

탄성지지된 곡선부재의 면내 자유진동 In-Plane Free Vibrations of Curved Members with Elastic Supports

오상진[†] · 강희종* · 박광규**

Sang Jin Oh, Hee Jong Kang and Kwang Kyou Park

Key Words: Curved Member(곡선부재), In-Plane Free Vibration(면내 자유진동), Elastic Support (탄성지지), Translational Spring(병진스프링), Rotational Spring(회전스프링)

ABSTRACT

This paper deals with the free, in-plane vibrations of curved members with the translational (radial and tangential directions) and rotational springs at the ends. The governing differential equations for the circular curved member are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest three natural frequencies and the corresponding mode shapes are obtained over a range of non-dimensional system parameters: the subtended angle, the slenderness ratio, the translational spring stiffness, and the rotational spring stiffness.

1. 서론

곡선부재는 많은 구조물에서 단위구조로 이용되고 있어 이의 정, 동적 거동에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 구조물의 고유한 성질 중의 하나인 자유진동 특성은 동적 하중이 작용하는 구조물의 응답 해석에서 매우 중요한 변수이며, 구조물의 설계과정 또는 공용 중인 구조물의 안정성 평가 등에도 중요한 평가지수로 이용되고 있다. 따라서 대상 구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 매우 중요한 연구과제라 할 수 있다.

곡선부재의 자유진동에 관한 연구들⁽¹⁻³⁾에서는 주로 이상적인 단부조건(고정, 회전)을 갖는 곡선부재를 대상으로 하고 있다. 그러나 실제 구조물에서 이와 같이 이상적인 단부조건을 실현하는 것은 어렵다. 따라서 일반적인 단부조건 즉 단부가 병진스프링 및 회전스프링을 갖는 구조부재의 거동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라고 할 수 있다.⁽⁴⁾

이에 본 연구에서는 일반적인 단부조건을 갖는 즉 곡률중심방향 스프링, 접선방향 스프링 및 회전스프링으로 지지된 곡선부재의 고유진동수 및 진동형을 산출하고자 한다. 곡선부재의 선형은 원호형을 택하고, 대응하는 단부조건을 적용하여 면내 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 수치해석한다. 해석결과로서 곡선부재의 체원 및 단부강성을 나타내는 여러 가지 체변수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형 변화를 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 양단이 탄성지지된 원호 곡선부재를 나타낸 것이다. 이 그림에서 α 와 a 는 각각 곡선부재의 중심각(subtended angle)과 반경을 의미하고, ϕ 는 부재축상 임의점의 위치를 나타내는 각도이다. 그리고 w 및 v 는 각각 부재축상 임의점 ϕ 에서의 곡률중심방향 변위와 접선방향 변위이며, ψ 는 단면회전각을 나타낸다. 또한 K_{ra} 와 K_{rb} 는 양단에서의 곡률중심 방향 스프링상수, K_{va} 와 K_{vb} 는 접선방향 스프링상수, $K_{\theta a}$ 와 $K_{\theta b}$ 는 회전스프링상수를 나타내고 있다.

Fig. 1에 보인 곡선부재가 면내에서 진동하게 되면 진동변위에 의하여 부재 단면에는 축방향력 N , 전단력 V 및 휨모멘트 M 의 단면력이 발생한다. 부재 단면에 발생하는 이들 단면력은 식 (1)~(3)에 쓰여진 바와 같이 진동변위의 함수로 표현할 수 있으며, 단면회전각은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N = EAa^{-1}(v' + w) + Ela^{-3}(w'' + w) \quad (1)$$

$$V = -Ela^{-3}(w''' + w'), \quad M = -Ela^{-2}(w'' + w) \quad (2, 3)$$

$$\psi = a^{-1}(w' - v) \quad (4)$$

위의 식들에서 $(\cdot) = d/d\phi$ 를 의미하며, E 는 부재재료의 탄성계수, A 와 I 는 각각 부재 단면의 단면적 및 단면2차모멘트이다.

진동시 부재 미소요소에 작용하는 단면력의 동적 평형방정식에 식 (1)~(3)의 단면력을 대입하고, 곡선부재가 조화진동을 한다고 가정하면 식 (5), (6)에 보인 바와 같이 원호형 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 얻을 수 있다.

