

# 일정체적 양단고정 기둥의 동적 안정영역

## Dynamic Stability Regions of Columns with Constant Volume and Both Clamped Ends

이 병 구† · 이 태 은\* · 김 권 식\*\* · 이 승 우\*\*  
 Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee, Gwon Sik Kim, Seung Woo Lee

**Key Words :** natural frequency(고유진동수), both clamped column(양단고정 기둥), constant volume(일정체적), dynamic stability region(동적 안정영역)

### ABSTRACT

This paper deals with the dynamic stability analyses of columns with constant volume and both clamped ends. Numerical methods are developed for solving natural frequencies of such column, subjected to an axial compressive load. Differential equation governing free vibration of such column is derived. The numerical methods developed herein for computing natural frequencies are found to be efficient and robust. From the numerical results, the dynamic stability regions of such columns are obtained.

### 1. 서 론

기둥 문제에서 자유진동의 해석은 기둥의 동적 안정문제에서 매우 중요한 연구과제이다. 기둥에 동하중이 작용하는 경우에 기둥의 정확한 고유진동수 및 진동형의 산정은 기둥 설계 및 보수·보강에 매우 유용한 자료로 이용될 수 있다. (1) 이러한 관점에서 기둥의 자유진동해석은 구조공학에서 전통적으로 매우 중요한 연구 분야 중에 하나이다. 구조물의 고유진동수 및 진동형은 단면 및 변단면 형상 등이 매우 큰 영향을 미친다. 기둥의 적절한 단면 및 적절한 변단면의 채택은 최적설계의 개념에서 고유진동수를 증진시킬 수 있는 합리적인 방법이다. (2)

본 논문은 압축하중이 작용하는 일정체적 양단고정 기둥의 동적 안정영역을 해석하는데 연구목적이 있다. 기둥의 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 미분방정식의 수치해석을 위하여 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 고유진동수는 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 단면비, 정다각형의 변수 및 압축하중의 변화에 따른 고유진동수를 산출하고, 하중단계별 동적 안정영역을 산출하였다.

### 2. 대상기둥의 정의

Fig. 1은 직교좌표계  $(x, h)$  위에 있는 체적  $V$ 와 길이  $l$ 이 일정한 기둥을 나타낸다. 기둥의 양단은 고정지점으로 지지되어 있다. 기둥의 단면은 변수가  $k$ 인 정다각형이다. 여기서  $x$ 는 기둥의 축방향 좌표,  $h$ 는 단면깊이다. 기둥의  $x=0$ 에서  $h=h_a$ 이고  $x=l$ 에서  $h=h_b$ 이다. 기둥의 기하적 형상을 정의하기 위하여 단면비  $\alpha$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = h_b/h_a \tag{1}$$

단면깊이가  $h$ 이고 변수가  $k$ 인 정다각형 단면의  $A$  및  $I$ 는 다음과 같다.

$$A = c_1 h^2, I = c_2 h^4 \tag{2,3}$$

$$c_1 = k \sin(\pi/k) \cos(\pi/k) \tag{4.1}$$

$$c_2 = (k/12) \sin(\pi/k) \cos^3(\pi/k) [3 + \tan^2(\pi/k)] \tag{4.2}$$

본 연구에서는 단면깊이  $h$ 의 함수식으로 포물선 식을 채택하였다. Fig.1에서 함수식  $h$ 는 직교좌표계  $(x, h)$ 에서  $(0, h_a)$ ,  $(l, \alpha h_a)$ 를 통과하므로 포물선 식은 다음과 같이 결정된다.

$$h = h_a [c_3 (x/l)^2 + 1] \tag{5.1}$$

$$c_3 = \alpha - 1 \tag{5.2}$$

† 원광대학교 토목환경공학과 교수  
 E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr  
 Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204  
 \* 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수  
 \*\* 원광대학교 대학원

