

# 비보존력이 작용하는 불연속 변단면 기둥의 안정성 Stability of Stepped Columns Subjected to Nonconservative Force

오상진<sup>†</sup> · 모정만\* · 이재영\*\*

Sang Jin Oh, Jeong Man Mo and Jae Young Lee

**Key Words :** Stepped Column(불연속 변단면 기둥), Nonconservative Force(비보존력), Critical Load(임계하중)

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the stability of stepped cantilever columns with a tip mass of rotatory inertia and a translational spring at one end. The column model is based on the Bernoulli-Euler theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing differential equation for the free vibration of columns with stepwise variable cross-section and subjected to a subtangential follower force is solved numerically using the corresponding boundary conditions. And the bisection method is used to calculate the critical divergence/flutter load. The frequency and critical divergence/flutter load for the stepped column with a single step are presented as functions of various non-dimensional system parameters: the segmental length parameter, the section ratio, the subtangential parameter, the mass, the moment of inertia of the mass, and the spring parameter.

## 1. 서론

기둥은 구조물을 이루는 기본 요소이어서 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정성에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로 모형화하였으며, 기둥에 작용하는 축하중으로 보존력(conservative force) 또는 비보존력(nonconservative force)을 고려하였다. 비보존력을 받는 구조물의 안정에 관한 문제는 현대 공학문제에서 특히 중요하게 다루어지고 있다. 예를 들어 비행체의 날개 또는 몸체에 작용하는 공기력(aerodynamic force), 전동기의 회전자(rotor)에 작용하는 힘은 비보존력이며, 자동제어가 이루어지는 많은 구조계는 비보존력계를 형성하고 있다.<sup>(1-4)</sup>

비보존력이 subtangential follower force를 받는 기둥에서는 subtangential parameter의 크기에 따라 divergence형 또는 flutter형 임계하중을 나타낸다. 이와 같은 비보존력을 받는 기둥의 안정해석을 위해서는 관성효과가 고려된 동적개념(dynamic concept)에 의한 해석이 수행되어야 한다.

이 논문에서는 일단은 고정, 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 캔틸레버형 불연속 변단면 기둥에 follower force가 작용하는 경우 여러 가지 제변수 변화에 따른 임계하중과 고유진동수의 변화를 고찰하는데 연구목적이 있다.

## 2. 수학적 모형

Fig. 1은 하단이 고정, 상단은 집중질량과 스프링을 갖는 1개의 불연속면(2개 구간)을 갖는 변단면 기둥에 subtangential follower force가 작용하는 경우 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $l$ 은 기둥의 지간길이,  $l_1$ 과  $l_2$ 는 각각 제 1, 2 구간의 길이를 나타낸다.  $(d_1, A_1, I_1)$ 과  $(d_2, A_2, I_2)$ 는 각각 제 1구간 ( $0 \leq x \leq l_1$ )과 제 2구간 ( $l_1 \leq x \leq l$ )을 이루는 단면의 단면제원(폭과 높이), 단면적, 단면 2차모멘트이다.  $M$ 과  $J$ 는 각각 집중질량의 크기 및 질량관성모멘트,  $K_s$ 는 스프링 상수이다. 그리고  $\phi$ 는 기둥 상단에서의 단면회전각,  $\gamma$ 는 subtangential parameter,  $w_x$ 는 진폭이다.

각 구간의 구간길이비와 단면비를 각각 식 (1), (2)와 같이 표현한다.

$$\alpha_1 = l_1/l, \quad \beta_1 = d_1/d_1 \tag{1, 2}$$

따라서  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 이며,  $\beta_1 = 1$ 이다.

Bernoulli-Euler이론을 적용하면, 축하중을 받는 불연속 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분 방정식은 식 (3)과 같다.

$$EI_i \frac{d^4 w_x}{dx^4} + P \frac{d^2 w_x}{dx^2} + \rho A_i \omega_k^2 w_x = 0 \tag{3}$$

여기서  $\omega_k$ 는 고유각진동수,  $k$ 는 모드번호이다.