[†] 남도대학 토목환경과
E-mail : sjoh@namdo.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679

* 청룡건설

** 대전대학교 토목공학과

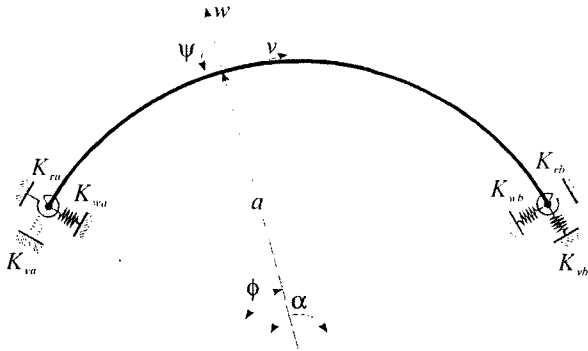


Fig. 1 Circular curved member with elastically constrained ends

$$\delta''' = -2\delta'' - (1 + s^2 - C_i^2)\delta - s^2\lambda' \quad (5)$$

$$\lambda'' = -\delta' - s^{-2}C_i^2\lambda \quad (6)$$

식 (5), (6)에서 사용된 무차원 변수의 내용은 식 (7)-(10)에 보인 바와 같다.

$$\delta = w/a, \quad \lambda = v/a, \quad s = a/\sqrt{I/A} \quad (7-9)$$

$$C_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho A / (EI)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

위의 식에서 s 는 세장비(slenderness ratio), C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), i 는 모드 번호이다. 그리고 ω_i 는 고유각진동수, ρ 는 부재 재료의 밀도이다.

Fig. 1에 보인 바와 같이 곡선부재의 단부는 곡률중심방향 스프링, 접선방향 스프링 및 회전스프링으로 지지되어 있다. 따라서 부재 좌단 ($\phi = 0$)에서의 전단력, 휨모멘트 및 축방향력은 각각 식 (11)~(13)과 같이 쓸 수 있다.

$$-EIa^{-3}(w'' + w') = -K_{wa}w \quad (11)$$

$$-EIa^{-2}(w'' + w) = K_{ra}a^{-1}(w' - v) \quad (12)$$

$$EAa^{-1}(v' + w) + EIa^{-3}(w'' + w) = -K_{va}v \quad (13)$$

식 (7)~(9)의 무차원 변수를 이용하여 위의 식을 다시 쓰면 부재 좌단 ($\phi = 0$)에서의 경계조건식은 식 (14)와 같이 표현된다.

$$\delta'' + \delta' - k_{wa}\delta = 0, \quad \delta'' + k_{ra}\delta' + \delta - k_{ra}\lambda = 0 \quad (14a, b)$$

$$\delta'' + (s^2 + 1)\delta + s^2\lambda' + k_{va}\lambda = 0 \quad (14c)$$

마찬가지 방법으로 우단 ($\phi = \alpha$)에서의 경계조건식을 구하면 식 (15)와 같다.

$$\delta'' + \delta' + k_{wb}\delta = 0, \quad \delta'' + k_{rb}\delta' + \delta + k_{rb}\lambda = 0 \quad (15a, b)$$

$$\delta'' + (s^2 + 1)\delta + s^2\lambda' - k_{vb}\lambda = 0 \quad (15c)$$

식 (14), (15)에서 $k_{wa}, k_{wb}, k_{va}, k_{vb}, k_{ra}, k_{rb}$ 는 무차원 스프링상수로서 그 내용은 식 (16)~(21)에

보인 바와 같다.

$$k_{wa} = K_{wa}a^3/(EI), \quad k_{wb} = K_{wb}a^3/(EI) \quad (16, 17)$$

$$k_{va} = K_{va}a^3/(EI), \quad k_{vb} = K_{vb}a^3/(EI) \quad (18, 19)$$

$$k_{ra} = K_{ra}a/(EI), \quad k_{rb} = K_{rb}a/(EI) \quad (20, 21)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (5)~(6)의 상미분방정식을 6개의 1계 연립 미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 식 (14)의 경계조건식을 이용하여 Runge-Kutta법으로 수치적분하였으며, 식 (15)의 경계조건식을 만족하는 고유치를 계산하였다. 대상구조의 무차원 고유진동수를 결정하기 위해서는 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하였다. 이 논문에서는 대상구조의 제변수 변화에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하여 그 결과를 Table 1~4와 Fig. 3, 4에 수록하였다.

