

기본고유진동수 최대화 문제에 있어서 경계조건에 따른 판구조물의 최적두께 분포

Optimum Thickness Distributions of Plate Structure with Different Essential Boundary Conditions in the Fundamental Frequency Maximization Problem

이 상 진* 김 하 룡**

Lee, Sang Jin Kim, Ha Ryong

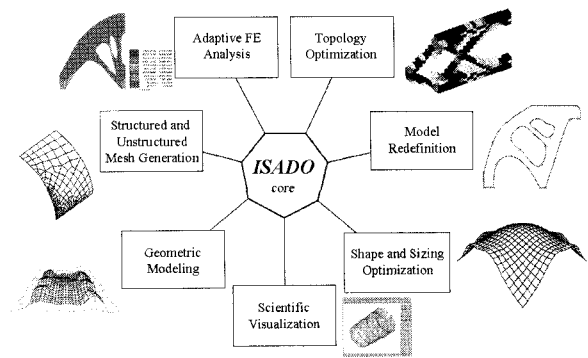
ABSTRACT

This paper investigate the optimum thickness distribution of plate structure with different essential boundary conditions in the fundamental natural frequency maximization problem. In this study, the fundamental natural frequency is considered as the objective function to be maximized and the initial volume of structures is used as the constraint function. The computer-aided geometric design (CAGD) such as Coon's patch representation is used to represent the thickness distribution of plates. A reliable degenerated shell finite element is adopted calculate the accurate fundamental natural frequency of the plates. Robust optimization algorithms implemented in the optimizer DoT are adopted to search optimum thickness values during the optimization iteration. Finally, the optimum thickness distribution with respect to different boundary condition

Keywords: Plate, Optimum thickness, Fundamental frequency, Essential Boundary Condition, Maximization

1. 서 론

구조설계최적화기법은 반복 작업으로 인해 설계의 과정에서 요구되는 시간적 손실을 줄여주고 최소의 노력으로 최대의 성능을 가지는 구조물을 도출하는데 효과적인 방법이다. 일반적으로 구조설계 최적화기법은 크기, 형상, 위상최적화로 구분된다¹⁾. 특히 위상최적화기법은 구조물의 형태와 크기를 동시에 결정할 수 있어 여러 가지 최적화기법을 동시에 이용하는 통합설계최적화²⁾⁻⁴⁾에 대한 발전에 많은 기여를 하고 있다. 통합설계최적화는 <그림 1>에 도시된 바와 같이 다양한 최적화기법을 함께 사용할 수 있어 구조물의 성능을 고도로 증대시킬 수 있는 장점을 가진 설계기법으로 점차 인식되고 있다. 이러한 설계최적화기법의 연구결과는 컴퓨터 시뮬레이션 도구의 개발로 집약되고 있다^{5),6)}.



<그림 1> 통합설계최적화를 위한 요소기술

통합설계기법의 개발 및 코드집약적인 연구는 고성능 컴퓨터의 발달과 구조설계최적화에 활발히 도입되기 시작한 CAGD기법⁷⁾⁻⁸⁾에 의해 가속화 되었다. 특히 CAGD기법으로 인해 구조물을 컴퓨터상에서 보다 쉽게 표현하는 것이 가능하게 되었고 설계최적화과정에서 발생하는 설계변수의 수는 획기적으로 줄어들게 되었다. 통합설계최적화기법의 발달이 심화되면서 개개의 최적화기법을 연계하는 기법개발에 대한 관심이 증폭되었고 이와 함께 독립적으

* 정희원, 경상대학교 공과대학 건축학부 조교수

** 경상대학교 건축학부 구조공학전공 석박사통합과정생

로 개개의 최적화기법에 대한 개발도 심층적으로 이루어지기 시작했다. 그리고 개발된 기법을 이용하여 도출한 최적결과에 대한 검증과 이를 통한 최적화기법의 수정도 함께 추진되고 있다.