불연속 변단면 기둥의 단면형상이 정사각형 단면인 경우 즉 정방형 변단면인 경우 단면적 및 단면 2차모멘트는 식 (4), (5)에 나타낸 바와 같이 단면비  $\beta_i$ 의 함수로 표현된다.

<sup>†</sup> 남도대학 토목환경과

E-mail : sjoh@namdo.ac.kr

Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679

\* 전주농림고등학교 농업토목과

\*\* 호원대학교 토목공학과

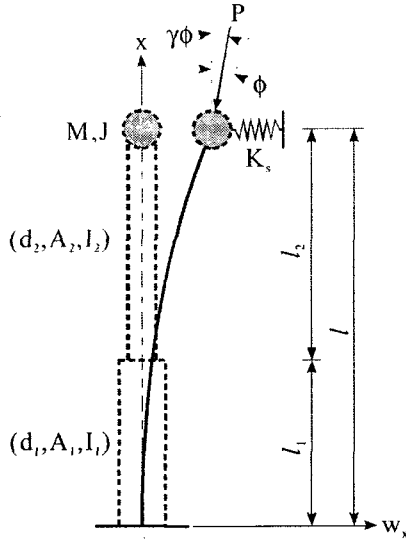


Fig. 1 The structural system considered in this paper

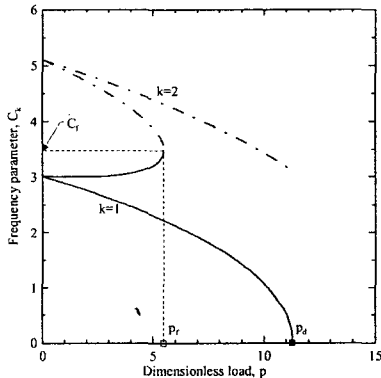


Fig. 2 Example of  $p-C_k$  curve

$$A_i = A_i \beta_i^2, \quad I_i = I_i \beta_i^4 \quad (4, 5)$$

식 (4), (5)를 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음 식과 같다.

$$\eta'''' = -\beta_i^{-4} p \eta'' + \beta_i^{-2} C_k^2 \eta \quad (6)$$

식 (6)에서  $(\cdot) = d/d\xi$ 이며, 이 식에서 사용된 무차원 변수의 내용은 다음과 같다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l, \quad p = Pl^2/(EI_1) \quad (7-9)$$

$$C_k = \omega_k l^2 \sqrt{\rho A_i / (EI_i)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

기둥 하단 ( $x=0$ )에서는 진동변위 및 단면회전이 발생하지 않으며, 기둥 상단 ( $x=l$ )에서는  $EI_2 d^2 w_x / dx^2 = \omega_k^2 J dw_x / dx$ ,  $EI_2 d^3 w_x / dx^3 = -P(1-\gamma) dw_x / dx + (K_s - \omega_k^2 M) w_x$ 이다. 식 (7)-(10)의 무차원 변수를 이용하여 기둥 하단과 상단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (11) 및 (12)와 같다.

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0 \quad (11a, b)$$

$$\eta'' - \beta_2^{-4} j \theta C_k^2 \eta' = 0 \quad (12a)$$

$$\eta''' + \beta_2^{-4} p(1-\gamma)\eta' - \beta_2^{-4} (k_s - \mu \theta C_k^2) \eta = 0 \quad (12b)$$

식 (12)에서  $k_s$ 는 무차원 스프링상수로서 식 (13),  $\mu$ 와  $j$ 는 각각 기둥 상단의 집중질량과 기둥 전체질량의 비(mass ratio) 및 무차원화한 질량 관성모멘트(dimensionless mass moment of inertia)로서 식 (14), (15)와 같다. 그리고  $\theta$ 는 불연속 변단면 기둥을 동일지간의 등단면 기둥으로 변환한 경우 기둥 단면의 단면적  $A_m$ 과 하단의 단면적  $A_1$ 의 비로서 식 (16)과 같다.

