
강성등가하중을 이용한 Newton-Raphson Iteration 개선

Improvement of Newton-Raphson Iteration Using ELS

김 치 경*

황 영 철**

Kim, Chee Kyeong

Hwang, Young Chul

ABSTRACT

This paper presents a new nonlinear analysis algorithm which uses the equivalent nodal load for the element stiffness. The equivalent nodal load represents the influence of the stiffness change such as the addition of elements, the deletion of elements, and/or the partial change of element stiffness. The nonlinear analysis of structures using the equivalent load improves the efficiency very much because the inverse of the structural stiffness matrix, which needs a large amount of computation to calculate, is reused in each loading step. In this paper, the concept of nonlinear analysis using the equivalent load for the element stiffness is described and some numerical examples are provided to verify it.

Keywords : Equivalent Load for Stiffness, Nonlinear Analysis, Newton-Raphson Iteration

1. 서 론

과거 비선형해석은 해석 시 소요되는 방대한 계산양이나 비균형하중(out-of-balance load) 보정 과정에서 발생하는 발산(divergence) 문제 등으로 인하여 제한적인 영역에 한하여 사용되었다. 그러나 근자에 들어 지진하중 등 극한하중에 대한 구조물 거동 해석이나 성능기반설계(performance based design)의 실용화 등과 같이 비선형해석의 필요성이 증가하고 있으며, 비선형해석의 효율성과 신뢰성을 높이기 위한 연구와 프로그램 개발이 활발히 이루어지고 있다. 비선형해석은 응력 상태나 변형 이력에 따라 구조물의 강성이 변하는 경우 구조물 거동을 해석하기 위하여 사용된다.

메트릭스 해석법 또는 유한요소법을 이용한 비선형 해석의 기본 개념은 전체 하중을 여러 단계로 자른 후 각 하중 구간에 대하여 선형해석을 수행한 후 그 결과를 누적하는 것이다. 이론적으로 하중 구간을 무한히 잘게 하면 구간 내 선형거동 가정에 의한

오차도 0에 수렴하게 되지만 계산의 효율을 고려하여 한 하중 구간의 크기가 결정된다. 각 구간 내에서의 비선형거동은 비균형하중이 설정된 오차범위(tolerance) 이하가 되도록 선형해석 결과를 보정하는 여러가지 반복기법에 의하여 반영된다.

선형해석의 반복은 방대한 계산량을 의미한다. 즉 매 하중 구간마다 당시의 응력 상태에 따른 구조물 강성행렬의 구성과 역행렬 계산이 수행되어야 하며 여기에는 자유도 수의 3제곱에 비례하는 계산량이 요구된다. 또한 비균형하중 보정에도 많은 계산량과 함께 수렴하지 않고 발산하는 문제가 발생할 수 있고, 설정된 비균형하중 오차범위의 크기에 따라서는 오차 누적에 의하여 신뢰할 수 없는 해석 결과를 도출할 수도 있다.

본 연구는 전술한 기존 비선형해석 패러다임을 벗어난 새로운 비선형해석 알고리즘을 제안한다. 본 알고리즘의 가장 중요한 특징은 하중 구간 수에 관계없이 구조물 강성행렬에 대한 역행렬 계산을 단 한번만 수행한다는 점이다. 또한 굳이 하중을 여러 구간으로 나누어 작용시키는 점증적 재하가 필요 없고(non-incremental), 각 하중 단계에서 비균형하

* 정회원, 선문대학교 건축학부 교수

** 선문대학교 대학원 석사과정

중이 발생하거나 누적되지 않으므로 이에 대한 반복적 보정도 필요하지 않다.(non-iterative) 또한 본 알고리즘을 이용하면 기존 기법에 의한 비선형해석 시 수렴 문제가 발생되었던 콘크리트 재료의 압축 강도 이후 응력이완 구간이나 인장 균열 발생 후 응력 상실 구간, 좌굴 이후 거동 등도 일관된 절차에 의하여 해석 가능하다.

