

Shell요소의 Normal Rotation

The Shell Elements with vertex Degree of Freedoms

조 순 보*

Cho, Soon Bo

ABSTRACT

This paper describes the formulation of rectangular flat shell element that is modeled with the six degree of freedoms including a rotational degree of freedom. The rectangular finite element matrix with a rotational degree of freedom is developed using a beam stiffness matrix and compared with other methods. The outputs of the quantity of vertical deflection of cantilever beam show us the improving evidence of the Frame-Shell finite element matrix in a calculation of vertical deflections of cantilever beam.

Keywords : rotation degree of freedom, vertex degree of freedom

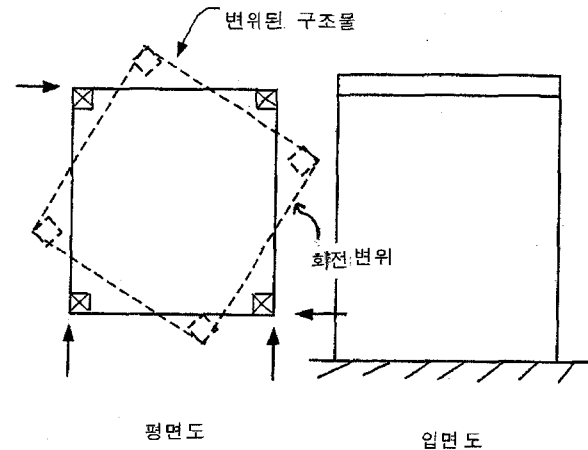
1. 서 론

지난 연구에도 불구하고 판 요소의 유한요소법해석에서 각 절점의 6개 자유도중 면내회전자유도(Normal Rotational degree of freedoms)의 강성도계수 값을 구하는 일반식구성에 큰 성과를 보지 못하고 있다.¹⁾ <그림 1>의 슬래브와 기둥으로 구성된 구조가 평면 및 입면의 비정형으로 비틀림 회전을 받는 경우 선형요소인 기둥은 비틀림 변형을 할 수 있으나 슬래브의 판 요소는 면내 회전 자유도(Normal Rotational Degree of Freedoms)의 강성도가 계산되지 않아 부재력 해석의 정도(精度)에 영향을 미친다. 전단벽 구조물이 강축방향으로 바람이나 지진하중의 횡력을 부담할 때도 부재력의 계산은 정도(精度)비율이 떨어진다. 판 요소에 기둥, 보등의 선형요소가 연결된 경우에 정확한 부재력산정을 위하여 판요소의 면내 회전 자유도는 필수적이다. 판 요소가 각을 이루어 만나는 절판구조(Folded plates)의 연결절점에서 각 유한요소의 면내 회전 자유도를 고려치 않는 경우 부재력 값의 정도(精度)는 떨어진다.

보요소의 유한요소강성도식에서 회전변위를 생략하는 경우와 회전변위를 포함하는 경우 Cantilever 보의 끝 지점에 단위하중이 작용할 때의 처짐 값을

구하여 비교해 본다.

보요소의 가정식으로 $w(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3$ 을 가정하고 (1)수직변위 및 회전변위를 고려하는 경우 (2)수직변위만 고려하고 회전변위를 고려치 않는 경우의 강성도식을 구성하면 아래의 식과 같다.



<그림 1> 슬래브와 기둥의 비틀림연결

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \theta_1 \\ \omega_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

* 정회원, 수원대학교 교수

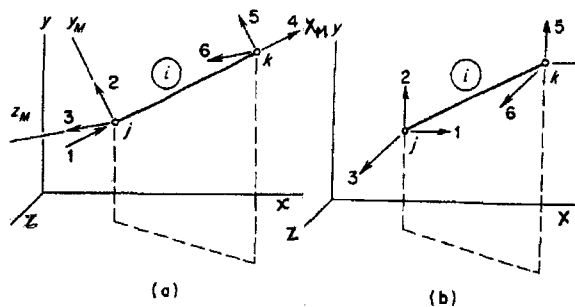
식(1)에 경계조건 $\omega_1 = \theta_1 = 0$ 을 대입하고 식(2)에 $\omega_1 = 0$ 을 대입하여 수직 처짐 량 ω_2 를 구하면 식(1)에서 $\omega_2 = \frac{L^3}{3EI}$ 식(2)에서 $\omega_2 = \frac{L^3}{12EI}$ 를 구하여 유한 요소 강성도식에서 회전변위부가 여부에 따라 처짐 값에 오차가 발생함을 알 수 있다.

Allman²⁾, Sabir³⁾, O.C.Zienkiewicz⁴⁾ 등의 연구가 유력하나 아직 일반적인 실용식의 구성에는 실패하였고 유한 요소 해석 Software인 Sap2000, Ansys 등에서는 부재좌표계에서 전체좌표계로 이행될 때 강성도행렬식의 Singularity를 피하기 위하여 면내 회전 자유도의 가정 값을 부재력이 안전값으로 산정되도록 가정하여 사용하고 있다⁵⁾. 본 연구에서는 Allman, Sabir, O.C.Zienkiewicz 등에 의한 강성도식의 구성 과정을 제시하고 보요소의 강성도 값을 이용하여 면내 회전자유도가 포함된 사각형 쉘 요소 식인 *Frame-Shell* 강성도식을 구성하여 면내 회전 자유도가 포함된 사각형 쉘 요소의 강성도식을 제안하고 캔티레바보의 처짐량에서 정도(精度)비를 비교하여 제안식의 정확도를 연구한다.