이러한 맥락에서 본 연구에서는 설계최적화에서 중요한 역할을 하고 있는 CAGD기법을 이용하여 기본고유진동수를 최대화하는 문제에 있어서 경계조건에 따라 변화되는 판의 최적 두께분포를 조사 분석하고 그 결과를 기술하고자 한다. 특히 최적화된 판의 두께분포에 따라서 변화하는 판의 동특성과 이와 관련한 향후 연구에 대하여 간략히 기술하였다.

2. 두께최적화 기본 요소기술

2.1 기하학적 모델

기하학적 모델은 쉘 구조물의 곡면을 컴퓨터상에서 효율적으로 표현하고 수정하기 위해서 개발되었다. 쿤의 조각면을 시작으로 베지에 곡면, B-스플라인 곡면 그리고 NURBS로 발전되어 왔으며 점차적으로 구조물의 설계최적화에 도입되고 있다. 본고에서는 판과 구조물의 성능을 향상하기 위해 CAGD 기법 중에서도 표현하기 간편하고 자연스러운 기하학적 모델로 인식되고 C^2 의 연속성을 자동으로 만족하고 있는 쿤의 조각면을 도입하여 판의 형상과 두께분포를 표현하였다.

판의 두께를 표현하기 위해 이용한 쿤의 조각면은 다음과 같다⁹⁾.

$$h(u,v) = u^T H Q H^T v^T \tag{1}$$

여기서, $u = \{u^3, u^2, u, 1\}$, $v = \{v^3, v^2, v, 1\}$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

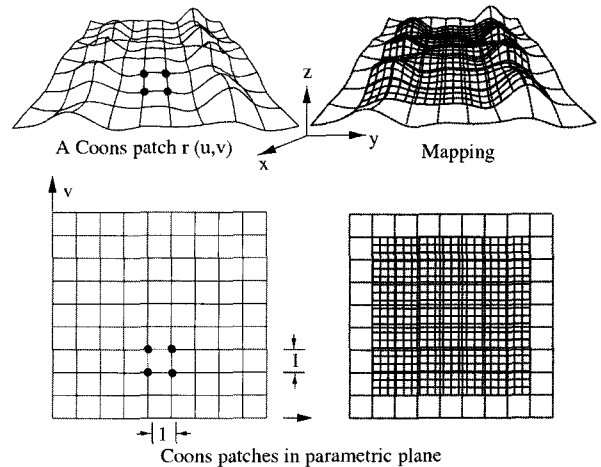
$$Q = \begin{bmatrix} R & R_{,v} \\ R_{,u} & R_{,uv} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) \end{bmatrix}$$

여기서 $r(0,0)$, $r(0,1)$, $r(1,0)$, $r(1,1)$ 은 쿤의 조각면 네 가장자리의 좌표값을 나타내고 $r(0,0)_{,u}$ 는 $r(u,v)$ 를 매개변수 u 에 대하여 점(0,0)에서 편미분한 값을 말한다. 식(1)을 이용하여 여러 개의 쿤의 조각면을 조합한 기하학적 모델로 판의 두께를 표현할 수 있다.

2.2 유한요소망 자동생성기

구조물의 형상을 표현하기 위해서 도입된 기하학적인 모델이 수치해석에 사용되기 위해서는 <그림 2>에 도시된 바와 같이 기하학적인 모델을 유한요소로 이산화 하는 과정을 일반적으로 거쳐야한다. 기하학적인 모델에 상응하는 유한요소를 생성하는 방법은 <그림 2>에서 나타난 바와 같이 2차원 기하학적 모델위에 유한요소망을 생성한 뒤 미리 생성된 기하학적 모델에 사상하는 것이다.