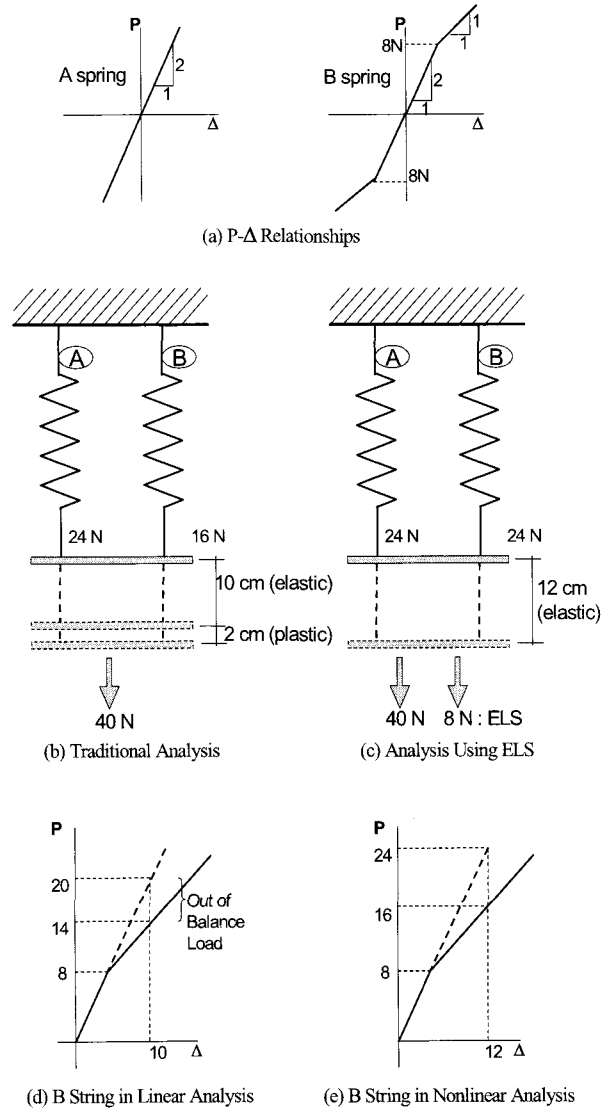
반면 각 요소의 힘-변형관계 또는 재료의 구성방정식을 몇 개의 선형관계로 이상화하여야 하며, 비선형 거동 요소수가 많아질수록 계산량이 증가하여 모든 요소가 비선형거동을 하는 구간에서는 기존 비선형해석 기법에 비해 2-3배 정도의 계산량이 소요되는 단점도 있다.

본 알고리즘의 핵심 개념은 각 하중 구간에서 발생하는 비선형거동, 즉 강성 변화를 등가의 하중으로 치환하여 초기 구조물에 추가 작용시켜 해석함에 있다. 이와 같이 강성 변화가 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 강성 변화 전 구조물에 재현할 수 있는 하중을 강성등가하중(ELS : Equivalent Load for Stiffness)이라 정의하였다. 여기에서 주목할 점은 강성등가하중을 이용한 해석이 모든 하중 구간에서 초기 구조물을 대상으로 수행되며, 그 결과 구조물 강성행렬 구성과 역행렬 계산이 초기 구조물에 대하여 단 한번만 수행되고 이후 각 하중 구간에서는 강성등가하중에 의한 추가 변형을 역대입만으로 계산할 수 있다는 점이다.

본 논문에서는 우선 단자유도 재료비선형 스프링 구조물을 이용하여 강성등가하중에 의한 비선형해석 개념과 가능성을 제시한다. 다음으로 일반적인 다자유도 구조물에서 요소 강성 변화에 따른 강성등가하중을 산정하는 알고리즘을 제시한다.

2. 기본 개념

본 장에서는 단자유도 비선형 구조물을 이용하여 강성등가하중의 개념을 정의하고 강성등가하중을 이용한 비선형해석의 가능성을 검토한다. 대상 구조물은 그림 1에서 보는 바와 같이 2N/cm의 강성을 갖는 선형 스프링 A와 8N에서 항복 후 강성이 1N/cm로 강성이 연해지는(strain softening) 비선형 스프링 B로 구성되고 40N의 축력이 작용한다.



<그림 1> 단자유도 비선형 구조물의 강성등가하중

2.1 강성등가하중의 정의

대상 구조물을 비선형해석한 결과를 <그림 1. (b)>에서 볼 수 있다. 이 경우 초기 탄성계수를 이용한 선형해석 결과 10cm의 탄성변위가 발생하고, <그림 1. (d)>에서 보듯 B 스프링에 6N의 비균형하중이 발생하게 된다. 비균형하중을 반복 보정하면 2cm의 소성변위가 추가 발생되고, 이 때 A 스프링에는 24N, B 스프링에는 <그림 1. (e)>에서 보듯 16N의 축력이 발생된다.