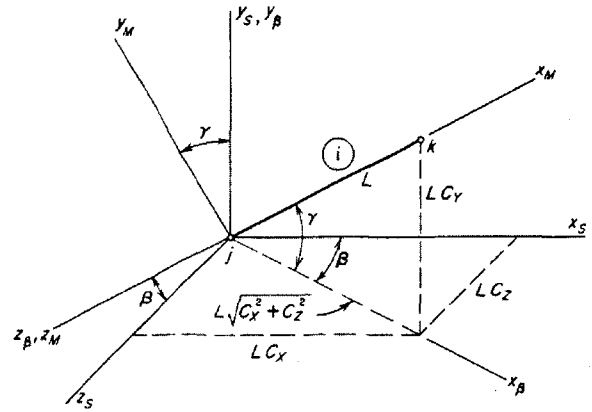
2. 판요소의 강성도식의 구성

2.1 *Frame-Shell* 강성도식

i 부재의 양 단부절점 *j, k*의 각 가능 변위를 6개라고 하고 <그림 2a, b>처럼 부재좌표계와 전체좌표계로 나타낸다. 일반적 건축구조물에서 각 부재단면의 부재좌표계 주축 방향은 y_M, z_M 방향이며 x_M 축은 재축 방향이 되어 좌표축의 회전에 의하여 전체좌표계로 변환이 가능하다. 곧 <그림 3>에서 부재좌표계 x_M 은



<그림 2a, b> 부재좌표계 와 전체 좌표계

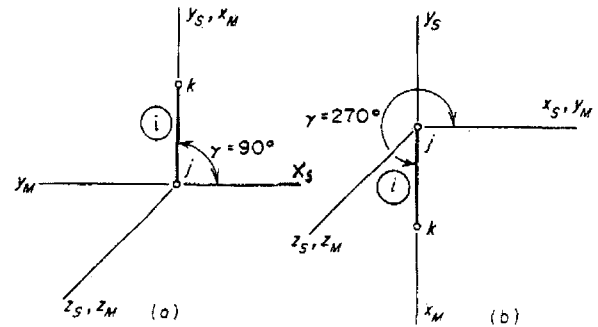


<그림 3> 3차원 부재의 좌표변환

전체 좌표계 y_S 축에 대하여 β , z_S 축에 대하여 γ 회전하여 좌표변환이 가능하다. <그림 4>처럼 부재좌표 축 x_M 에 대하여 α 회전할 때 부재축좌표계 (x_M, y_M, z_M) 의 방향여현(*The Direction Cosine*)은 식(3)과 같다.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

전체좌표계의 회전형렬 R 은 α 외에도 β, γ 회전해야 한다.



<그림 4> 수직부재의 좌표회전

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}} \quad \sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$$

$$C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X}{C_{XZ}} & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{pmatrix}$$

R_β 는 A 하중의 각 좌표축 Vector A_β 와 A_S 사이의 좌표 변환식이며 아래 식으로 나타낼 수 있다.

$$A_\beta = R_\beta A_S$$

z_M 축에 대한 각 γ 의 회전은 A_M 과 A_β 사이의 좌표 변환이며 회전행렬 R_γ 가 필요하고 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$A_M = R_\gamma A_\beta$$

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cos\gamma = C_{XZ} \quad \sin\gamma = C_Y$$

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_M = R_\alpha R_\beta R_\gamma A_S \quad (4)$$

$$R = R_\alpha R_\beta R_\gamma$$

$$R = \begin{pmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ -C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha & C_{XZ} \cos\alpha & -C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha \\ C_{XZ} & C_{XZ} & C_{XZ} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_X} & -C_{XZ} \sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{pmatrix}$$

3차원 입체구조체의 회전변환행렬식 R_T 는 아래의 식(5)과 같다.

$$R_T = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix} \quad (5)$$

전체좌표계의 강성도행렬식 S_{MS} 는 아래의 식(6)에서 구할 수 있다.

$$S_{MS} = R_T^T S_M R_T \quad (6)$$

식(6)에 조건식 $\alpha = 0$, $C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} = C_X$ 를 대입하고 Matlab을 이용하여 전체좌표계 강성도식 $S_{MS} < \text{표 1}>$ 을 구할 수 있다.

$$p_1 = \frac{EA_X}{L} \quad p_2 = \frac{12EI_Z}{L^3} \quad p_3 = \frac{6EI_Z}{L^2} \quad p_4 = \frac{4EI_Z}{L} \quad p_5 = \frac{2EI_Z}{L}$$