<그림 2> 기하학적인 모델에 사상된 유한요소망

2.3 판의 두께조절법

설계최적화 반복계산과정에서 쉘의 두께의 변화를 적절히 표현하기 위해서는 도입된 CAGD를 바탕으로 형성된 기하학적 모델을 효과적으로 조절할 수 있어야 한다. 이 조절기법은 네 단계로 이루어지는데 설계변수의 선택, 설계변수의 연계, 설계변수의 이동방향, 설계변수의 미세변화로 이루어진다.

2.4 구조물의 반응해석

두께의 변화에 따른 판의 동특성은 수치해석 기법을 이용하여 분석할 수 있다. 판 구조물의 해석에는 퇴화셀요소를 사용하면 형상의 제약 없이 하중에 대한 정확한 판의 반응을 분석할 수 있다.

판의 설계최적화를 수행하기 위해서는 판의 형상과 두께의 변화에 따른 응력분포의 변화를 계산하여야 한다. 본고의 예제에서는 가변형도를 바탕으로 개발된 Reissner-Mindlin(RM) 퇴화셀요소를 이용하여 판의 고유진동수를 계산하였다. 판의 응력을 계산하기 위하여 이용된 퇴화셀요소와 유한요소해석 방법은 참고문헌^{10), 11)}에 기술된 내용을 참고할 수 있다.

2.5 민감도 해석

두께최적화에서는 판의 구조적 특성을 변화시키기 위해서 최적화 반복계산중에 두께를 조절하게 된다. 이때 판의 형상을 나타내는 기하학적 모델을 형성하는 조절점의 위치벡터와 조절점에서의 판의 두께값은 설계변수의 역할을 하게 되며 이때 최적화 알고리즘은 이들 설계변수에 대한 민감도값을 필요로 한다. 설계변수에 대한 민감도는 해석적 기법, 준해석적 기법, 유한차분법이 세 가지의 방법¹²⁾으로 계산할 수 있는데 본 연구에서는 유한차분법과 준해석법을 도입하였다. 따라서 설계변수에 대한 임의의 함수에 대한 민감도 값은 다음과 같이 구하게 된다.

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} \approx \frac{\Delta f}{\Delta s_i} = \frac{\Delta f(s_i + \Delta s_i) - \Delta f(s_i)}{\Delta s_i} \quad (2)$$

여기서 f 는 민감도를 필요로 하는 임의의 함수, Δs_i 는 민감도해석을 위해 도입한 i 번째 설계변수의 미소 변화값을 나타낸다.

2.6 최적화문제정의

최적화문제는 그 적용분야에 상관없이 일반적으로 다음과 같은 표준식(3)으로 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \Psi(s) \\ & \text{Subjected to} \quad g_j(s) \leq 0, j = 1, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h_k(s) \leq 0, k = 1, \ell \\ & s_i^l \leq s_i \leq s_i^u, i = 1, ndv \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, s 는 설계변수벡터이고, $\Psi(s)$ 는 목적함수, $g(s)$ 는 부등제약함수이고, $h(s)$ 는 등제약함수이다. s_i^l 와 s_i^u 는 i 번째 설계함수가 가질 수 있는 하한값과 상한값이며 ndv 는 최적화에 사용된 전체 설계변수의 수를 나타낸다. 본 연구에서는 판의 고유진동수 w 를 목적함수로 선택하였고 구조물의 초기 부피 값 V_0 을 제약조건으로 사용하였다. 최적화를 수행하기 위하여 최적값 검색 프로그램인 DoT¹³⁾에서 제공하는 Sequential Quadratic Programming (SQP) 수학적 프로그래밍 알고리즘¹⁴⁾을 이용하였다

3 최적화 알고리즘

판과 셀의 두께 분포 최적화를 수행하기 위한 기본 알고리즘은 앞에서 기술한 요소기술들을 순차적으로 이용하게 된다. 위에서 제시한 CAGD를 이용한 판의 설계최적화 기본알고리즘은 다음과 같은 다섯 가지의 기본 과정을 거친다.