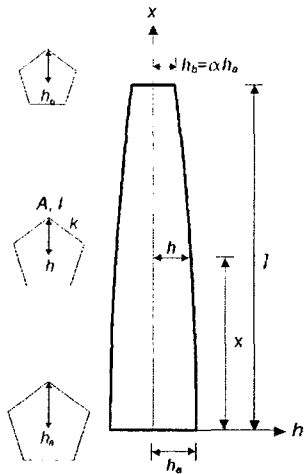


Fig. 1 Object column and its variables

위에서 정의된 기둥의 체적  $V$ 를 식 (2), 식 (5.1)을 이용하여 산정하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_4 h_a^2 l \quad (6.1)$$

$$c_4 = (3\alpha^2 + 4\alpha + 8)/15 \quad (6.2)$$

### 3. 지배미분방정식

#### 3.1 변수정의

Fig. 2는 압축하중  $P$ 를 받고 있는 직교좌표계  $(x, y)$  위의 대상기둥을 나타낸다. 기둥은 양단고정 지점으로 지지되어 있다. 점선은 정적 상태의 기둥축이고, 실선은 조화진동식  $\bar{y}(x, t) = y(x)\sin(\omega_i t)$ 의 자유진동을 하는 진동형을 나타낸다. 여기서  $y(x)$ 는 자유진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이고,  $\omega_i$ 는 고유진동수,  $i(=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드 번호이고  $t$ 는 시간이다.

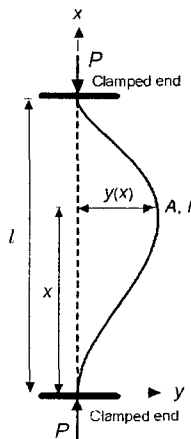


Fig. 2 Typical mode shape

#### 3.2 지배미분방정식

조화진동식으로 표현되는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다.(3)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + 2EI \frac{dI}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + (E \frac{d^2 I}{dx^2} + P) \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho A \omega_i^2 y = 0 \quad (8)$$

위 식에서  $y = y(x)$ 이고  $\rho$ 는 질량밀도이다.

식 (6.1)로부터 고정단의 단면값이  $h_a$ 를 일정체적  $V$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_a = \left( \frac{V}{c_1 c_4 l} \right)^{1/2} \quad (9)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l, \eta = y/l \quad (10,11)$$

$$p = Pl^4/(EV^2) \quad (12)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho l/(EV)} \quad (13)$$

위에서  $(\xi, \eta)$ 는 직교좌표계  $(x, y)$ 를 기둥길이  $l$ 로 정규화한 무차원량이고,  $p$ 는 무차원 하중,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

식 (8)에 위의 관련 식들을 대입하고 무차원 변수식 (10) ~ (13)을 이용하면 일정체적 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 p) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + a_4 C_i \eta \quad (14)$$

위 식에서  $a_1 \sim a_4$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -16c_3 \xi / j \quad (15.1)$$

$$a_2 = -48c_3^2 \xi^2 / j^2 - 8c_3 / j \quad (15.2)$$

$$a_3 = -c_1^2 c_4^2 / (c_2 j^4), \quad a_4 = c_1^2 c_4 / (c_2 j^2) \quad (15.3, 15.4)$$

$$j = c_3 \xi^2 + 1 \quad (15.5)$$

#### 3.3 경계조건

기둥의 고정단  $x=0$  및  $x=l$ 에서 변위  $y=0$ , 회전각  $dy/dx=0$ 이다. 식 (10), (11)을 이용하면 고정단  $\xi=0$  및  $\xi=1$ 에서 무차원경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (16)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi = 0 \text{ 및 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (17)$$

4. 수치해석 예 및 토의

위에서 유도한 미분방정식을 수치해석하여 고유치  $C_1$  및 진동형  $(\xi, \eta)$ 를 산출하였다.  $(\xi, \eta)$ 를 산출하기 위하여 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법(4)을 이용하였고  $C_1$ 의 산출은 Regula-Falsi법(4)을 이용하였다.

Fig. 3은 축하중이 작용하지 않는 경우( $p=0$ )에 단면비  $\alpha$ 와 제1무차원 고유진동수  $C_1$  ( $i=1$ ) 사이의 관계를 변수  $k$ 별로 나타낸 그림이다.  $C_1$  값은  $k$  값이 작을수록 크다.  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하며  $\circ$ 에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\circ$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면의 최적단면비  $\alpha_{opt}$  및 최적고유진동수  $C_{opt}$ 이다. 여기서 동적 최적단면은 일정체적을 갖는 기둥에서 가장 큰  $C_1$  값을 갖는 기둥으로 정의한다.  $\alpha_{opt}$ 는  $k$  값에 상관없이  $\alpha_{opt} = 2.516$ 로 모두 일정하다. 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $C_{opt} = 7.362$ 이고 원형 단면 기둥의  $C_{opt} = 6.695$ 이며 그 비율이  $7.362/6.695 = 1.10$ 으로 원형 단면 기둥 보다 정삼각형 단면 기둥이 10% 더 크다.