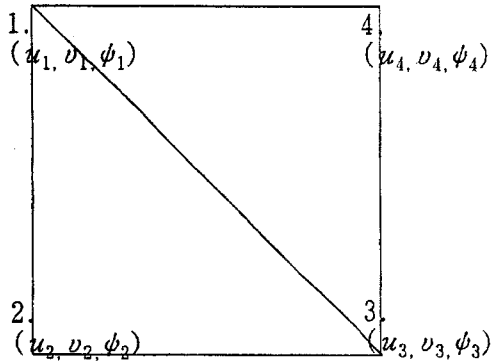
$$g_1 = \frac{GI_X}{L} \quad g_2 = \frac{4EI_Y}{L} \quad g_3 = \frac{6EI_Y}{L^2} \quad g_4 = \frac{12EI_Y}{L^3} \quad g_5 = \frac{2EI_Y}{L}$$

$$C_1 = \cos\alpha \quad C_2 = \cos\alpha^2 \quad S_1 = \sin\alpha \quad S_2 = \sin\alpha^2$$

<표 1> 전체좌표계 강성도 행렬식

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$p_1 C_2 + p_2 S_2$	$(p_1 - p_2) C_1 S_1$	0	0	0	$-p_3 S_1$	$-(p_1 C_2 + p_2 S_2)$	$-(p_1 - p_2) C_1 S_1$	0	0	0	$-p_3 S_1$
2	$(p_1 - p_2) \times C_1 S_1$	$p_1 S_2 + p_2 C_2$	0	0	0	$p_3 C_1$	$-(p_1 - p_2) C_1 S_1$	$-(p_1 S_2 + p_2 C_2)$	0	0	0	$-p_3 C_1$
3	0	0	g_4	$g_3 S_1$	$-g_3 C_1$	0	0	0	$-g_4$	$g_3 S_1$	$-g_3 C_1$	0
4	0	0	$g_3 S_1$	$g_1 C_2 + g_2 S_2$	$(g_1 - g_2) C_1 S_1$	0	0	0	$-g_3 S_1$	$-g_1 C_2 + g_5 S_2$	$-(g_1 + g_5) C_1 S_1$	0
5	0	0	$-g_3 C_1$	$(g_1 - g_2) C_1 S_1$	$g_1 S_2 + g_2 C_2$	0	0	0	$g_3 C_1$	$-(g_1 + g_5) C_1 S_1$	$-g_1 S_2 + g_5 C_2$	0
6	$-p_3 S_1$	$p_3 C_1$	0	0	0	p_4	$p_3 S_1$	$-p_3 C_1$	0	0	0	p_5
7	$-(p_1 C_2 + p_2 S_2)$	$-(p_1 - p_2) C_1 S_1$	0	0	0	$p_3 S_1$	$p_1 C_2 + p_2 S_2$	$(p_1 - p_2) C_1 S_1$	0	0	0	$p_3 S_1$
8	$-(p_1 - p_2) C_1 S_1$	$-(p_1 S_2 + p_2 C_2)$	0	0	0	$-p_3 C_1$	$(p_1 - p_2) C_1 S_1$	$p_1 S_2 + p_2 C_2$	0	0	0	$-p_3 C_1$
9	0	0	$-g_4$	$-g_3 S_1$	$g_3 C_1$	0	0	0	g_4	$-g_3 S_1$	$g_3 C_1$	0
10	0	0	$g_3 S_1$	$-g_1 C_2 + g_5 S_2$	$-(g_1 + g_5) C_1 S_1$	0	0	0	$-g_3 S_1$	$g_1 C_2 + g_5 S_2$	$(g_1 - g_5) C_1 S_1$	0
11	0	0	$-g_3 C_1$	$-(g_1 + g_5) C_1 S_1$	$-g_1 S_2 + g_5 C_2$	0	0	0	$g_3 C_1$	$(g_1 - g_5) C_1 S_1$	$g_1 S_2 + g_5 C_2$	0
12	$-p_3 S_1$	$-p_3 C_1$	0	0	0	p_5	$p_3 S_1$	$-p_3 C_1$	0	0	0	p_4

사각형유한요소가 <그림 5>처럼 보로 연결되었다고 가정하고 강성도 행렬식을 구성하여 사각형요소의 z축회전 변위를 포함하는 Frame-Shell 강성도행렬식을 구성한다.



<그림 5> 보로 구성된 4각형 판요소

<수치예제 1> 사각형판요소의 각 절점이 $b \times d \times L = 1 \times 1 \times 2$ 의 보로 연결되었다고 가정하고 <표1>의 강성도계수를 이용하여 각 절점당 $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ 의 6개의 자유도를 가지는 강성도행렬식을 구성하고 1절점의 강성도계수를 구하면 아래의 <표2>와 같다. ($E = 219,780 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.5$)

<표 2> 사각형판요소의 보강성도 이용한 Frame-Shell 강성도의 1절점(6자유도) 강성도계수

	1(u)	2(v)	3(w)	4(θ_x)	5(θ_y)	6(θ_z)
1	1.3736	0	0	0	0	0.2747
2	0	1.3736	0	0	0	0.2747
3	0	0	0.5494	-0.2747	-0.2747	0
4	0	0	-0.2747	0.4283	0	0
5	0	0	-0.2747	0	0.4283	0
6	0.2747	0.2747	0	0	0	0.7326

