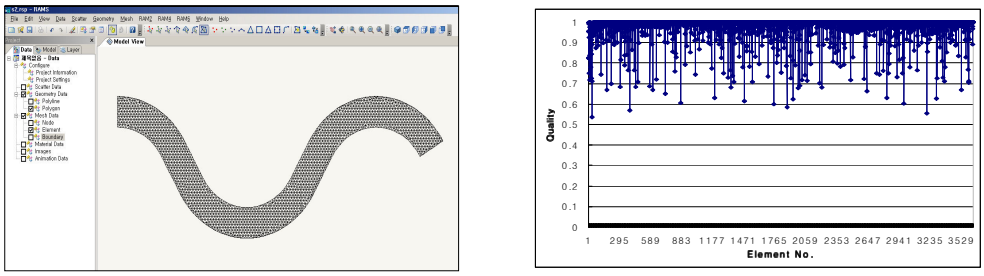


그림 10. RAMS Mesh quality

감 사 의 글

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발사업단의 연구비지원 (과제번호 : 2-3-2)에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. EMRL (2003). Surface-water modeling system : Tutorials Version 8.1. Brigham Young University.
3. Thompson, J.F., Warsi, Z.U.Z., Mastin, C.W. (1985). Numerical grid generation, Foundation.and applications, Elsevier Science Publishing Co.
4. Lo, S.H. (1985). "A New Mesh Generation Scheme For Arbitrary Planar Domains", International Journal For Numerical Methods in Engineering, John Wiley, Num 21, pp.1403-1426