1) 최적화 문제 정의: 판의 초기형상과 두께의 분포를 균의 조각면을 사용하여 정의한다. 설계변수의 이동방향과 이동범위 또한 이 단계에서 정의한다. 유한요소해석에서 필요한 하중 및 경계조건 등을 준비한다.

2) 유한요소망의 자동생성: 제 2절에서 언급한 유한요소 자동생성기를 사용하여 이전 단계에서 정의된 기하학적 모델위에 유한요소망을 생성한다. 파라메트릭평면위에 유한요소를 생성할 때 규격요소망과 비규격요소망을 모두 사용할 수 있다.

3) 유한요소해석: 제 2절에서 언급한 셀요소를 사용하여 유한요소 해석을 수행한다. 이 단계에서 목적함수에 해당하는 판의 변형에너지와 제약함수인 판의 부피를 계산한다.

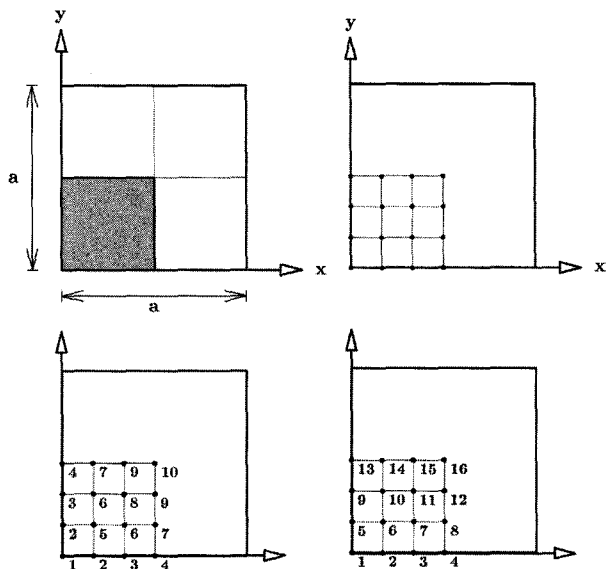
4) 민감도해석: 민감도 해석은 설계변수의 변화가 구조물의 구조적 특성에 끼치는 영향의 정도를 파악하는 단계이다. 본고에서는 유한차분법을 사용하여 설계민감도를 계산하였다.

5) 최적값 검색: 민감도 해석에서 계산된 각 변수

에 대한 설계민감도값을 이용하여 최적값을 검색한다. 최적값이 구해 질 때까지^{2)~5)}과정을 반복한다.

4. 판의 두께최적화

이 예제에서는 경계조건이 정사각형 판의 최적화에 미치는 영향을 조사하였다. 판의 진동수를 최대화하기 위하여 조절점의 두께 값만을 설계변수로 택하였다. 설계최적화에는 네 가지의 경계 조건 C/C/C/C, S/S/S/S, S/C/S/C, S/F/S/F를 사용하였다. 여기서 C는 고정지지, S는 단순지지, 그리고 F는 자유지지의 경계조건을 나타낸다. 판의 형상 및 유한요소망은 그림 3에서 도시하였다. 판의 경계조건을 표기한 순서는 $x=0$ 변에서 시작하여 판의 반시계방향으로 하였다. 자유진동해석에 사용된 판의 한 변의 길이는 $1m$, 초기 두께는 $0.25m$ 로 가정하였으며 사용된 재료특성은 탄성계수 $E=2.0 \times 10^7 kN/m^2$, 프와송비 $\nu=0.3$ 이다. 판의 형상을 표현하기 위하여 6×6 의 쿼의 조각면을 이용하였고 판의 $1/4$ 을 8×8 의 유한요소망으로 이산화 하였다. 최적화를 수행하기 위하여 그림 3에서 도시한 바와 같이 네 변의 경계조건이 서로 같은 C/C/C/C와 S/S/S/S는 설계변수를 10개로 하였고 네변의 경계조건이 다른