2.2 Sabir 강성도계수

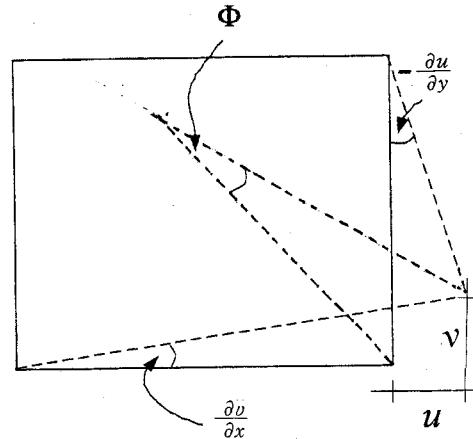
Sabir는 4각형 판요소의 각 절점 당 3개의 변위 u, v, θ_z 를 가정하여 아래의 변형을 식(6)을 가정하였다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} xy \\ \epsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y \\ \epsilon_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_5 x + \alpha_7 y \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)을 적분하여 사각형판요소의 각 절점의 수

평, 수직변위식을 구할 수 있다.

<그림 6> vertex 변위각 ϕ 에서 절점의 z축 회전변위에 의하여 ②절점이 ②'위치로 이동하였을 때 발생하는 변위각 ϕ 은 아래의 식(7a, b)과 같다.



<그림 6> Drilling Degree of Freedom의 변위각 ϕ

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_3 - \alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} xy \\ &\quad - 3\alpha_{12} x^2 y^2 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\{u\} = [X] \{a\} \quad (8a)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{Bmatrix} = [X_i] \{a\} \quad (8b)$$

$[X_i] =$

1	0	$-y_i$	x_i	$x_i y_i$	0	0	$\frac{y_i}{2}$	0	$\frac{y_i^2}{2}$	$x_i y_i^2$	$x_i^2 \times y_i^3$
0	1	x_i	0	0	y_i	$x_i y_i$	$\frac{x_i}{2}$	$\frac{x_i^2}{2}$	0	$-x_i^2 y_i$	$-x_i^3 \times y_i^2$
0	0	1	0	$-\frac{x_i}{2}$	0	$\frac{y_i}{2}$	0	$\frac{x_i}{2}$	$-\frac{y_i}{2}$	$-2x_i y_i$	$-3x_i^2 \times y_i^2$

식(8)에 사각형판요소의 절점좌표를 대입하여

$$\{q\} = [X_i] \{a\} \quad (9a)$$

$$\{a\} = [X_i]^{-1} \{q\} \quad (9b)$$

식(9a)의 가정변위식에서 변형을 행렬식을 구하

여 보면

$$\{\epsilon\} = [B]\{\alpha\} \quad (10a)$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{X_i\}^{-1}\{q\} \quad (10b)$$

[B] 행렬식은

$\frac{\partial u}{\partial x} =$	0	0	0	α_4	$\alpha_5 y$	0	0	0	0	0	$\alpha_{11} y^2$	$2\alpha_{12} x y^3$
$\frac{\partial v}{\partial y} =$	0	0	0	0	0	α_6	$\alpha_7 x$	0	0	0	$-\alpha_{11} x^2$	$-2\alpha_{12} x^3 y$
$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} =$	0	0	0	0	$\alpha_5 x$	0	$\alpha_7 y$	α_8	$\alpha_9 x$	$\alpha_{10} y$	0	0

Sabir의 Vertex강성도 계수가 포함된 4각형 판요소의 강성도행렬식은 아래의 식(11)에서 구할 수 있다.

$$\bar{K} = t \iint [B]^T D [B] dx dy \quad (11)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

<수치예제 2> 사각형판요소의 크기가 2×2일때 각 절점당 u, v, θ_z의 3개의 자유도를 가지는 강성도행렬식을 구성하고 1절점의 강성도계수를 구하면 아래의 <표3>와 같다.(E = 219,780, ν = 0.5)

사각형요소의 각 절점좌표를 대입하여 [X]행렬식을 구하면

<표 2> [X]행렬식

1.0	0	1.0	-1.0	1.0	0	0	-0.5	0	0.5	-1.0	-1.0
0	1.0	-1.0	0	0	-1.0	1.0	-0.5	0.5	0	1.0	1.0
0	0	1.0	0	0.5	0	-0.5	0	-0.5	0.5	-2.0	-3.0
1.0	0	1.0	1.0	-1.0	0	0	-0.5	0	0.5	1.0	-1.0
0	1.0	1.0	0	0	-1.0	-1.0	0.5	0.5	0	1.0	-1.0
0	0	1.0	0	-0.5	0	-0.5	0	0.5	0.5	2.0	-3.0
1.0	0	-1.0	1.0	1.0	0	0	0.5	0	0.5	1.0	1.0
0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	0.5	0.5	0	-1.0	-1.0
0	0	1.0	0	-0.5	0	0.5	0	0.5	-0.5	-2.0	-3.0
1.0	0	-1.0	-1.0	-1.0	0	0	0.5	0	0.5	-1.0	1.0
0	1.0	-1.0	0	0	1.0	-1.0	-0.5	0.5	0	-1.0	1.0
0	0	1.0	0	0.5	0	0.5	0	-0.5	-0.5	2.0	-3.0

