변화하는 감쇠를 갖는 계가 조화력을 받을 때의 운동 - 이론적 해석
Motion of a System with Varying Damping Subject to Harmonic Force - Analytical Analysis

이건명† · 박오철*

Gun-Myung Lee and O-Cheol Park

Key Words : Force Frequency Shifting(가진주파수 이동), Low Frequency Shaker(저주파 가진기), Time Varying Damper (가변 댐퍼), Difference Frequency(차 주파수), Rotational Mode(회전모드), Frequency Component(주파수성분).

ABSTRACT

The motion of a system composed of a plate, constant springs and varying dampers is considered when the system is subject to harmonic force. Letting the frequencies of harmonic force and damper variation f_1 and f_2, respectively, the displacement at the center of the plate has the strongest component at frequency f_1. The angular displacement of the plate has strong components at $f_1 - f_2$ and the natural frequency of the rotational mode of the system. If these two frequencies coincide, the plate oscillates with almost single frequency and a large amplitude. Part of these simulation results are proved analytically.

1. 서 론

빌딩, 탑, 다리와 같이 고유진동수가 낮은 대형 구조물의 동적 거동을 실험적으로 고찰하기 위하여 이들 구조물에 저주파수의 가진력을 제공하는 가진기가 필요하다. 이러한 가진기로 불평형질량(out-of-balance mass)을 이용한 가진기[1,2]와 서보 유압 가진기[3]가 주로 사용되고 있다.

한편 저주파수의 가진력 제공을 위한 새로운 형태의 가진기가 제안되었으며 이 가진기는 가진주파수 이동(Force Frequency Shifting)현상을 이용하고 있다.[4-6] Figure 1과 같이 구조물에 가진력 $F = F_0 \sin \omega_1 t$ 가 작용하고, 이 가진력의 작용점이 $s = s_0 + r \sin \omega_2 t$ 와 같이 구조물을 따라 앞뒤로 이동하면 이 구조물에는 두 개의 주파수 ω_1 과 ω_2의 차($\omega_1 - \omega_2$)와 합($\omega_1 + \omega_2$)의 주파수를 갖는 일반화 힘(generalized force)이 작용하여 구조물을 가진하게 된다. 따라서 일반적인 불평형질량 가진기를 사용하여 이 가진기를 앞뒤로 움직이고, 두 개의 주파수를 조절함으로써 원하는 저주파수의 가진력을 얻을 수 있다. 그러나 이 방법에서는 가진기를 가진력의 방향과 직교하는 방향으로 왕복운동시켜야 하는 불편한 점이 있다.

가진기를 움직이지 않고 가진주파수 이동현상을 구현할 수 있는 가진기가 Figure 2와 같이 제안되었다.[7] 이 가진시스템은 판과 여러 개의 스프링, 댐퍼로 이루어져 있다. 불평형질량 가진기로부터 주파수 ω_1의 가진력이 판의 중앙에

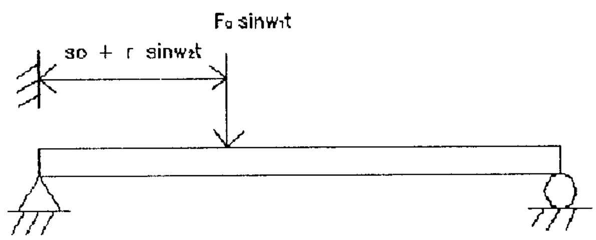

Figure 1 Force frequency shifting with a reciprocating shaker.

† 책임저자, 정회원, 경상대학교 기계항공공학부
E-mail : gmlee@gnu.ac.kr
Tel : (055) 751-5313, Fax : (055) 757-5622

* 경상대학교 대학원 기계공학과

작용하고, 임의의 한 순간에는 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 활동적이다. 즉 이 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 유한한 스프링상수와 감쇠계수를 갖고, 나머지 스프링과 댐퍼는 영의 계수를 갖는다. 활동적인 스프링과 댐퍼가 판을 따라서 ω_2의 주파수로 변화하면 스프링력과 감쇠력은 ω_2의 주파수로 판을 따라 움직이게 되고, 구조물에는 두 주파수의 차인 $\omega_1 - \omega_2$의 주파수를 갖는 일반화 힘이 작용하는 것이 확인되었다.

본 논문에서는 이러한 가진시스템의 운동을 이해하기 위하여 Figure 3과 같이 두 개의 스프링과 댐퍼를 갖는 좌우 대칭의 간단한 시스템을 고려하였다. 이 가진시스템에서 스프링상수가 일정하고, 감쇠계수가 변화하는 경우에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 판의 운동을 고찰하였다. 그리고 시뮬레이션을 통하여 밝혀진 판의 운동의 주요 주파수성분의 발생 원인을 이론적으로 규명하였다.

