

# 다진동수를 고려한 평면구조물의 위상최적화

## Topology Optimization of Plane Structures with Multi-Frequency Cases

이 상 진\*  
Lee, Sang Jin

배 정 은\*\*  
Bae, Jung Eun

박 경 임\*\*\*  
Park, Gyeong Im

### 요 약

이 논문은 여러 개의 진동수를 동시에 고려할 수 있는 위상최적화기법을 제공하고 이를 평면구조물에 적용하여 최적위상을 도출하고 그 결과를 기술하였다. 본 연구에서는 모드변형에너지를 최소화하고자하는 목적함수로 가정하고 구조물의 초기 부피를 제약함수로 사용하였다. 물질내부에 존재하는 구멍의 크기를 조절하기 위하여 최적정기준법을 바탕으로 한 크기조절 알고리즘을 도입하였다. 수치해석결과로부터 제시된 위상최적화기법은 구조물의 기본고유진동수를 효과적으로 최대화하면서 동시에 고차의 진동수에 대한 영향도 최적위상에 고려할 수 있는 것으로 나타났다.

### ABSTRACT

This paper provides a new topology optimization technique which is intended to maximize the fundamental frequency with simultaneous consideration of other natural frequencies in the form of multi-frequency problems. The modal strain energy is considered as the objective function to be minimized and the initial volume of structures is used as the constraint function. The resizing algorithm based on the optimality criteria is adopted to update the hole size existing inside the material. From numerical tests, the proposed technique is found to be very effective to maximize the fundamental frequency of the structure and it can also successfully consider several higher mode effects into the optimum topology of structure through the introduction of weights.

키워드 : 평면구조물, 위상최적화, 다진동수경우, 여과절차, 크기조절 알고리즘

Keywords: Plane Structure, Topology Optimization, Multi-Frequency Case, Filtering Process, Resizing Algorithm

## 1. 서 론

구조설계최적화기법의 발달로 인해 구조설계과정에서 요구되던 과도한 시간적 손실이 줄었을 뿐만 아니라 기술자들의 축적된 경험을 컴퓨터 코드화하는 것이 가능하게 되어 실제 구조물의 설계가 용이하게 되었다. 그리고 구조물의 성능에 초점을 맞추던 설계최적화의 개념이 최근에는 미와 구조적인 안정성을 동시에 충족시키는 진보적인 시각에서 그들을 형성하고 있다. 이러한 설계최적화개념의 변화는 최적화에 이용되는 이론의 발달뿐만이 아니라 장기간 축적된 구조설계지식 그리고 눈부신 컴퓨터 산업의 발달에 기인한 것이라고 할 수 있겠다.

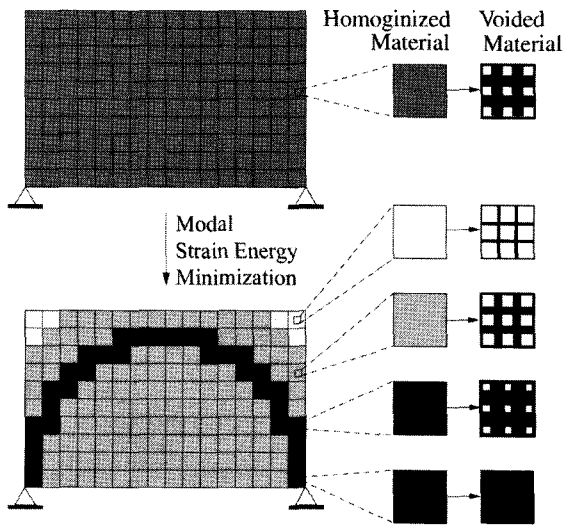
특히 최근에는 크기최적화와 형상최적화<sup>1),2)</sup>로 양분된 기존의 설계최적화의 틀에서 벗어나 설계최적화분야의 새로운 패러다임으로 자리 잡고 있는 위상최적화<sup>3),4)</sup>개념에 대한 연구가 활발하다. 위상최적화는 구조물을 이루고 있는 재료가 임의의 목적에 맞게 재배열 되게 함으로써 주어진 동일한 재료로 최선의 구조형태를 찾아내는 것이라고 할 수 있다. 위상최적화의 기본개념은 <그림 1>에 도시된 바와 같이 나타낼 수 있다. 이는 구조물을 이루고 있는 재료를 내부에 구멍을 가지는 물질로 가정하고 재료내부에 존재하는 구멍의 크기를 인위적으로 조절함으로써 주어진 목적에 적합한 재료의 분포를 찾아내는 것이라 할 수 있다.