$$\{\epsilon\} = [B]\{q\}$$

$$[B] = [H][A]^{-1}$$

[H]행렬식은

0	0	0	α_4	$\alpha_5 y$	0	0	0	0	0	$\alpha_{11} y^2$	$2\alpha_{12} x y^3$
0	0	0	0	0	α_6	$\alpha_7 x$	0	0	0	$-\alpha_{11} x^2$	$-2\alpha_{12} x^3 y$
0	0	0	0	$\alpha_5 x$	0	$\alpha_7 y$	α_8	$\alpha_9 x$	$\alpha_{10} y$	0	0

[A]⁻¹행렬식은

0.250	-0.125	-0.250	0.250	0.125	-0.250	0.250	-0.125	0.250	0.250	0.125	0.250
-0.125	0.250	0.250	0.125	0.250	-0.250	-0.125	0.250	-0.250	0.125	0.250	0.250
0.1875	-0.1875	-0.125	0.1875	0.1875	-0.125	-0.1875	0.1875	-0.125	-0.1875	-0.1875	-0.125
-0.250	0	0.125	0.250	0	-0.125	0.250	0	0.125	-0.250	0	-0.125
0.250	0	0	-0.250	0	0	0.250	0	0	-0.250	0	0
0	-0.250	-0.125	0	-0.250	0.125	0	0.250	-0.125	0	0.250	0.125
0	0.250	0	0	-0.250	0	0	0.250	0	0	-0.250	0
-0.250	-0.250	0	-0.250	0.250	0	0.250	0.250	0	0.250	-0.250	0
0.250	0	-0.500	-0.250	0	0.500	0.250	0	0.500	-0.250	0	-0.500
0	0.250	0.500	0	-0.250	0.500	0	0.250	-0.500	0	-0.250	-0.500
0	0	-0.125	0	0	0.125	0	0	-0.125	0	0	0.125
0.0625	-0.0625	-0.125	0.0625	0.0625	-0.125	-0.0625	0.0625	-0.125	-0.0625	-0.0625	-0.125

식(11)을 이용하여 Sabir의 z축 회전변위를 포함하는 강성도행렬식을 구성하면 아래의 <표3>의 (값) × 10⁵과 같다.

<표 3> Sabir의 Vertex사각형판요소 강성도 행렬식

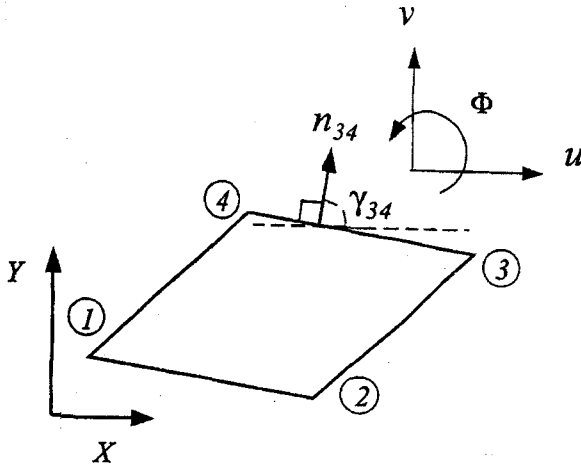
1.1911	-0.3474	0.4042	-0.0922	-0.0177	0.1478	-0.3120	0.3474	-0.1086	-0.7869	0.0177	-0.3650
-0.3474	1.1911	0.4042	0.0177	-0.7869	-0.3650	0.3474	-0.3120	-0.1086	-0.0177	-0.0922	0.1478
0.4042	0.4042	0.6619	-0.1478	-0.3650	-0.0707	0.1086	0.1086	-0.3638	-0.3650	-0.1478	-0.0707
-0.0922	0.0177	-0.1478	1.1911	0.3474	-0.4042	-0.7869	-0.0177	0.3650	-0.3120	-0.3474	0.1086
-0.0177	-0.7869	-0.3650	0.3474	1.1911	0.4042	0.0177	-0.0922	0.1478	-0.3474	-0.3120	-0.1086
0.1478	-0.3650	-0.0707	-0.4042	0.4042	0.6619	0.3650	-0.1478	-0.0707	-0.1086	0.1086	-0.3638
-0.3120	0.3474	0.1086	-0.7869	0.0177	0.3650	1.1911	-0.3474	-0.4042	-0.0922	-0.0177	-0.1478
0.3474	-0.3120	0.1086	-0.0177	-0.0922	-0.1478	-0.3474	1.1911	-0.4042	0.0177	-0.7869	0.3650
-0.1086	-0.1086	-0.3638	0.3650	0.1478	-0.0707	-0.4042	-0.4042	0.6619	0.1478	0.3650	-0.0707
-0.7869	-0.0177	-0.3650	-0.3120	-0.3474	-0.1086	-0.0922	0.0177	0.1478	1.1911	0.3474	0.4042
0.0177	-0.0922	-0.1478	-0.3474	-0.3120	0.1086	-0.0177	-0.7869	0.3650	0.3474	1.1911	-0.4042
-0.3650	0.1478	-0.0707	0.1086	-0.1086	-0.3638	-0.1478	0.3650	-0.0707	0.4042	-0.4042	0.6619