2. 운동의 해석

이 시스템의 거동을 쉽게 해석하기 위하여 판은 변형이 없는 강체로 가정하고, 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + \sum_i c_i\dot{x} + \sum_i c_i r_i\dot{\theta} + \sum_i k_i x + \sum_i k_i r_i \theta = F_0 \sin\omega_1 t \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} + \sum_i c_i r_i \dot{x} + \sum_i c_i r_i^2 \dot{\theta} + \sum_i k_i r_i x + \sum_i k_i r_i^2 \theta = 0 \quad (2)$$

이 식에서 m, J, x, θ, F_0, k_i, c_i, r_i 는 각각 판의 질량과 관성모멘트, 판 중심의 수직 변위와 판의 회전 변위, 가진력의 진폭, 각 스프링과 댐퍼의 스프링상수와 감쇠계수, 그리고 판의 질량 중심으로부터의 거리를 나타낸다. 한 쌍의 스프링과 댐퍼는 판 위의 동일 지점에 부착되어 있다고 가정한다.

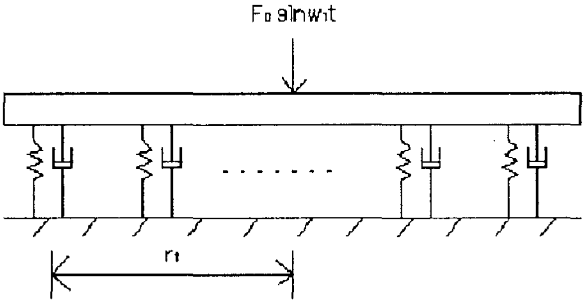

Figure 2 A shaker composed of a plate, springs and dampers.

이 시스템에서 두 개의 스프링의 스프링상수가 k로 동일하고 감쇠가 없을 때, 이 시스템의 운동방정식은 비연성화(decoupled)되고, 두 개의 고유진동수는 각각 병진모드와 회전모드의 고유진동수, ω_{nd}와 ω_{nr}이 되며 이들 고유진동수는 다음과 같이 구하여진다.

$$\omega_{nd} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$
$$\omega_{nr} = \sqrt{\frac{k\sum r_i^2}{J}} \quad (3)$$

이 가진시스템에서 스프링의 스프링상수는 일정하고, 댐퍼의 감쇠계수는 시간에 따라서 변화하는 경우를 고찰하였다.

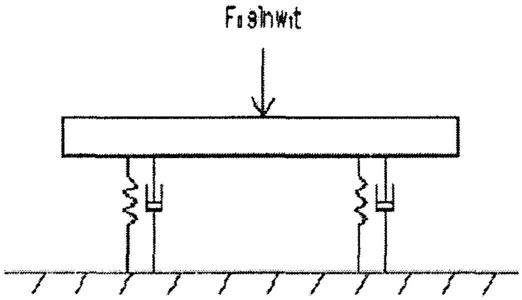

Figure 3 A two-spring-damper system.

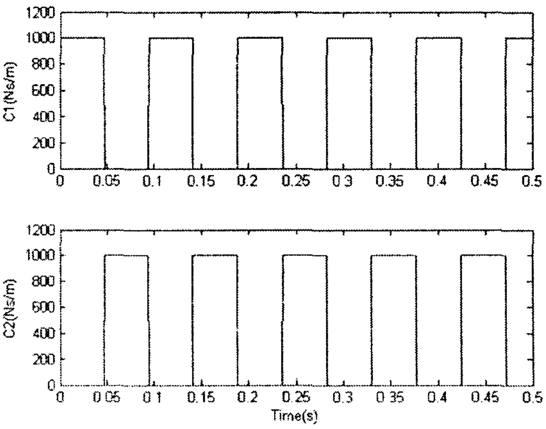

Figure 4 Variation of the damping constants for a two-spring-damper system.

감쇠계수는 사각파 모양으로 변화하도록 하였으며 Figure 4는 이 시스템에서 두 개의 댐퍼가 교대로 활동적이 되도록 감쇠계수가 변화하는 모습을 보이고 있다.