한편 <그림 1. (c)>는 동일한 구조물에 8N의 하중을 추가하여 초기 탄성계수를 이용하여 선형해석한 결과로서 전술한 비선형해석 결과와 동일한 최종 변위를 보여준다. 이 때 탄성거동을 하는 A 스프

링의 축력은 바로 계산되고, 비선형거동을 하는 B의 축력은 최종 변위를 이용하여 <그림 1. (e)>의 부재 P-Δ 관계로부터 계산할 수 있다.

이상의 예에서 보듯 적절한 하중을 구하여 추가한다면 초기 탄성계수만으로도 비선형 거동을 하는 구조물의 변형을 계산할 수 있다. 즉 재하과정에서 구조물의 강성변경이 발생한 경우, 기존 비선형해석 기법에서처럼 전체구조물의 강성을 다시 계산하거나 비균형하중에 대한 반복보정 없이, 강성 변경이 거동에 미치는 영향을 재현할 수 있는 하중을 초기 구조물에 추가함으로써 구조물의 변형을 계산할 수 있다. 이와 같이 강성 변화가 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 강성 변화 전 구조물에 재현할 수 있는 하중을 강성등가하중이라 정의하였다. <그림 1. (c)>에서 8N은 주어진 구조물과 하중조건 하에서 B 스프링의 강성변화량 1N/cm에 대한 강성등가하중이다.

2.2. 강성등가하중의 계산 원리

전 절에서 비선형해석을 구조물의 강성을 재산정하거나 비균형하중에 대한 반복 수정 없이 강성등가하중을 이용하여 수행할 수 있음을 보았다. 강성등가하중을 이용한 비선형해석이 실용성을 갖기 위해서는 일반적인 경우에 대하여 강성등가하중을 계산할 수 있어야 하며, 또한 기존 비선형해법에 비하여 계산량 면에서 효율적이어야 한다.

<그림 1>의 구조물에서 강성등가하중 8N을 구하는 절차를 요약하면 다음과 같다. 우선 초기 강성과 하중을 이용하여 선형해석을 수행하면 10cm의 변위가 계산된다. <그림 1. (d)>에서 보듯 10cm 변위에 의한 B 스프링의 축력을 초기 강성에 대하여 계산하면 20N, 비선형거동을 고려한 축력은 14N이다. 그러므로 6N의 비균형하중이 발생하며 이는 강성 변경 후 남은 강성에 재분배된다. 이 상황은 강성 변경 전 초기구조물에서 다음과 같이 재현될 수 있다.

- 1) 초기구조물 강성 : 4N/cm
- 2) 강성 변경 후 잔류강성 : 3N/cm
- 3) 잔류강성에 재분배되어야 할 비균형하중 : 6N
- 4) 절점하중의 잔류강성에 대한 분배율 : 3/4
- 5) 비균형하중 6N을 잔류강성에 분배하기 위한

$$\text{절점하중 } R : R \times 3/4 = 6N \rightarrow R = 8N$$

이상의 과정을 통하여 8N을 강성 변경 전 초기구조물에 추가하면, B 스프링의 비선형거동으로 발생한 비균형하중 6N은 강성 변경 후 잔류강성에 재분배된다. 이러한 과정을 통하여 B 스프링의 비선형거동에 의한 응력재분배 상황이 초기구조물에 대한 탄성해석에서 재현될 수 있다. 이 경우 8N이 B 스프링 항복 후 상실된 1N/cm의 강성에 대한 강성등가하중이다.

3. 단자유도 구조물 해석에

본 장에서는 다양한 특성의 비선형거동을 하는 4개의 스프링으로 구성된 단자유도 구조물을 대상으로 강성등가하중을 이용하여 일괄 재하(non-incremental) 후 반복 보정 없이(non-iterative) 해석한 예를 제시한다. <그림 2>는 해석 대상 구조물의 형상과 재하이력, 그리고 각 스프링의 P-Δ 관계를 보여준다.

<그림 2. (b)>에서 보는 바와 같이 첫번째 하중 스텝으로 1200N을 재하하여 해석한 결과와 중간 과정을 표 1에 제시하였으며, 각 과정에 대하여 간단히 기술하면 다음과 같다.