<표 4> Sabir의 Vertex사각형판요소 1절점(6자유도) 강성도계수 크기

	1	2	3	4	5	6
1	1.1911	-0.3474				-0.3650
2	-0.3474	1.1911				0.1478
3						
4						
5	-0.3650	0.1478				0.6619
6	-0.3650	0.1478				0.6619

2.3 Allman의 형상함수

<그림 7>에서 n₃₄는 사각형요소3-4의 3축방향 수직선이고 Allman은 각 절점의 면내회전변위(Normal Rotational Degree of Freedoms)Φ 및 in-plane 변위 u, v를 아래의 식(12)으로 가정하였다.



〈그림 7〉 면내회전자유도를 가진 사각형요소

$$\Phi = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \Phi_i$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta); i = 1, 2, 3, 4$$

$$[u] = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \frac{l_{ij}}{8} (\Phi_j - \Phi_i) \begin{pmatrix} C_{ij} \\ S_{ij} \end{pmatrix} \quad (12)$$

l_{ij} 는 절점 i 와 j 사이의 변의 크기이고 N_{ij} 와 s_{ij} 는 변 ij 의 수직인 방향여현 n_{ij} 의 성분이다.

$$n_{ij} = \begin{pmatrix} c_{ij} \\ s_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} = \frac{y_{ij}}{l_{ij}} \\ \sin \alpha_{ij} = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}} \end{pmatrix}, l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$k = 5, 6, 7, 8 \quad i, j = 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 1$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_k \eta) \quad k = 5, 7$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi_k \xi)(1 - \eta^2) \quad k = 6, 8$$

$$symm(\nabla u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \\ & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 ([B_i][u_i] + [G_i]\Phi_i)$$

$$[B_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$[G_i] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial x} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ (l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial y} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y}) + (l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial x} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x}) \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad m = 5, 6, 7, 8 \quad l = 8, 5, 6, 7 \quad k = 2, 3, 4, 1$$

$$j = 4, 1, 2, 3$$

$$skew(\nabla u) - \Phi = \sum_{i=1}^4 ([b_i][u_i] + g_i \Phi_i)$$

$$\text{여기서 } [b_i] = \begin{pmatrix} -\frac{\partial N_i}{2\partial y} & \frac{\partial N_i}{2\partial x} \end{pmatrix}$$

$$g_i = -\frac{1}{16} (l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x})$$

$$+ \frac{1}{16} (l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial x} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x}) - N_i$$

l_{ij} 는 절점 i 와 j 사이의 변의 크기이고 N_{ij} 와 s_{ij} 는 변 ij 의 수직인 방향여현 n_{ij} 의 성분이다.

$$n_{ij} = \begin{pmatrix} c_{ij} \\ s_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} \end{pmatrix}, l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

위의 각 절점의 변위 가정식을 이용하여 면내회전자유도를 포함하는 요소의 강성도식을 구성한다.

절점 가정변위는 아래의 식(13)으로 나타낸다.

$$[q] = \{[q_1], [q_2], [q_3], [q_4]\}^T \quad (13)$$

$$[q_i] = \{u_i, v_i, \Phi_i\}^T$$

요소의 강성도 행렬식을 식(14)에서 구할 수 있다.

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \quad (14)$$

여기서

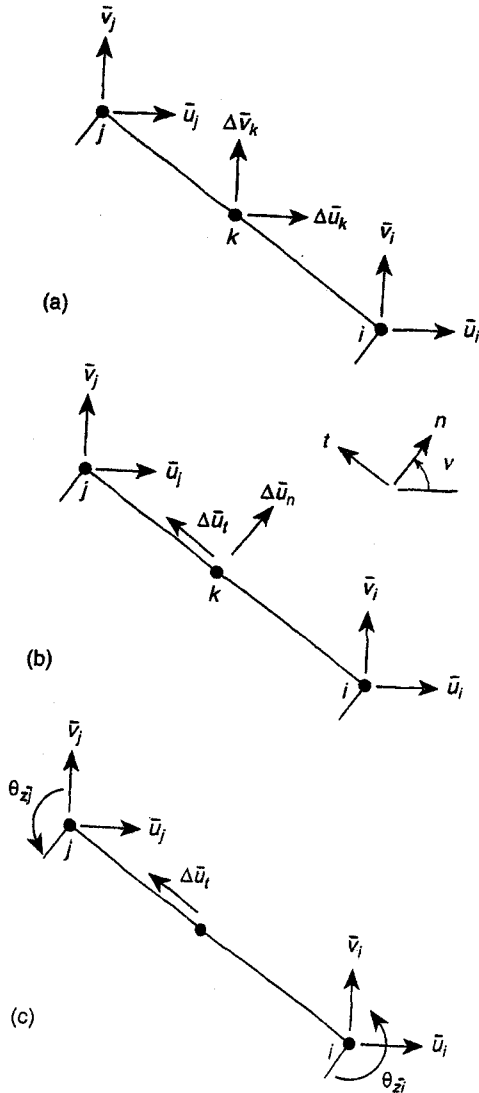
$$[B] = \{[B_1], [B_2], [B_3], [B_4]\}, [B_i] = \{[B_i], [G_i]\}$$