Fig. 4는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 하중단계별 ( $p=0.0, 0.5, 1.0, \dots, 3.802$ )  $\alpha - C_1$  곡선을 나타낸다. 하중  $p$ 의 크기가 클수록  $\alpha - C_1$  곡선은 아래쪽에 위치한다. 즉,  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다.  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하다  $\circ$ 에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\circ$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면 기둥의  $\alpha_{opt}$  및  $C_{opt}$ 이다. 예로서  $p=1.5$ 일 때  $\alpha_{opt} = 1.292, C_{opt} = 5.540$ 이며  $C_1$  값은 5.540 이상 존재할 수 없다. 각각의 하중단계별  $\alpha - C_1$  곡선은  $\alpha$  값의 일정 범위에서 존재한다.  $p=1.5$ 일 때  $\alpha - C_1$  곡선은  $\Delta$ 로 표시한  $\alpha_{min} = 0.280$ 과  $\square$ 로 표시한  $\alpha_{max} = 3.157$ 사이의  $\alpha$  값

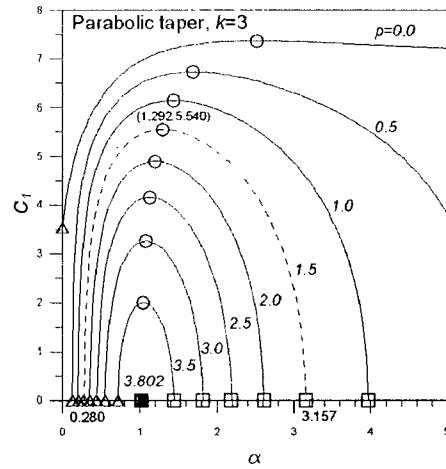


Fig. 4  $\alpha$  versus  $C_1$  curves by load step

에서만 존재한다. 이 범위 밖의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 불안정하고 이 범위 안의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 안정하다. 따라서  $p=1.5$ 의 하중을 받는 기둥의 동적 안정 영역은  $0.280 < \alpha < 3.157$ 이다.  $p$ 가 증가하여  $p=3.802$ 이 되면  $\Delta, \square, \circ$ 는  $\blacksquare$ 으로 표시한  $(\alpha_{opt} = 1.028, C_{opt} = 0)$ 의 한 점에서 만난다.

Table 1에  $k=3$ , 원형 단면 기둥의 동적 안정영역 및 최적단면 기둥의  $(\alpha_{opt}, C_{opt})$ 를  $p$ 별로 수록하였다. 이 표는 동하중이 작용하는 기둥설계에 매우 유용하게 이용될 수 있다.

Fig. 5는  $\alpha=0.5$ 의  $p - C_1$  곡선을 나타낸다.  $k$  값이 작을수록  $C_1$  값은 더 크고,  $p - C_1$  곡선은  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다.  $C_1=0$ 가 되는  $\square$ 로 표시된  $p$  축의  $p$  값이 무차원 좌굴하중  $b = Bl^4/(EV^2)$ 가 된다. 여기서  $B$ 는 좌굴하중이다. 이 그림에  $k$  별  $b$  값을 표시하였다. 예로서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $b = 2.762$ 이며  $p = 2.762$