Table 1은 Fig. 2(a)에 보여진 바와 같이 부재 좌단이 고정($k_{wa} = k_{va} = k_{ra} = 10^7$)인 경우 우단의 스프링상수($k_{wb} = k_{vb} = k_{rb}$)를 0에서 10^7 까지 변화시키며 해석한 결과이다. 여기서 $k_{wb} = k_{vb} = k_{rb} = 10^7$ 인 경우 고정-고정의 단부조건을 갖는 곡선부재를 의미하며, 본 연구에서 계산된 결과는 문헌 [1]의 결과와 잘 근접하였다. 또한 $k_{wb} = k_{vb} = k_{rb} = 0$ 이면 고정-자유의 곡선부재를 의미한다.

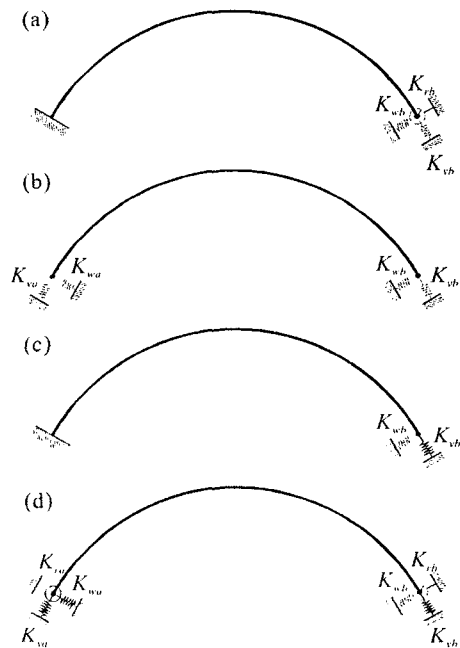


Fig. 2 Curved members considered in the results

Table 1 Frequency parameter for the member of Fig. 2(a)

α (deg)	s	$k_{wa} = k_{va}$ $= k_{ra}$	$k_{wb} = k_{vb}$ $= k_{rb}$	Frequency parameter			
				C_1	C_2	C_3	
60	50	10^7	0	3.278	17.94	53.01	
			0.1	3.432	18.11	53.21	
			10	6.986	23.20	60.94	
			100	14.25	29.11	66.01	
			1000	27.00	47.13	82.61	
			10 ⁷	45.14	53.52	110.5	
			100	10^7	0	3.278	17.99
	0.1	3.432			18.17	53.85	
	10	6.986			23.33	61.64	
	100	14.26			29.24	66.83	
	1000	28.18			47.41	83.91	
	10 ⁷	53.69			76.78	120.1	
	120	50			10^7	0	0.8761
			0.1	1.013		3.751	12.21
10			3.373	6.180		14.99	
100			8.155	10.69		19.26	
1000			11.58	19.73		29.08	
10 ⁷			11.82	22.72		42.51	
100			10^7	0		0.8762	3.663
		0.1		1.013	3.755	12.24	
		10		3.374	6.188	15.02	
		100		8.199	10.73	19.30	
		1000		11.61	20.66	30.14	
		10 ⁷		11.84	23.42	42.85	

Table 2 Frequency parameter for the member of Fig. 2(b)

α (deg)	s	$k_{wa} = k_{va}$ ¹⁾	$k_{wb} = k_{vb}$ ¹⁾	Frequency parameter					
				C_1	C_2	C_3			
60	50	0.1	0.1	0.5667	19.65	55.13			
			10	5.198	19.86	55.15			
			100	11.00	26.83	56.70			
			1000	26.23	34.98	76.12			
			10 ⁷	33.56	44.41	81.32			
			100	0.1	0.1	0.5667	19.65	55.14	
					10	5.199	19.86	55.16	
	100	11.04			26.84	56.71			
	1000	27.81			35.51	76.16			
	10 ⁷	33.61			69.87	101.9			
	120	50			0.1	0.1	0.3809	4.509	13.03
						10	2.852	6.026	13.32
			100	6.454		9.669	17.96		
			1000	6.915		17.06	27.18		
10 ⁷			6.920	17.31		33.65			
100			0.1	0.1		0.3809	4.509	13.03	
				10		2.854	6.027	13.33	
		100		6.466	9.725	17.97			
		1000		6.921	17.23	28.68			
		10 ⁷		6.925	17.45	33.75			