이 시스템의 운동을 해석하기 위하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시스템의 운동방정식 (1), (2)를 주어진 시스템 매개변수와 외력에 대하여 Matlab을 사용하여 풀어서 판 중심의 수직변위 x와 회전변위 θ를 구하고, 이 시간데이터를 Fourier 변환하여 주파수성분을 구하였다. 사용된 시스템의 매개변수들은 $m=30$ kg, $J=100$ kgm^2, $k=3.5\times10^4$ N/m, $c=1\times10^3$ Ns/m, $r_1=1/3$ m, $f_1=\omega_1/2\pi=12$ Hz, $F_0=1000$ N이었고, $f_2=\omega_2/2\pi$를 변화시켜가며 수치해석을 반복하였다. 이 때 f_2는 댐퍼의 개폐주파수로서 만약 $f_2=10$ Hz라면 댐퍼가 초당 10번씩 개폐됨을 의미한다.

Figure 5와 6은 각각 $f_2=9$ Hz일 때의 x와 θ의 주파수성분을 보이고 있다. x의 주파수성분은 6, 7.62, 10.38, 12, 24, 30 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각 $2f_2-f_1$, f_2-f_{nr}, f_2+f_{nr}, f_1, $4f_2-f_1$, $2f_2+f_1$에 해당한다. 이 때 $f_{nr}=\omega_{nr}/2\pi$은 회전모드의 고유진동수를 의미하며 주어진 매개변수에 대하여 1.40 Hz의 값을 갖는다. 이 성분 중 f_1 성분이 가장 우세하며 다음으로 $2f_2-f_1$ 성분이 강하였다. θ의 주파수성분은 1.38, 3, 15, 21, 33, 39 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각 f_{nr}, f_1-f_2, $3f_2-f_1$, f_1+f_2, $5f_2-f_1$, $3f_2+f_1$에 해당하며 이 중 f_{nr} 성분과 f_1-f_2 성분이 우세하였다.

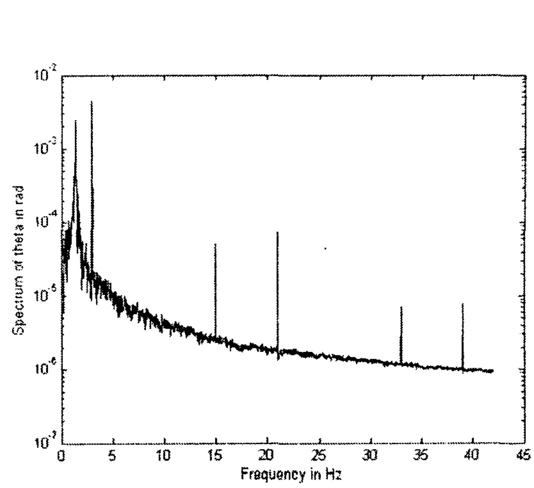

Figure 6 Frequency spectrum of the angular displacement of the plate.

f_2를 변화시켜가며 x와 θ의 주파수성분을 구하였을 때 앞에서 관찰한 현상은 변화하지 않았다. 특별한 경우로 f_1-f_2와 회전모드의 고유진동수 f_{nr}이 일치하는 경우 θ의 주파수성분은 Figure 7에서 보이는 것처럼 두 개의 피크가 합쳐져서 하나로 되고, 다른 주파수성분은 거의 나타나지 않았다. 즉 θ는 거의 한 주파수성분만을 갖는다.

f_2를 변화시켜가며 θ의 최대 주파수성분을 구하고, 이를 Figure 8에 나타내었다. 이 그림을 관찰하면 θ의 최대 주파수성분은 $f_2=10.6$ Hz 부근에서 급격히 증가하여 f_1-f_2가 회전모드의 고유진동수와 일치할 때 최대가 된다. 한편 f_2가 f_1과 같은 12 Hz에서는 θ의 진폭이 시간

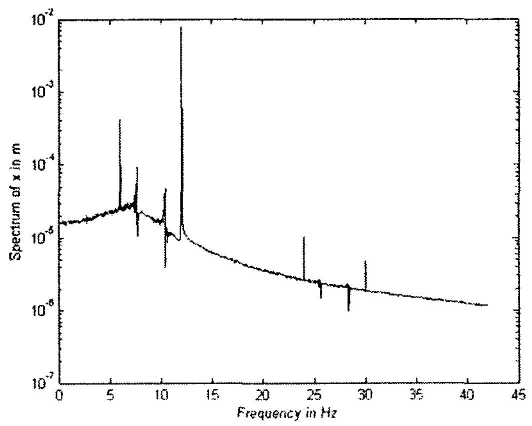

Figure 5 Frequency spectrum of the displacement at the center of the plate.