본 연구에서는 다하중경우에 대한 위상최적화연구<sup>5)-7)</sup>에 뒤이어 제시된 기법중의 하나인 구조물의 기본고유진동수를 최대화하면서 다른 고차의 모드

\* 정회원, 경상대학교 공과대학 건축학부 조교수

\*\* 경상대학교 공학연구원 특별연구원

\*\*\* 경상대학교 건축학부 구조공학전공 대학원석사과정생



〈그림 1〉 위상최적화의 기본개념

형상에 의해서 유발되는 모드변형에너지를 함께 고려하는 위상최적화기법<sup>8),9)</sup>을 이용하여 평면구조물에 대한 최적위상을 도출하고 그 결과를 분석하고자 한다.

## 2. 재료모델

위상최적화는 물질이 차 있는 부분과 비어있는 부분으로 이루어진 비 등질의 단위 셀이 구조물에 반복적으로 분포되어 있다는 가정을 전제로 한다<sup>6)</sup>. 유한요소법을 도입하게 되면 설계영역이 이산화 되고 하나의 유한요소가 하나의 셀로 표현되는 것으로 가정할 수 있다. 따라서 구조물의 전체 설계영역  $\Omega$ 는 셀이 반복되어진 것으로 간주 할 수 있다.

서론에서 전술한 바와 같이 위상최적화는 임의의 설계영역  $\Omega$ 내에서 변화하는 탄성텐서  $E_{ijkl}$ 의 최적값을 찾아내는 문제로 정의되는데 이때  $E_{ijkl}$ 는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$E_{ijkl}^h = \chi(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (1)$$

여기서  $\bar{E}_{ijkl}(x)$ 는 물질을 구성하는 탄성계수이고,  $\chi(x)$ 는 설계영역  $\Omega$ 내에서 변화하는 물질의 존재유무를 나타내는 지시변수(indicator factor)로 각 요소에 대하여 다음과 같이 정의 된다.

$$\chi(x) = 1 : \text{물질유} \\ = 0 : \text{물질부} \quad (2)$$

그러나 물질의 존재유무를 식 (2)에서 정의한 바와 같이 영이나 일의 양극의 값으로 정의하면 최적값은 물질이 존재하거나 또는 존재하지 않는 부분이 불연속적으로 나타나게 된다. 따라서 설계영역 전체에 물질이 완만하게 분포되도록 하기 위해서 합성물질의 도입이 필요하게 된다. 즉 연속성을 가지는 밀도함수  $\xi(x)$ 를 도입하여 탄성텐서를 다음과 같이 수정해야 한다.

$$E_{ijkl}^h = \xi(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (3)$$

여기서  $0 \leq \xi(x) \leq 1$ 이고  $x \in \Omega$ 이다. 이때 물질의 부피는 다음과 같다.

$$V_s = \xi d\Omega \quad (4)$$

여기서  $V_s$ 는 구조물을 이루는 물질의 초기부피이며 최적화 전 과정을 통하여 일정한 값을 유지한다고 가정한다.

밀도함수  $\xi(x)$ 를 도입함으로써 최적값이 연속성을 가질 수 있게 되나 위상최적화의 결과는 뚜렷한 위상을 나타내지 못하게 된다. 따라서 밀도함수를 적절한 형태로 조정할 필요가 있다. 아래와 같이 밀도함수에 지수  $\gamma$ 를 도입하여 밀도함수를 수정하게 되면 위상최적화의 결과를 뚜렷하게 한다.

$$E_{ijkl}^h = \xi^\gamma(x) \bar{E}_{ijkl}(x) \quad (5)$$

여기서  $\gamma$ 는 일반적으로  $\gamma \geq 1$ 값으로 가정되며 주로 3에서 9사이의 값이 사용된다. 이때  $\gamma$ 의 값이 커질수록 최적화로부터 구해진 위상이 뚜렷하게 나타난다.