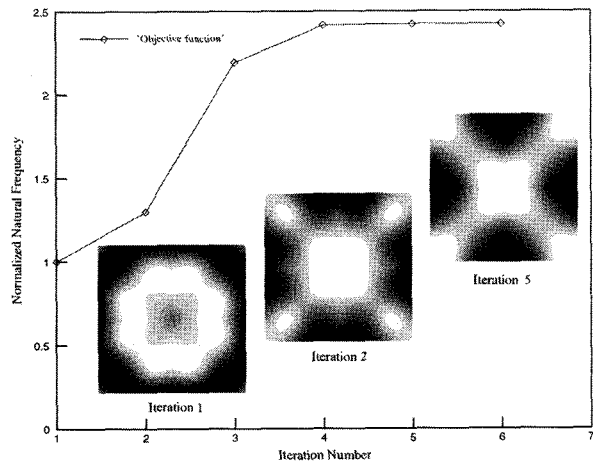


〈그림 3〉 정사각형 판: (좌상) 형상, (우상) 쿼의 조각면, (좌하) C/C/C/C 및 S/S/S/S의 설계변수 위치 (우하) S/C/S/C 및 S/F/S/F의 설계변수 위치

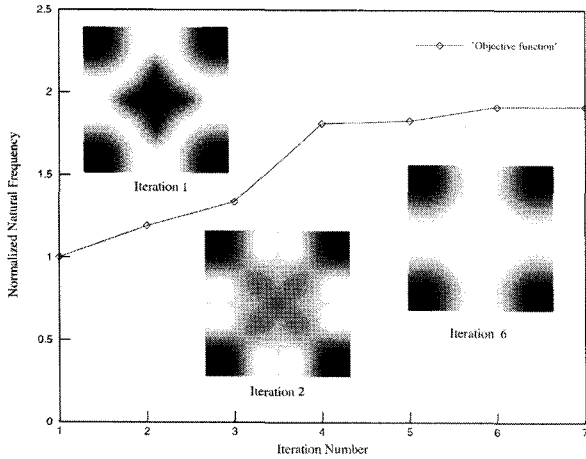
〈표 1〉 초기 설계변수값과 및 정규화된 목적함수값

i	s_i^o	s_i^l	s_i^u	C/C/C/C C	S/S/S/S	S/C/S/ C	S/F/S/ F
1	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.5000	0.2766	0.5000
2	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.5000	0.2719	0.1200
3	0.25	0.12	0.5	0.5000	0.2024	0.2274	0.1756
4	0.25	0.12	0.5	0.5000	0.1200	0.1200	0.1702
5	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.5000	0.3986	0.4724
6	0.25	0.12	0.5	0.2770	0.2206	0.2782	0.1200
7	0.25	0.12	0.5	0.5000	0.1200	0.1200	0.3345
8	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.1200	0.1200	0.2238
9	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.1200	0.5000	0.1200
10	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.1200	0.4084	0.1200
11	0.25	0.12	0.5	-	-	0.1200	0.4920
12	0.25	0.12	0.5	-	-	0.1200	0.1200
13	0.25	0.12	0.5	-	-	0.5000	0.1200
14	0.25	0.12	0.5	-	-	0.4385	0.1200
15	0.25	0.12	0.5	-	-	0.1200	0.5000
16	0.25	0.12	0.5	-	-	0.1200	0.1200
$\Psi(s)$	-	-	-	2.4229	1.9140	2.1197	1.8782