$$k_s = K_s l^3 / (EI_1), \quad \mu = M / (\rho A_m l) \quad (13, 14)$$

$$j = J / (\rho A_m l^3), \quad \theta = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i^2 \quad (15, 16)$$

불연속면 ( $x=l_1$ )에서의 연속조건은  $EI_1 d^2 w_x / dx^2 = EI_2 d^2 w_x / dx^2$ 과  $EI_1 d^3 w_x / dx^3 = EI_2 d^3 w_x / dx^3$ 이므로 이를 무차원 변수를 이용하여 표현하면 식 (17)과 같다.

$$\eta''_{(\xi=\alpha_1)} \text{ for segment 1} = \beta_2^4 \eta''_{(\xi=\alpha_1)} \text{ for segment 2} \quad (17a)$$

$$\eta'''_{(\xi=\alpha_1)} \text{ for segment 1} = \beta_2^4 \eta'''_{(\xi=\alpha_1)} \text{ for segment 2} \quad (17b)$$

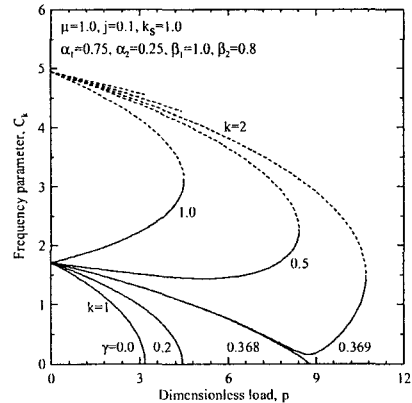


Fig. 3  $p-C_k$  curves ( $k_s = 1$ )

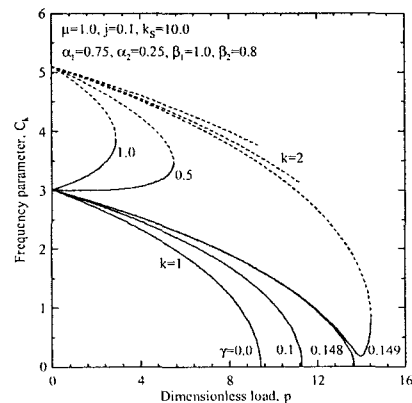


Fig. 4  $p-C_k$  curves ( $k_s = 10$ )

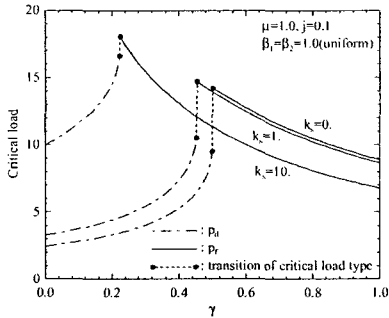


Fig. 5 Critical divergence and flutter loads versus the subtangential parameter (uniform)

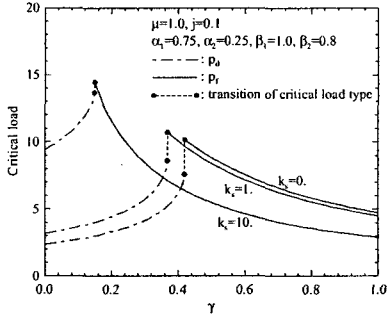


Fig. 6 Critical divergence and flutter loads versus the subtangential parameter ( $\alpha_1=0.75$ ,  $\beta_2=0.8$ )

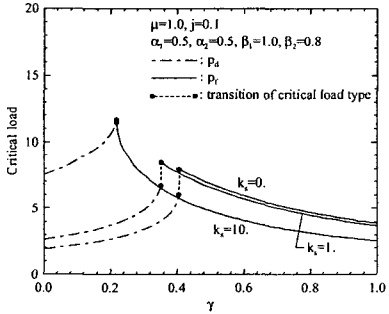


Fig. 7 Critical divergence and flutter loads versus the subtangential parameter ( $\alpha_1=0.5$ ,  $\beta_2=0.8$ )