1) 초기 탄성해석

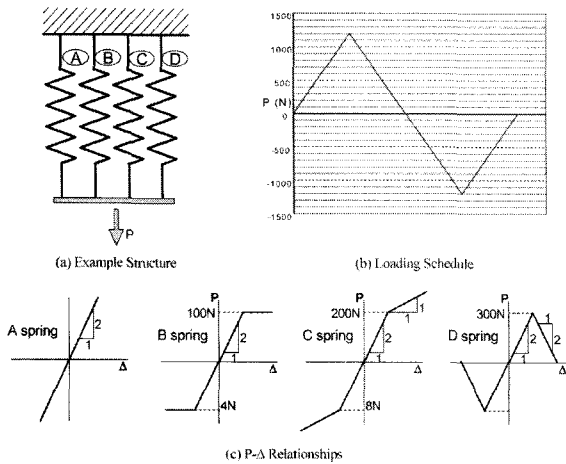
8N/mm의 초기강성을 이용하여 탄성해석한 결과 150mm의 탄성변위와 각 부재 탄성부재력이 계산되었다.

2) 1차 강성등가하중 산정과 재하

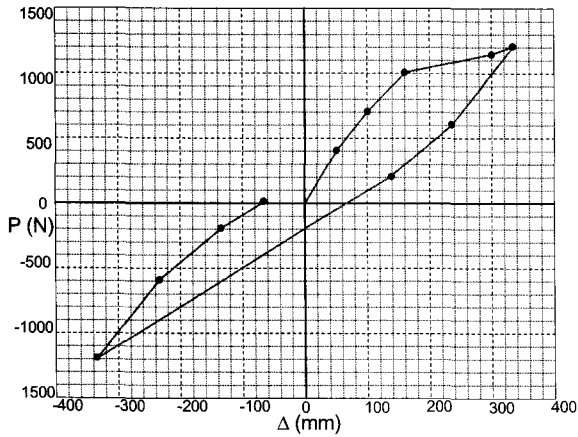
<그림 2. (c)>에 주어진 각 부재의 P-Δ 관계를 이용하여 150mm 변위 상태에서의 각 부재 강성과 비균형하중을 계산하였다. 그 결과 B 및 C 스프링에서 비선형거동이 발생하여 각각 200N 및 50N, 총 250N의 비균형하중이 발생하였다. 강성 변화 후 잔존강성 5N/mm에 250N의 비균형하중이 재분배되는 상태를 강성 변경 전 초기구조물에 재현하기 위한 강성등가하중은 다음과 같이 계산된다.

$$ELS \times \frac{5(\text{잔존강성})}{8(\text{초기강성})} = 25N$$

$$\therefore ELS = 40N$$



〈그림 2〉 단자유도 구조물 비선형해석 예



〈그림 3〉 예제구조물 하중-변위도

이와 같이 계산된 강성증가하중 40N을 초기구조물에 추가 재하하면 50mm의 추가변위와 각 부재 잔존강성에 분배되는 추가부재력을 계산할 수 있다.

3) 2차 강성증가하중 산정과 재하

1차 강성증가하중에 의한 변형 및 응력재분배에 의하여 D 스프링의 강성이 2N/mm에서 -2N/mm 변경되었으며, 전 단계와 동일한 과정에 의하여 1280N의 강성증가하중이 계산되었다. 이를 초기구조물에 추가 재하한 결과 160mm의 추가변위와 각 부재의 추가부재력이 계산되었다.

4) 3차 강성증가하중 산정과 재하

2차 강성증가하중에 의한 변형 및 응력재분배에 의하여 D 스프링의 강성이 -2N/mm에서 다시

0N/mm로 변경되었고, -213.3N의 강성증가하중과 이에 따른 -26.7mm의 추가변위 및 각 부재 추가부재력이 계산되었다.

5) 최종 강성증가하중과 변위

최종적으로 본 예제 구조물의 비선형거동은 1466.7N의 강성증가하중을 초기구조물에 추가하여 선형해석함으로써 재현할 수 있었다.

〈그림 3〉은 〈그림 2. (b)〉에 주어진 각 재하 단계에 대하여 이상의 과정에 의해 해석한 결과를 보여준다.