임의의 밀도함수  $\xi(x)$ 는 재료내부의 미소구조체를 형성하는 기하학적 형태와 관계가 있다. 그림 2에서와 같이 사각형 빈 공간을 포함하고 있는 단위 셀의 경우 밀도함수  $\xi(x)$ 는  $\xi(x) = 1 - a(x)b(x)$ 로 나타낼 수 있으며 빈공간의 크기는  $0 \leq a(x) \leq 1$ ,  $0 \leq b(x) \leq 1$ 의 범위를 가진다.

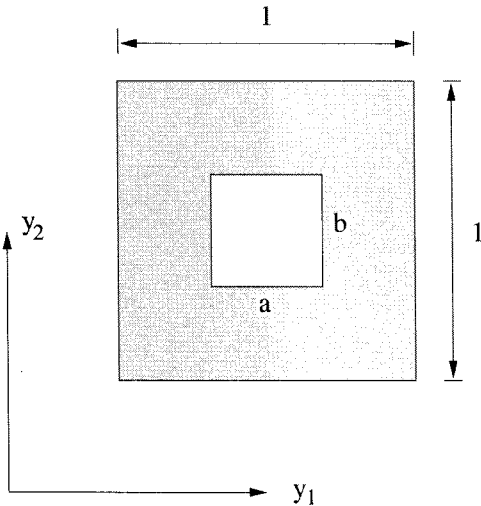
단위셀의 미소구조체를 채우고 있는 부분을 등방성 물질이라고 가정하면 구조물의 강성행렬  $D$ 는  $a$ 와  $b$ 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D := D^h(a, b) \tag{6}$$

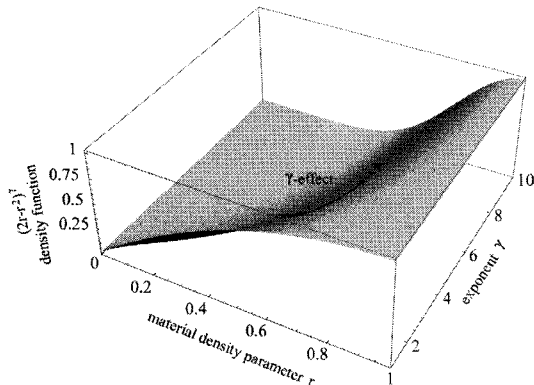
여기서  $a, b$ 는 요소 내에 존재하는 빈 공간의 크기를 결정하는 변수이며, 물성행렬  $D^h(a, b)$ 는 식 (5)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h(a, b) = (1 - ab)^\gamma D = \rho(a, b)^\gamma D \tag{7}$$

본 연구에서는 <그림 2>의 사각형 구조체의 모양을 정사각형으로 가정하고 재료밀도매개변수를  $r = 1 - a$ 로 정의 하면 평면응력상태에 있는 구조물의 물성행렬  $D^h$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.



<그림 2> 미소좌표계내의 사각형구멍을 가지는 단위셀



<그림 3> 지수  $\gamma$  에 대한 재료밀도함수

$$D^h = \frac{\rho(r)^\gamma E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 - \nu & 0 \\ \nu & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1 + \nu}{2} \tag{8}$$

여기서 밀도함수는  $\rho(r) = 2r - r^2$ 이며 지수  $\gamma$ 에 대한 재료밀도함수  $\rho(r)^\gamma$ 은 <그림 3>에 도시된 바와 같다.

### 3. 크기조절 알고리즘

설계영역  $\Omega$ 내에 존재하는 다공성물질을 재분배하기 위하여 물질의 초기부피를 일정하게 유지하면서 변형에너지를 최소화하는 최적정기준을 사용하였다. 각 단위요소의 재료밀도매개변수를 설계변수로 이용하였다. 유한요소법을 사용한 이산화된 영역에서는 구조물이 재료밀도매개변수  $r_e$ 를 가지는 요소  $e$ 의 조합으로 표현되며 설계변수의 수는 유한요소의 수와 동일하게 된다.