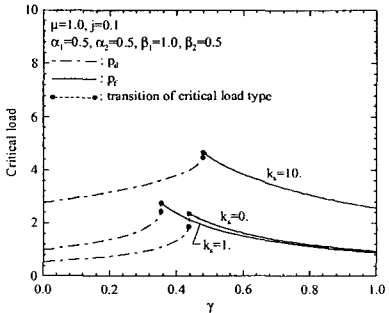


Fig. 8 Critical divergence and flutter loads versus the subtangential parameter ( $\alpha_1=0.5$ ,  $\beta_2=0.5$ )

### 3. 수치해석 예 및 고찰

Fig. 2는 축하중을 받는 기둥의 전형적인 하중-고유진동수 관계와 두 가지 임계하중의 형태를 나타낸 것이다. 이 그림에서 축하중이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하다가 제 1고유진동수가

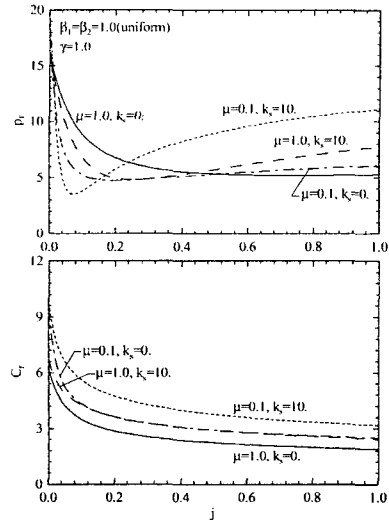


Fig. 9 Critical flutter loads and flutter frequency versus the dimensionless mass moment of inertia (uniform)

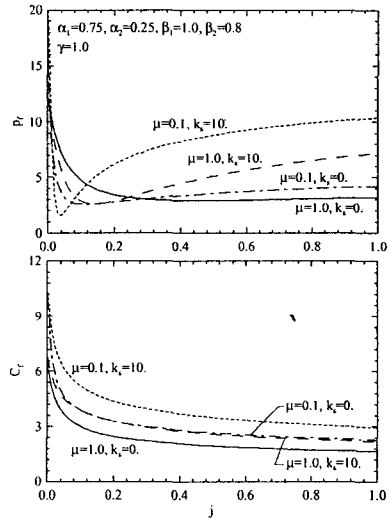


Fig. 10 Critical flutter loads and flutter frequency versus the dimensionless mass moment of inertia ( $\alpha_1=0.75$ ,  $\beta_2=0.8$ )

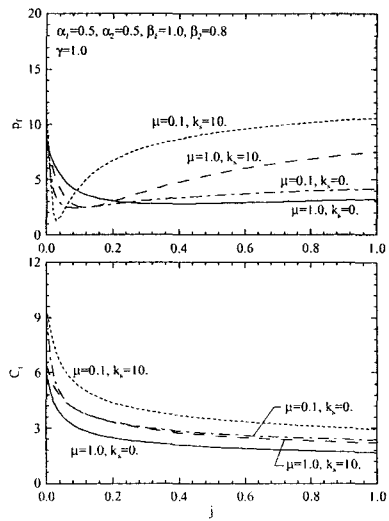


Fig. 11 Critical flutter loads and flutter frequency versus the dimensionless mass moment of inertia ( $\alpha_1=0.5$ ,  $\beta_2=0.8$ )

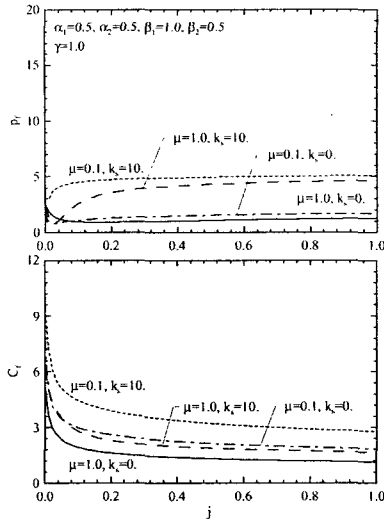


Fig. 12 Critical flutter loads and flutter frequency versus the dimensionless mass moment of inertia ( $\alpha_1=0.5, \beta_2=0.5$ )