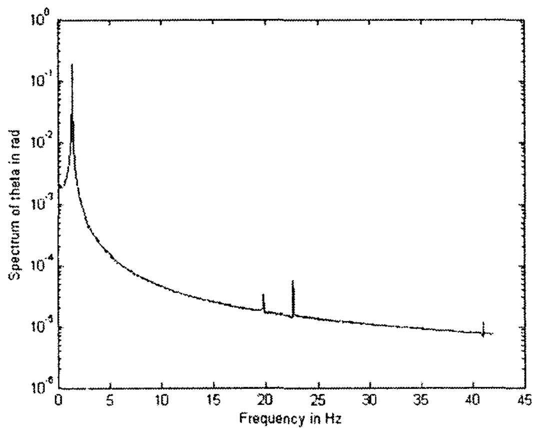

Figure 7 Frequency spectrum of the angular displacement when the difference frequency coincides with the natural frequency of the rotational mode.

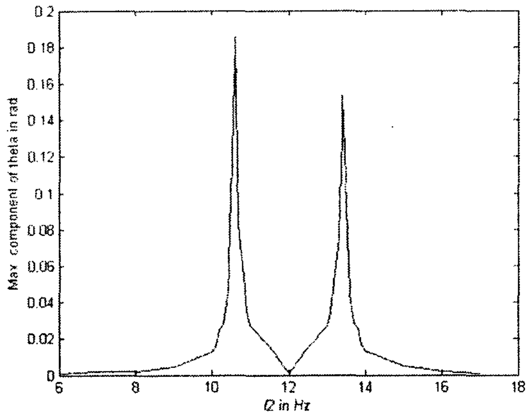

Figure 8 Variation of the maximum frequency component of the angular displacement with frequency f_2.

이 지남에 따라 점점 작아져 영에 수렴한다. 이로 말미암아 $f_2=12$ Hz에서 θ의 최대 주파수성분이 매우 작게 나타난다. 한편 f_2가 f_1보다 클 때에도 그 차가 회전모드의 고유진동수와 일치할 때에는 θ의 최대 주파수성분이 급격하게 증가하는 것을 알 수 있다.

3. 이론적 해석

이 절에서는 시뮬레이션에 의해서 밝혀진 x와 θ의 주요 주파수성분의 발생 원인을 이론적으로 규명하고자 한다. Figure 3에 보인 계의 운동방정식은 $k_1=k_2=k$, $r_1=-r_2=r$일 때 다음과 같다.

$$m\ddot{x}+(c_1+c_2)\dot{x}+(c_1-c_2)r\dot{\theta}+2kx=F_0\sin\omega_1 t \tag{4}$$

$$J\ddot{\theta}+(c_1-c_2)r\dot{x}+(c_1+c_2)r^2\dot{\theta}+2kr^2\theta=0 \tag{5}$$

그리고 c_1, c_2가 Figure 4와 같이 변화하며 그 최대값이 c이면 c_1+c_2는 c와 같고, c_1-c_2는 진폭 c의 사각파가 되므로 이를 Fourier 급수로 나타내면 위의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+cr\left(\frac{4}{\pi}\sin\omega_2 t+\frac{4}{3\pi}\sin 3\omega_2 t+\ldots\right)\dot{\theta}+2kx=F_0\sin\omega_1 t \tag{6}$$

$$J\ddot{\theta}+cr\left(\frac{4}{\pi}\sin\omega_2 t+\frac{4}{3\pi}\sin 3\omega_2 t+\ldots\right)\dot{x}+cr^2\dot{\theta}+2kr^2\theta=0 \tag{7}$$

이 계에서는 판에 $F_0\sin\omega_1 t$의 힘이 작용하므로 판 중심의 수직변위 x는 ω_1의 주파수성분을 가지리라는 것을 쉽게 예측할 수 있다. 따라서

$$x=a_1\sin\omega_1 t+b_1\cos\omega_1 t \tag{8}$$

라 놓고, 이 식을 식 (7)에 대입한 다음, 삼각함수 관계식

$$\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \tag{9}$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{10}$$

을 이용하면 식 (7)의 $\dot{x}$를 포함하는 항은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{\pi}\sin\omega_2 t+\frac{4}{3\pi}\sin 3\omega_2 t+\ldots\right)\dot{x}=&\frac{2}{\pi}a_1\omega_1[\sin(\omega_1+\omega_2)t-\sin(\omega_1-\omega_2)t]\\&-\frac{2}{\pi}b_1\omega_1[\cos(\omega_1-\omega_2)t-\cos(\omega_1+\omega_2)t]\\&+\frac{2}{3\pi}a_1\omega_1[\sin(3\omega_2+\omega_1)t+\sin(3\omega_2-\omega_1)t]\\&-\frac{2}{3\pi}b_1\omega_1[\cos(3\omega_2-\omega_1)t-\cos(3\omega_2+\omega_1)t]\\&+\ldots\end{aligned} \tag{11}$$

따라서 위 식의 $\omega_1-\omega_2$, $\omega_1+\omega_2$, $3\omega_2-\omega_1$, $3\omega_2+\omega_1$ 등의 성분을 상쇄하기 위하여 θ는 이들 성분을 가져야 한다.