구조물설계에 고려할 진동모드를 전부  $n$ 개라고 가정하면 이들에 대한 구조물의 전체모드변형에너지는 다음과 같이 가중치를 도입하여 표현할 수 있다.

$$U = \sum_{i=1}^n w_i U^i \tag{9}$$

여기서  $U^i$ 는  $i$ 번째 자유진동모드에 의해 유발되는 모드변형에너지를 나타내며  $w_i$ 는 이에 상응하는 가중치를 나타낸다. 식 (9)에 정의된 모드변형에너지를 이용하면 다수의 진동모드를 고려하는 구조물의 위상최적화문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } U \\ &\text{subject to } V_s = \sum_{e=1}^{n \neq l} (2r_e - r_c^2) V_e \end{aligned} \tag{10}$$

설계영역이  $nel$  개의 유한요소로 이산화되면 설계변수 벡터는 다음과 같다.

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_e, \dots, r_{nel}]^T \tag{11}$$

식 (10)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를

이용하여 구속조건을 목적함수에 첨가함으로써 다음과 같이 라그랑지함수  $L$ 로 정의된다.

$$L(r_e) = U - \Lambda \left( \sum_{e=1}^{n_e} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) - \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_{r_e}^- r_e \quad (12)$$

여기서  $\Lambda, \lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{n_e}}^+], \lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{n_e}}^-]$ 는 라그랑지 승수이며  $r_e$ 는 설계변수를 나타낸다. 식(12)에서 라그랑지 승수  $\lambda_{r_e}^+, \lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 식(12)에 정의된 라그랑지 함수  $L$ 의 정상조건(stationary condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2\Lambda(1-r_e)} \frac{\partial}{\partial r_e} \left( \sum_{i=1}^n U_e^i \right) = 1 \text{ 또는 } B_{r_e} = 1 \quad (13)$$

식(13)은 재료밀도 매개변수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하면 식(14)와 같은 크기 조절 알고리즘이 제시된다.

$$r_e^{k+1} = \begin{cases} MAX & \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MAX \\ r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta & \text{if } MAX \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MIN \\ MIN & \text{if } MIN \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \end{cases} \quad (14)$$

여기서  $MAX = \max\{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고,  $MIN = \min\{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이고,  $\eta$ 는 조절변수(turning parameter)이고,  $\zeta$ 는 각 단계에서 설계변수  $r_e$ 를 제어하는 이동변수(move limit)이다. 그리고  $B_{r_e}^k$ 는  $k$ 번째 반복 계산에서  $B_{r_e}^k$  값을 나타낸다.

#### 4. 모드변형에너지

본 연구에서는 구조물의 자유진동모드를 이용하여 변형에너지분포를 계산하기 위하여 자유진동해석을 수행하였다. 자유진동을 경험하는 구조물은 유한요소정식화를 거쳐 아래와 같은 고유치문제를 도출하게 된다.

$$K\Phi = \Lambda M\Phi \quad (15)$$

여기서  $K$ 는 대칭을 이루는 정치의 전체강성행렬이고  $M$ 은 전체 질량행렬을 나타낸다.  $\Lambda$ 는 고유벡터  $\Phi$ 의 고유벡터 성분과 관련한 고유치를 포함한 직교행렬이다. 본 연구에서 식(15)의 해는 부분공간 반복법을 이용하여 구할 수 있는데 이 때  $n$ 개의 고유치가 오름차순으로 다음과 같이 구해진다.

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (16)$$

참고로 이때 전체강성행렬과 전체질량행렬은 고유벡터에 대해 다음과 같이 M-직교성과 K-직교성의 특성을 가진다.

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad i = j = 1, 2, \dots, n \quad (17a)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_j \delta_{ij} \quad i = j = 1, 2, \dots, n \quad (17b)$$

평면응력상태에 있는 구조물의  $i$ 번째 자유진동모드에 대한 변형에너지 분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U^i = \left[ \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2} \int \phi_e^T K_e \phi_e dV \right]^i \quad (18)$$

여기서  $\phi_e$ 는 요소  $e$ 와 관련한 자유진동모드벡터를 나타낸다.

#### 5. 최적화알고리즘

최적정기준을 이용하여 구조물의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다.