강성도 식은 $[K^m][q] = [f]$ 이 되고 $[f]$ 행렬식은 외력+고정단하중식이다.

$$[K^m] = [K] + [P] \quad [P] = \rho \int_{\Omega} [b]^T [b] d\Omega$$

$$[b] = \{[b_1], [b_2], [b_3], [b_4]\}, [b_i] = \{[b_i], g_i\}$$

2.4 O.C.Zienkiewicz강성도



〈그림 8〉 요소의 절점변위

〈그림 8〉의 유한요소를 구성하는 변상의 절점변위를 아래의 식(15)으로 나타낸다.

$$u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j + N_k(\xi)\Delta u_k \quad (15)$$

변의 중앙점의 변위를 수직선(Δu_n), 접선(Δu_t) 방향으로 분해하여 아래의 식(16)으로 나타낸다.

$$\Delta u_k = \Delta u_n n + \Delta u_t t \quad (16)$$

$$n = \begin{pmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} -\sin \nu \\ \cos \nu \end{pmatrix} \quad \nu \text{는 } x \text{ 축과 수직선이}$$

이루는 각이다.

수직변위 Δu_n 는 각 단부 절점의 면내회전변위와 다음식(17)의 관계를 이룬다.

$$\Delta u_n = \frac{1}{8} l_{ij} (\theta_{zj} - \theta_{zi}) \quad (17)$$

식(17)을 식(15)에 대입하여 식(18)을 구할 수 있다.

$$u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j + N_k(\xi) \left[\frac{1}{8} l_{ij} (\theta_{zj} - \theta_{zi}) + \Delta u_t \right] \quad (18)$$

최소위치에너지를 이용하여 강성도 방정식을 유도할 수 있다.

$$\Pi^* = \Pi + \int_{\Omega} \alpha_n E t^n (\theta_z - \theta_z) d\Omega \quad (19)$$

α_n 은 가상탄성계수이고 t^n 은 조절계수, θ_z 는 각 요소절점의 평균면내 회전크기이다.

θ_z 에 대한 최소위치에너지를 원리적용에 의하여 아래의 강성도 식을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zn} \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \alpha_n E t^n \Delta \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

2.5 Shell + Membrane 강성도식

<수치예제 2>의 4각형요소를 Sap2000에 대입하여 아래 <표 5>의 강성도 계수를 구할 수 있다.

〈표 5〉 사각형판요소의 Shell + Membrane 1절점(6자유도) 강성계수

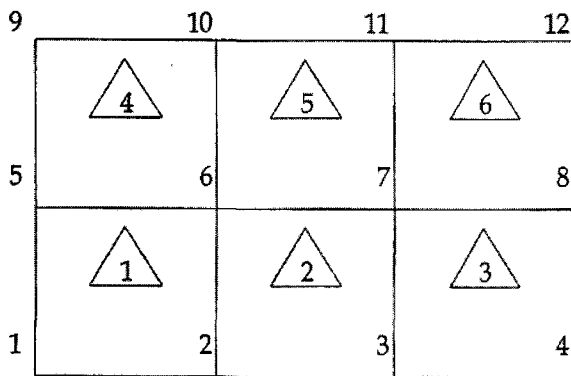
	1(u)	2(v)	3(w)	4(θ_x)	5(θ_y)	6(θ_z)
1	1.0868	0.3925				
2	0.3925	1.0868				
3			0.53134	0.2455	-0.2455	
4			0.2455	0.3059	-0.0604	
5			-0.2455	-0.0604	0.3059	
6						

〈표 6〉 강성도 계수의 비교

	1(u)	2(v)	3(w)	4(θ_x)	5(θ_y)	6(θ_z)
Sabir 식	1.1911	1.1911				0.6619
Frame - Shell 식	1.3736	1.3736	0.5494	0.4283	0.4283	0.7326
Shell - Membrane 식	1.0868	1.0868	0.53134	0.3059	0.3059	

<표 7> Cantilever보의 처짐 비교

변위 방향	요소수	단위 하중법	Sabir 강성도식			Frame - Shell 강성도식			Sap2000 Plane 요소식		
			11	23	35	11	23	35	8	16	24
수직변위	3×2	0.0614	0.0845	0.0805	0.0845	0.0861	0.0854	0.0861	0.0707	0.0693	0.0707
수평변위	3×2		0.0341	0	0.0341	0.0193	0	0.0193	0.0272	0	0.0272
회전변위	3×2		0.0214	0.0154	0.0214	0.0141	0.0138	0.0141			
수직변위	6×4								0.0754	0.0774	0.0948
수평변위	6×4								0.0285	0	0.0378
회전변위	6×4								0.0143	0.0144	0.0343



<그림 9> Cantilever보의 처짐

3. 수치예제

<그림 9>의 Cantilever보의 처짐의 정도(精度)비를 구하기 위하여 Sabir강성도행렬식, Frame - Shell 강성도행렬식, Sap2000의 Shell + Plane요소를 이용한 강성도식을 이용하여 처짐을 구하고 단위 하중법에 의한 처짐값과 비교하면 아래의 <표 7>와 같다.