¹⁾ $k_{ra} = k_{rb} = 0$

Table 3 Frequency parameter for the member of Fig. 2(c)

α (deg)	s	$k_{wa} = k_{va}$ $= k_{ra}$	$k_{wb} = k_{vb}$ ¹⁾	Frequency parameter			
				C_1	C_2	C_3	
60	50	10^7	0	3.278	17.94	53.01	
			0.1	3.335	17.95	53.01	
			10	6.641	19.13	53.38	
			100	13.30	28.25	57.23	
			1000	25.06	40.68	81.86	
			10 ⁷	41.28	45.78	95.32	
			100	10^7	0	3.278	17.99
	0.1	3.335			18.00	53.65	
	10	6.641			19.18	54.03	
	100	13.32			28.33	57.88	
	1000	26.69			40.93	83.06	
	10 ⁷	42.84			74.65	108.7	
	120	50			10^7	0	0.8761
			0.1	0.9696		3.691	12.10
10			3.359	6.060		13.08	
100			7.949	9.587		19.19	
1000			9.121	18.61		28.09	
10 ⁷			9.190	20.04		37.82	
100			10^7	0		0.8762	3.663
		0.1		0.9696	3.694	12.14	
		10		3.360	6.065	13.11	
		100		7.972	9.657	19.23	
		1000		9.136	19.12	29.66	
		10 ⁷		9.205	20.38	38.12	

¹⁾ $k_{rb} = 0$

Table 4 Frequency parameter for the member of Fig. 2(d)

α (deg)	s	$k_{wa} = k_{va}$ $= k_{ra}$	$k_{wb} = k_{vb}$ $= k_{rb}$	Frequency parameter					
				C_1	C_2	C_3			
60	50	0.1	0.1	0.5112	19.64	55.13			
			10	10.31	37.05	87.07			
			100	15.64	36.14	80.10			
			1000	29.31	51.04	90.34			
			10 ⁷	45.14	53.52	110.5			
			100	0.1	0.1	0.5112	19.64	55.13	
					10	10.31	37.10	87.13	
	100	15.65			36.18	80.15			
	1000	30.69			51.18	90.40			
	10 ⁷	53.69			76.78	120.1			
	120	50			0.1	0.1	0.3492	4.502	13.02
						10	3.850	8.594	19.70
			100	8.399		11.94	21.30		
			1000	11.77		20.98	29.50		
10 ⁷			11.82	22.72		42.51			
100			0.1	0.1		0.3493	4.503	13.02	
				10		3.850	8.599	19.71	
		100		8.444	11.96	21.31			
		1000		11.80	21.86	30.53			
		10 ⁷		11.84	23.42	42.85			

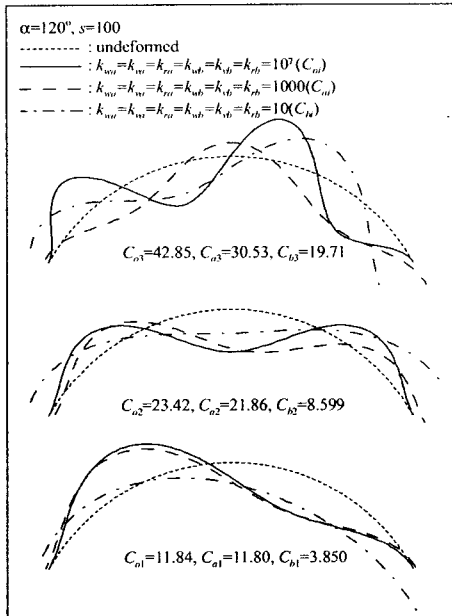


Fig. 3 Examples of mode shape for curved members with $k_{wa} = k_{va} = k_{ra} = k_{wb} = k_{vb} = k_{rb} = 10, 1000$ and 10^7

Table 2는 Fig. 2(b)에 보여진 바와 같이 부재 좌단과 우단의 스프링상수 ($k_{wa} = k_{va} = k_{wb} = k_{vb}$, $k_{ra} = k_{rb} = 0$)를 0.1에서 10^7 까지 변화시키면서 해석한 결과이다. 여기서 $k_{wa} = k_{va} = k_{wb} = k_{vb} = 10^7$ 인 경우 회전-회전의 단부조건을 갖는 곡선부재를 의미하며, 본 연구에서 산출된 결과는 문헌 [1]의 결과와 잘 근접하였다.