- ① 주어진 재료의 양을 이용하여 초기 설계변수 값을 계산한다. 설계변수값은 재료밀도벡터로 주어진다.
- ② 초기(또는 갱신된) 재료밀도벡터로 형성한 등질화된 물질을 사용하여 구조물의 변위값을 구한다.
- ③ 계산된 변위값을 사용하여 목적함수 값  $U_e$ 를 구하고 식(13)에서 필요한 설계변수에 대한 목적함수의 민감도  $\sum_{i=1}^n \partial U_e^i / \partial r_e$ 를 계산한다.
- ④ 식(13)을 이용하여 라그랑지승수  $\Lambda$ 를 구한다.

- ⑤ 설계변수값을 갱신한다.
- ⑥ 갱신된 설계변수값을 여과한다<sup>10)</sup>.
- ⑦ 갱신된 설계변수값이 주어진 정지조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②~⑥을 반복한다.

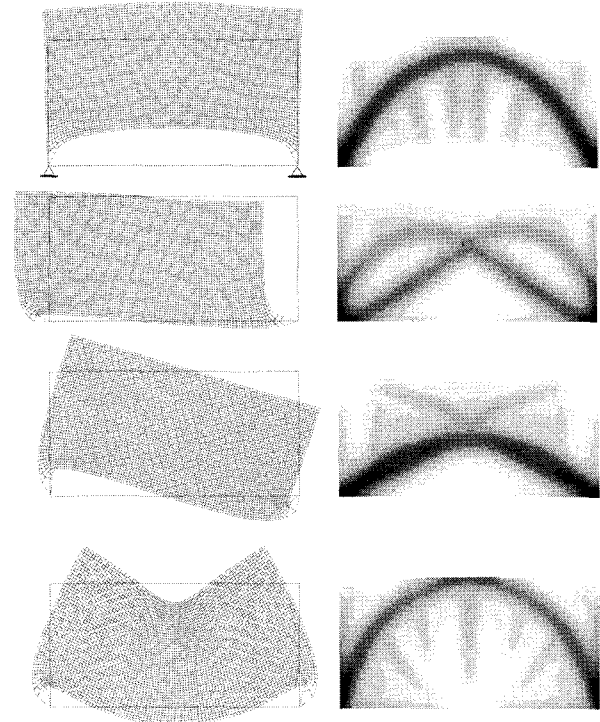
## 6. 수치예제

모드변형에너지를 고려한 평면구조물의 최적위상을 조사하기 위하여 크기가  $10m \times 5m$ 인 직사각형 영역의 보를 이용하였다. 보의 재료특성치는 탄성계수가  $E=10 \times 10^6 N/m^2$ 이고 프와송비가  $\nu=0.3$ 이다. 위상최적화에 필요한 모드변형에너지를 계산하기 위해 보를 5051개의 절점과 5000개의 4절점 유한요소로 이산화하였다. 이때 보의 재료는 가동질화된 물질로 표현하였고 지수값은  $\gamma=5$ 를 택하였다. 최적정기준을 바탕으로 유도한 크기조절 알고리즘의 조절변수와 이동변수값은 각각  $\eta=1.0$ ,  $\zeta=0.015$ 를 사용하였다. 본 예제에서는 단순보에 대한 위상최적화를 실시한 뒤 그 결과를 기술하였다. 최적화에는 40%의 초기부피를 구속조건으로 이용하였다. 그림 4(좌)에는 보의 자유진동모드를 그림 4(우)에는 모드변형에너지에 가중치( $w$ )의 변화에 따른 구조물의 전체모드변형에너지 모드를 최소화하여 도출한 최적위상을 도시하였다. 그림 4(우)에 도시된 최적위상은 위로부터 1차, 2차, 3차 고유진동수에 의해서 유발되는 모드변형에너지에 아래와 같이 네 가지의 가중치를 적용하였다:

- Case a)  $w^1 = 1.0, w^2 = 0.0, w^3 = 0.0$
- Case b)  $w^1 = 1.0, w^2 = 1.0, w^3 = 1.0$
- Case c)  $w^1 = 1.0, w^2 = 1.0, w^3 = 0.0$
- Case d)  $w^1 = 1.0, w^2 = 0.0, w^3 = 1.0$

기술된 네가지의 모드변형에너지의 조합을 통하여 위상최적화를 실시하였으며 그 결과는 <그림 4(우)>에 위에서부터 차례로 도시하였다.