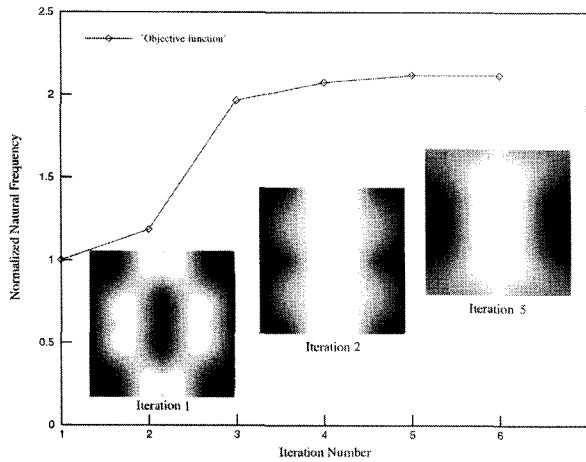
S/C/S/C, S/F/S/F는 설계변수를 16개로 하여 최적화를 수행하였다. 이는 경계조건에 따른 구조물의 대칭성을 이용하여 설계변수를 조절한 것이다. 표 1에 기술한 바와 같이 최적결과로부터 판의 초기 부피 값을 유지하면서 두께분포를 조절할 경우 경계조건 C/C/C/C, S/S/S/S를 가지는 판은 진동수가 각각 243%, 191% 증가하였다. 그리고 S/C/S/C, S/F/S/F의 경우 고유진동수가 211%, 187%가 증가하였다. 최적결과로부터 같은 재료를 사용하더라도 고정지지단을 가진 판을 최적화 하면 단순지거나 자유단을 가진 판 보다 진동수가 더 최대화됨을 확인할 수 있다. 이는 경계조건이 고정되어 있으면 이 영



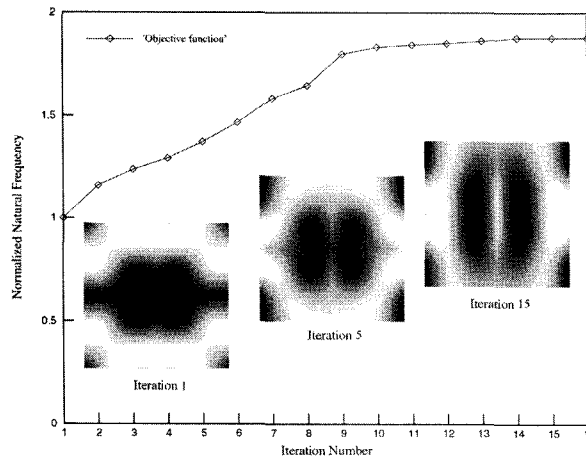
〈그림 4〉 C/C/C/C 경계조건을 가지는 판의 이력곡선



〈그림 5〉 S/S/S/S 경계조건을 가지는 판의 이력곡선



〈그림 6〉 S/C/S/C 경계조건을 가지는 판의 이력곡선

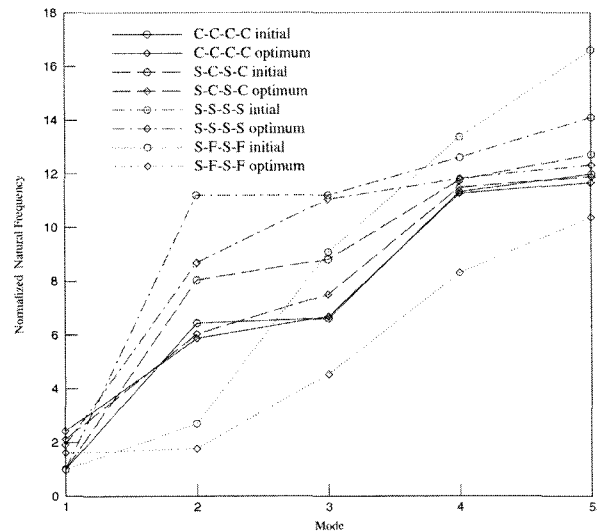


〈그림 7〉 S/F/S/F 경계조건을 가지는 판의 이력곡선

향으로 구조물 자체의 강성이 더 증가시킬 수 있음을 보여준다. 표 1에는 최적화에 사용된 설계 변수값과 최적화된 판의 설계 변수값을 기술하였다. 그리고 최적이력에 대한 값은 <그림 4>에서 <그림 7>에

도시하였다. 참고로 그림에서 어두운 부분은 두께가 두꺼운 부분을 나타낸다.