4. 결 론

판요소의 면내회전강성도크기를 구하기 위하여 보의 강성도를 이용한 Frame - Shell강성도 값을 구하고 그동안 연구된 Sabir강성도식과 비교한 결과 아래의 결론을 얻었다.

- ① <표 6>의 강성도 계수 비교에서 u, v 의 강성계수비는 $\frac{1.1911}{1.3736} = 0.8671$ 이고 θ_z 의 강성계수비는 $\frac{0.6619}{0.7326} = 0.9035$ 로서 거의 근접한다.
- ② Sabir의 사각형판요소 강성도 요소는 <표 6>에서 수직변위 강성도 요소의 크기가 $1 \times 10^5 \times 1.1911$

이고 회전변위의 크기는 $1 \times 10^5 \times 0.6619$ 이 되어 $\frac{1.1911}{0.6619} = 1.800$ 의 비를 얻었고 Frame - Shell의 Vertex강성도 행렬식은 수직 단위 변위 강성도크기가 $1 \times 10^5 \times 1.1768$ 이고 회전단위변위의 값이 $1 \times 10^5 \times 0.6445$ 이 되어 $\frac{1.1768}{0.6445} = 1.826$ 의 비를 이루어 두방법의 강성비(Stiffness Ratio)가 거의 같게 산정되어 부재력 해의 정도(精度)비가 우수하다.

- ③ <표 7>의 3. 수치예제의 Cantilever보의 처짐 비교에서 단위 하중법에 의한 처짐 크기 0.0614cm 이고 각 절점 당 u, v, θ_z 의 자유도를 고려한 Sabir 강성도 처짐(0.793cm) 및 Frame - Shell의 처짐값(0.0595cm)이 되고 각 절점 당 u, v 의 2개자유도만 고려한 Plane요소의 처짐값은 0.0794cm가 되어 단위하중법 처짐값에 수렴함을 알 수 있다.

참고문헌

1. Robert D. Cook, Finite Element Modelling for Stress Analysis, Johnwiley & Sons, Inc. p54, 1995
2. D.J Allman, A compatible triangular element including vertex rotations for plane
3. Lanheng Jin, Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom, Master degree thesis of Maryland University, pp1~60, 1994
4. O.C. Zienkiewicz, C.J. Parekh and I.P. King, Arch dams analysed by a linear finite element shell solution program. In Proc. Symp. on theory of arch dams, Southampton University, 1964, Pergamon Press, Oxford, 1965
5. Ansys Manual, Theory Reference, Chapter 14, Element

- Library, 14.143, Shell143-Plastic Shell
6. Stephen P. Timoshenko, Mechanics of Materials, 청문각
 7. William Weaver, Jr., Matrix Analysis of Framed Structures, CHPAMAN&HALL
 8. C.S. Desei, Elementary Finite Element Method, Prentice-Hall, INC, 1979
 9. Daryl Logan, "유한요소의 첫걸음", PWS Publishing Co. 1993, pp165~204
 10. Young W. Kwon, The Finite Element Method using matlab, CRC press
 11. Daryl L. Logan, Logan의 유한요소 첫걸음, 시그마 프레스, 1993
 12. Irving H. Shames Clive L. Dym, "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", McGRAW- HILL Co. 1985, 596~605.
 13. William Weaver, Jr, Finite elements for structural analysis, Prentice Hall, Inc., pp78~82, 1929
 14. Zienkiwicz and R.L. Taylor, The finite element, McGraw-Hill Book Company pp103~134, 1991-2000, pp311~361, 365~424
 15. Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and shell, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959, Chap. 4, pp44~55, Chap.12.
 16. Clough, R, and Felippa, C, "A Refined Quadrilateral Element for the Analysis of Plate Bending", Proceedings, 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFF이 TR-68-150, Oct. 1968, pp. 399~440.
 17. Chandrakant S. Desei, "Elementary Finite Element Method" Prentice-Hall, 1979, pp172~201
 18. T.Y. Yang, "Finite Element Structural Analysis", Prentice-Hall, 1986, pp399~480
 19. Edward L. Wilson, Three dimensional static and dynamic analysis of structures, computer and structures, Inc. pp9~10, 1995
 20. 권택진, "응용유한요소해석", 회성출판사, 1976
 21. 최창근, "유한요소법", 테크노프레스, pp384~387, 2002
 22. 김용수, "Matlab입문과 활용", 높이깊이, 2000