<그림 4(우)>의 위에서 첫 번째 그림은 단순보의 1차 고유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지만을 최소화 했을 때 나타난 최적위상이며 이때 좌우 대칭의 아치구조로 나타났다. 그림 4(우)의 두



<그림 4> (좌) 보의 자유진동모드와 (우) 다진동수를 고려한 최적위상

번째 그림은 1차 진동모드, 2차 진동모드, 3차 진동모드로부터 유발되는 모드변형에너지를 같은 가중치로 조합하였을 때 나타나는 최적위상이며 기본고유진동모드만을 고려했을 때 나타나는 아치구조물보다 다소 낮은 구조물의 형태로 나타났다. <그림 4(우)>의 세 번째 그림은 1차 진동모드, 2차 진동모드로부터 유발되는 모드변형에너지를 같은 가중치로 조합했을 때 나타나는 최적위상이며 그림에서 보는 바와 같이 좌우 진동모드에 저항하는 비교적 낮고 곡률이 적은 아치의 형태로 나타났다. <그림 4(우)>의 네 번째 그림은 1차 진동모드와 3차 진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지를 같은 가중치로 조합했을 때 나타나는 최적위상이며 이는 기본고유진동수에 의해서 유발되는 아치구조물에 3차고유진동모드의 특성인 회전의 특성이 위상에 고려되어 곡률이 다소 증가하고 아치의 높이가 높아졌다.

Case a)와 같이 기본고유진동수와 연관한 자유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지만을 최소화한 결과 보의 기본진동수가 초기구조물보다 약 1.89배 증가하는 것으로 나타났다. 그리고 기본고유진동모드와 2차, 3차 진동모드에 의해서 유발되

는 모드변형에너지를 조합한 Case b), Case c), Case d)의 모드변형에너지를 최소화한 결과 단순보의 기본고유진동수는 각각 4.43배, 5.23배, 1.18배 증가하였다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 자유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지분포를 바탕으로 한 다진동수를 고려하는 최적화기법을 이용하여 보의 위상최적화를 수행하였다. 최적화결과를 통하여 제시된 기법이 구조물의 기본고유진동수를 최대화하는데 매우 효과적인 것으로 나타났다. 또한 구조물의 기본고유진동수와 함께 구조물의 다른 고차 고유진동모드도 최적화과정에 고려하는데 있어 용이한 것으로 나타났다.

## 후 기

본 연구는 영국 EPSRC와 건설교통부 건설기술연구개발사업비(과제번호: C105A1020001-05A0502-00112)로 수행되었음.

## 참고문헌

1. Lee, S.J. and Hinton, E., "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions," *Computers and Structures*, Vol. 78, 2000, pp. 478~486
2. 이상진, "스윙프 기하학적 모델을 사용한 프리즘 쉘의 최적화", 한국전산구조공학회 논문집, 제13권 제2호, 2000, pp.221~230
3. Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., "Generating optimum topologies in structural design using a homogenization method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 71 (2), 1988, pp197~224
4. Lee, S.J., Bae, J.E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, 2000. pp843~867
5. 이상진, "저차유한요소를 이용한 다항중경우를 가지는 평면구조물의 위상최적화", 한국전산구조공학회 논문집, 제16권 제1호, 2003, pp. 59~67
6. 이상진, 박경임, "다항중 경우를 가지는 단순 지지된 깊은 보의 위상최적화에 대한 경험", 한국셀공간구조학회 논문집, Vol. 5, 2005, pp. 83~89
7. 이상진, 박경임, "자중 및 설계 의존적 하중의 영향을 고려한 다항중을 받는 평면구조물의 최적위상에 대한연구", 대한건축학회논문집 논문집, 2006 (인쇄중)
8. Lee, S.J. and Bae, J.E., "A Topology Optimization Technique for Maximizing Fundamental Frequency of the Structures with the Use of Modal Strain Energy", *J. Sound & Vibration*, (in process)
9. 이상진, 배정은, 박경임, "구조물의 자유진동모드로 유발되는 변형에너지 분포를 이용한, 위상최적화기법", 한국소음진동공학회 춘계학술대회, 2006 (인쇄중)
10. Youn, S. K and Park, S. H., "A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenization material", *Computers & Structures*. Vol. 62, 1997, pp. 527~538