Table 3은 Fig. 2(c)에 보여진 바와 같이 부재 좌단이 고정 ($k_{wa} = k_{va} = k_{ra} = 10^7$)인 경우 우단의 스프링상수 ($k_{wb} = k_{vb}$, $k_{rb} = 0$)를 0에서 10^7 까지 변화시키면서 해석한 결과이다. 여기서 $k_{wb} = k_{vb} = 10^7$ 인 경우 고정-회전의 단부조건을 갖는 곡선부재를 의미한다. Table 4는 Fig. 2(d)에 보여진 바와 같이 부재 좌단의 스프링상수 ($k_{wa} = k_{va} = k_{ra}$)와 우단의 스프링상수 ($k_{wb} = k_{vb} = k_{rb}$)를 0.1에서 10^7 까지 변화시키면서 해석한 결과이다.

Fig. 3은 $\alpha = 120^\circ$, $s = 100$ 인 부재 단부의 스프링상수 ($k_{wa} = k_{va} = k_{ra} = k_{wb} = k_{vb} = k_{rb}$)가 10^7 , 1000 , 10 인 대상 부재의 무차원 고유진동수와 대응하는 진동형을 나타낸 것이다.

Fig. 4는 $\alpha = 120^\circ$, $s = 100$ 이고, 부재 단부의 스프링상수 ($k_{wa} = k_{va} = k_{wb} = k_{vb}$, $k_{ra} = k_{rb} = 0$)가 10^7 , 1000 , 10 인 대상 부재의 무차원 고유진동수와 대응하는 진동형을 나타낸 것이다.

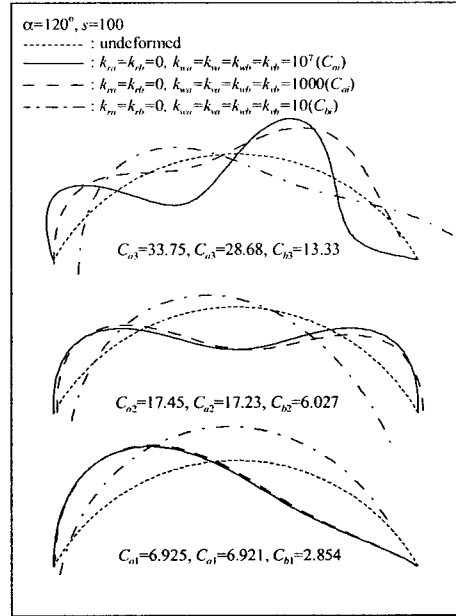


Fig. 4 Examples of mode shape for curved members with $k_{ra} = k_{rb} = 0$ and $k_{wa} = k_{va} = k_{wb} = k_{vb} = 10, 1000$ and 10^7

4. 요약

본 연구에서는 곡률중심방향 스프링, 접선방향 스프링 및 회전스프링으로 지지된 원호형 곡선부재의 면내 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 수치해석하여 대상 구조에 대한 최저차 3개의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다.

해석 예에서는 곡선부재의 제원을 표현하는 변수인 부재 중심각 및 세장비, 단부강성을 나타내는 곡률중심방향 및 접선방향 스프링상수와 회전스프링상수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형의 변화를 고찰하였다.

참고문헌

- (1) Wolf, Jr., J. A., 1971, "Natural Frequencies of Circular Arches," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, pp. 2337-2350.
- (2) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.
- (3) Öztürk, H., Yeşilyurt, İ. and Sabuncu, M., 2006, "In-Plane Stability Analysis of Non-Uniform Cross-Sectioned Curved Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 296, pp.277-291.
- (4) Li, W. L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.