<그림 8>은 초기 판의 진동수 분포와 최적화된 판의 진동수 분포를 비교한 것이다. 그림에서 도시된 결과로부터 최적화된 판의 기본 고유진동수는 증가하였으나 최적화과정을 거치면 고차모드의 고유진동수는 초기 판의 고유진동수 보다 감소하게 되었음을 알 수 있다. 이는 판의 진동특성이 최적화과정을 통하여 전체적으로 변화하고 있음을 나타낸다. 따라서 판의 설계에서 고차진동수의 영향을 고려해야하는 경우 최적화 수행 시 고차모드의 진동수 변화를 충분히 고려하는 것이 필요한 것으로 나타났다. 참고로 경계조건이 S/F/S/F인 경우는 1차 모드를 제외한 나머지 모드와 관련한 고유진동수에 1/3을 곱하여 그 값을 <그림 8>에 도시하였다.



〈그림 8〉 초기 판과 최적화된 판의 진동수 분포

5. 결 론

본 연구에서는 기하학적인 모델을 바탕으로 판의 고유진동수를 최대화할 수 있는 설계최적화기법을 이용하여 경계조건에 따른 판의 최적 두께분포를 조사하였다. 최적화 수행 결과 고정된 경계조건을 가진 변이 많은 판일수록 최적화된 판의 기본고유진동수가 더 많이 증가함을 알 수 있었다. 그러나 최적화된 판의 진동특성 변화에서 나타나는 큰 특징은 기본고유진동수는 증가하는 반면 고차진동수는 상대적으로 감소하는 것으로 나타났다. 따라서

최적화과정중에 이러한 판의 진동특성의 변화를 적절히 조절할 수 있는 제약조건의 도입이 필요한 것으로 나타났다.

후 기

본 연구는 영국 EPSRC와 학술진흥재단 선도연구자 지원사업비(2004)로 수행됨.

참고문헌

1. Lee, S.J. and Hinton, E., "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions," *Computers and Structures*, Vol. 78, 2000, pp. 478~486
2. Olhoff N., Bendsoe, M.P. and Rasmussen, J. "On CAD-integrated structural topology and design optimization," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, 1991, pp. 259~279
3. Maute K. and Ramm E., "General shape optimization - an integrated model for topology and shape optimization," in *Proc. of the 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, edited by Rozvany G.I.N., pp. 299~306, Goslar, Germany, 1995
4. Hinton, E., Sienz, J. and Hassani, B., "Fully integrated design optimization for engineering structures," in *Proc. of Third International Conference on Computational Structures Technology - Advances in Structural Engineering Optimization*, Budapest, Hungary 1996
5. Rasmussen, J., "The Structural optimization system CAOS." *Structural Optimization*, Vol. 2, 1990, pp. 109~115.
6. Bletzinger, K-U., Reitinger, R., Kimmich, S. and Ramm, E., *Shape optimization with program CARAT*, In *Software Systems for Structural Optimization : edited by Hörnlein, H. , Schittkowski, K., Int. Series of Numerical Mathematics*, Vol. 110, pp. 97~124. Birkhäuser, 1993.
7. Farin, G., "Curves and surfaces for computer aided geometric design, Academic Press, San Diego, 1990
8. Anand, V.B., *Computer Graphics and Geometric Modelling for Engineers*, John Wiley and Sons, New York, 1993
9. Coons, S.A., *Surfaces for Computer-Aided Design of Space Figures*, Mech. Eng. Dept., MIT, 1964
10. Ahmad, S. B.M. Irons and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 419~451
11. Lee, S.J., Kanok-Nuchulchai, W, "A nine- node assumed strain finite element for large deformation analysis of laminated shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, 1998, pp.777~798
12. Haftka R.T. and Adelman, H.M., "Recent developments in sensitivity analysis," *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp137~151
13. Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill, 1984
14. DoT manual VMA Engineering, 1996.