이상의 단자유도 구조물을 대상으로 한 강성증가하중 산정과 이를 이용한 비선형해석 과정에서 주목할 점을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 변경 강성에 대한 강성증가하중을 계산하면 초기강성, 즉 강성변경 전 초기구조물을 이용하여 비선형거동을 해석할 수 있다.
- 2) 강성증가하중은 강성변경 전 초기강성과 강성변경 후 잔존강성 비에 의하여 계산된다.
- 3) 일반적인 다자유도 구조물에서 강성증가하중을 계산하기 위해서는 강성 변경 전후의 강성비, 또는 소멸강성과 잔존강성간의 절점하중분배율을 얼마나 효율적으로 계산할 수 있는가가 관건이 된다.

4. 결 론

본 연구를 통한 결론을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 구조물을 구성하는 강성 일부를 하중으로 표현한 강성증가하중을 제안하고 이를 이용한 비선형해석 알고리즘을 제안하였다.
- 2) 부재의 비선형거동이 발생할 때, 강성변경을 강성증가하중으로 치환하면 전체 구조물의 강성행렬을 재구성하지 않고 초기 구조물을 대상으로 강성 변경 후 해석을 수행할 수 있으며, 이 과정에서 초기 해석 시 계산된 강성행렬의 역행렬을 사용함으로써 계산 효율을 크게 향상시킨다.

〈표 1〉 해석 과정 및 결과

항 목	부재				합계
	A	B	C	D	
초기 탄성해석					
초기강성 (N/mm)	2	2	2	2	8
단계 하중 (N)					1200
탄성변위 (mm)					150
탄성부재력 (N) (A0)	300	300	300	300	1200
1차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성 (N/mm)	2	0	1	2	5
비평형하중 (N) (B)	0	200	50	0	250
강성등가하중 ELS (N)	ELS × 5/8 = 250				400
ELS에 의한 추가변위 (mm)					50
잔존강성에 분배된 부재력 (C)	100	0	50	100	250
부재력 = (A0)-(B)+(C) (A1)	400	100	300	400	1200
2차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성 (N/mm)	2	0	1	-2	1
비평형하중 (N) (B)	0	0	0	160	160
강성등가하중 ELS (N)	ELS × 1/8 = 160				1280
ELS에 의한 추가변위 (mm)					160
잔존강성에 분배된 부재력 (C)	320	0	160	-320	160
부재력 = (A1)-(B)+(C) (A2)	720	100	460	-80	1200
3차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성 (N/mm)	2	0	1	0	1
비평형하중 (N) (B)	0	0	0	-80	-80
강성등가하중 ELS (N)	ELS × 3/8 = -80				-213.3
ELS에 의한 추가변위 (mm)					-26.7
잔존강성에 분배된 부재력 (C)	-53.3	0	-26.7	0	-80
부재력 = (A2)-(B)+(C)	666.7	100	433.3	0	1200
최종 강성등가하중과 변위					
강성등가하중의 합 (N)	400+1280-213.3 = 1466.7				1466.7
최종 변위 (mm)	(1200+1466.7) / 8 = 333.3				333.3

- 3) 강성등가하중에 의한 비선형해석은 비선형거동을 하는 강성 변경 요소의 수가 적을수록 효율적이다.
- 4) 강성등가하중은 재료비선형해석, 구조물 거동 및 응력 분포 제어 등 다양한 구조해석 및 설계 문제에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 2005년도 건설핵심기술연구개발사업(05건설핵심C03, 과제번호 C105A1000003-05A0300-00320)에 의한 것임

참고문헌

1. 김치경, “부분적 강성 변화에 따른 효율적 부분 재해석 알고리즘”, 한국전산구조공학회 논문집, 제17권 제4호, 2004. 12., pp.459-467
2. 이한주, 김치경, 김호수, “횡강성 영향행렬을 이용한 고층건물의 횡변위 제어 및 단면 재산정 방안”, 한국전산구조공학회 논문집, 제16권 제2호, 2002. 6., pp.271-279
3. Bathe, K.J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996, pp.717~718
4. Chen, H, Archer, G.C., “New Domain Decomposition Algorithm for Nonlinear Substructures”, J. of Computing in Civil Engineering, ASCE, 19(2), April 1. 2005., pp. 148~159
5. Fafitis, A., “Nonlinear Truss Analysis by One Matrix Inversion,” Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.131, No.5., May 1. 2005., pp.701~705
6. Leon, S.J., Linear Algebra with Applications, Macmillan Publishing Co., New York, 1980