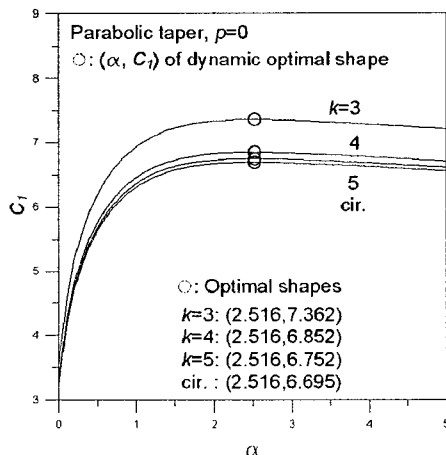


Fig. 3  $\alpha$  versus  $C_1$  curves by  $k$

Table 1. Stability region and  $(\alpha_{opt}, C_{opt})$  by load step

• Regular triangular cross-section ( $k=3$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\Delta)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	7.362
0.5	0.129	-	1.690	6.726
1.0	0.206	3.970	1.435	6.142
1.5	0.280	3.157	1.292	5.540
2.0	0.358	2.608	1.198	4.889
2.5	0.441	2.183	1.131	4.150
3.0	0.556	1.814	1.082	3.257
3.5	0.721	1.442	1.046	2.000
3.7	0.841	1.249	1.033	1.163
3.802	1.028	1.028	1.028	0.000

• Circular cross-section( $k = \infty$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\wedge)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	2.516	6.695
0.5	0.147	-	1.620	6.005
1.0	0.238	3.581	1.367	5.360
1.5	0.329	2.793	1.229	4.674
2.0	0.431	2.247	1.141	3.891
2.5	0.562	1.798	1.081	2.919
2.8	0.674	1.533	1.053	2.135
3.0	0.788	1.327	1.038	1.383
3.1	0.890	1.184	1.031	0.767
3.144	1.028	1.028	1.028	0.000

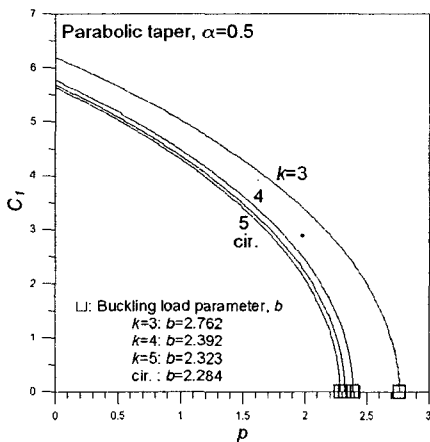


Fig. 5  $p$  versus  $C_1$  curves by  $k$

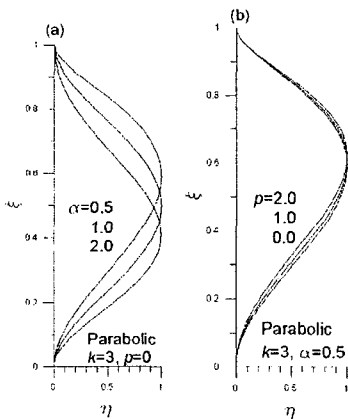


Fig. 6 Mode shapes :(a) by  $\alpha$  and (b) by  $p$

이상의 하중을 지지할 수 없다. 마찬가지로  $k$  값이 작을수록  $b$  값은 더 크고  $k$  값이 작을수록 압축하중에 대하여 더 강인하다.

Fig. 6(a), (b)는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 진동형을 나타낸다. 이 진동형으로부터 단면비  $\alpha$ , 하중  $p$ 의 크기에 따라서 최대진폭의 위치가 달라지는 것을 알 수 있다. 진동형의 변화는  $p$ 의 변화보다는  $\alpha$ 의 변화에 더 민감한 것을 알 수 있다.

5. 결론

이 논문은 일정체적 양단고정 기둥의 동적 안정해석에 관한 연구이다. 대상기둥은 체적과 길이가 일정하고 단면이 정다각형이며, 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 변단면으로 채택하였다. 이러한 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다.

유도된 미분방정식의 고유치인 고유진동수를 얻기 위하여 Runge-Kutta법을 사용하여 미분방정식을 수치적분하였고, 미분방정식의 고유치인 고유진동수는 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 수치해석의 결과로 기둥의 무차원 변수가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하고, 기둥의 동적 안정영역을 산출하였다.

참고문헌

- (1) 이병구, 오상진, 이태은, 강희중, 2005, "자유단 집중 질량 및 스프링을 갖는 변단면 Beck 기둥의 안정해석," 대한토목학회 논문집, 제25권, 제6A호, pp.1157~1162.
- (2) Haftka, R.T., Grudal, Z. and Kamat, M.P., 1990, Element of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher.
- (3) Lee, B.K. and Oh, S.J., 2000, "Elasticas and Buckling Loads of Simple Tapered Columns with Constant Volume," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 2507~2518.
- (4) Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., 1969, Applied Numerical Method. John Wiley & Sons, USA.