위의 결과로부터

$$\begin{aligned}\theta=&c_1\sin(\omega_1+\omega_2)t+d_1\cos(\omega_1+\omega_2)t\\&+c_2\sin(\omega_1-\omega_2)t+d_2\cos(\omega_1-\omega_2)t+\ldots\end{aligned} \tag{12}$$

라 놓고, 이를 식 (6)에 대입하면 위에서와 같은 방법으로 ω_1, $\omega_1+2\omega_2$, $2\omega_2-\omega_1$, $\omega_1+4\omega_2$, $4\omega_2-\omega_1$ 등의 성분이 발생하므로 이를 상쇄하기 위하여 x는 이들 성분을 가져야 한다.

θ가 ω_{nr} 성분을 갖는다는 것이 확인되면 이를 식 (6)에 대입하여 위에서와 같은 방법으로 x가 $\omega_2-\omega_{nr}$, $\omega_2+\omega_{nr}$ 성분을 가짐을 증명할 수 있다. 식 (7)에서 $J\ddot{\theta}+2kr^2\theta=0$의 해가 ω_{nr} 성분이다. 만약 이 식에서 $\dot{x}$를 포함하는 항의 ω_{nr} 성분이 매우 작고, 또 $cr^2\dot{\theta}$항이 다른 항에 비하여 크기가 작다고 가정하면 ω_{nr} 성분은 θ의 한 성분이 될 수 있다. 실제로 앞 절에서 수행한 시뮬레이션에서 f_2 = 9 Hz일 때 $cr^2\dot{\theta}$항의 rms값은 모든 항들 중에서 가장 작았으며, 다른 항들의 rms값의 23% 이하이었다. 이상으로써 부족하기는 하지만 x와 θ의 주요 주파수성분의 발생 원인을 이론적으로 설명하였다.

4. 결론

본 논문에서는 판, 일정한 스프링상수를 갖는 스프링, 그리고 가변 댐퍼로 이루어진 시스템이 조화력을 받을 때의 거동을 해석하였다. 조화력의 주파수가 f_1이고, 가변 댐퍼의 변화 주파수가 f_2일 때, 판의 수직변위의 주파수성분은 f_1

성분이 가장 우세하며 그 크기는 f_2의 값에 무관하게 거의 일정하였다. 다음으로 $2f_2-f_1$ 성분이 강하였다. 판의 회전변위의 주파수성분은 회전모드의 고유진동수 성분과 f_1-f_2 성분이 우세하였다. 회전모드의 고유진동수와 f_1-f_2가 일치하면 회전변위는 이 주파수에서 큰 주파수성분을 갖고, 다른 주파수성분은 매우 미약하였다. 그리고 회전변위의 최대 주파수성분은 이 주파수에서 최대가 되어 판의 운동은 거의 한 주파수로 큰 폭으로 요동하는 운동이 된다.

또한 판의 수직변위와 회전변위의 주요 주파수성분의 발생 원인을 이론적으로 설명하였다.

후 기

본 연구는 산업자원부 지방기술혁신사업(RTI04-01-03) 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Bachmann, H., 1995, Vibration Problems in Structures - Practical Guidelines, Birkhauser Verlag, Basel.

(2) Stoessel, J. C., et al., 1987, "High Level Vibration Tests Using a 2-kiloton Eccentric Mass Vibrator," Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 166~171.

(3) Pietrzko, S. and Cantieni, R., 1996, "Modal Testing of a Steel/Concrete Composite Bridge with a Servo-hydraulic Shaker," Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 91~98.

(4) Koss, L. L., 1999, "Force Frequency Shifting for Structural Excitation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, pp. 223~237.

(5) Koss, L. L., 1996, "Fluctuating Moment Shaker for Frequency Shifting and Structural Excitation," Proceedings of the 3rd International Conference of Motion and Vibration Control, pp. 258~261.

(6) Koss, L. L, He, Y. Y. and Wang, X., 1997, "Bridge and Beam Response to Harmonic Spatial and Time Loads," Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 901~904.

(7) Lee, G.-M., Koss, L. L., Lee, J.-S., 2003, "Development of a Low Frequency Vibration Shaker Using Force Frequency Shifting," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 4, pp. 274~280.