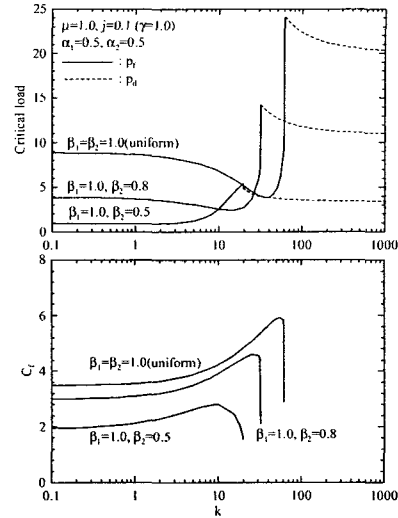


Fig. 14 Critical load and flutter frequency versus the spring parameter ( $\alpha_1=0.5$ )

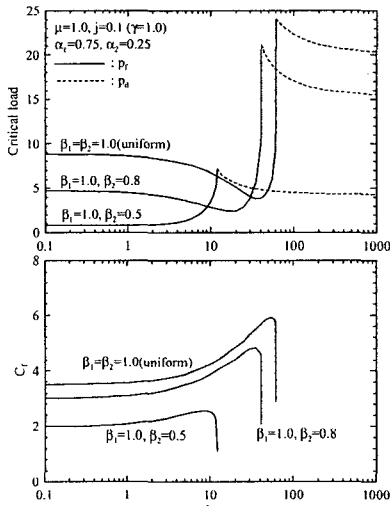


Fig. 13 Critical load and flutter frequency versus the spring parameter ( $\alpha_1=0.75$ )

“0”이 되는 하중은 divergence형 임계하중  $p_d$ 이다. 또한 이 그림의 다른 곡선에서  $C_1=C_2$  인 지점의 하중은 flutter형 임계하중  $p_f$ 이다. 본 연구에서는 문헌 [5]에 수록된 수치해석방법으로 식 (11), (12)의 경계조건 및 식 (17)의 연속조건을 이용하여 식 (6)의 미분방정식으로부터 하중단계별 대상기둥의 최저차 2개의 무차원 고유진동수를 산출하였으며, 이러한 과정에서 반분법을 이용하여 최저차 임계하중을 결정하였다. 본 연구에서는  $C_1 \leq 0.01$ 인 축하중을 divergence형 임계하중  $p_d$ 로 결정하였고,  $C_2 - C_1 \leq 0.1$ 인 축하중을 flutter형 임계하중  $p_f$ , 그리고 이때  $(C_1 + C_2)/2$ 를 flutter 고유진동수  $C_f$ 로 결정하였다.

Fig. 5~8은 subtangential parameter  $\gamma$ 의 변화에 따른 임계하중을 산출한 결과이며, Fig. 9-12는 무차원 질량관성모멘트  $j$ 의 변화에 따른 flutter 임계하중과 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 또한 Fig. 13, 14는 무차원 스프링상수  $k_s$ 의 변화에 따른 flutter 임계하중과 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다.

#### 4. 요약

이 논문에서는 일단은 고정, 타단은 집중질량과 스프링을 갖는 1개 불연속면 즉 2개의 구간을 갖는 불연속 변단면 기둥의 임계하중과 고유진동수를 산출하였다. 해석결과로서 구간비, 단면비, subtangential parameter, 질량비, 무차원 질량관성모멘트 및 무차원 스프링상수에 따른 임계하중 및 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

#### 참고문헌

- (1) Bolotin, V. V., 1963, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press.
- (2) Leipholz, H., 1987, Stability Theory, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons Ltd.
- (3) Koiter, W. T., 1996, "Unrealistic Follower Forces," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, pp.636-638.
- (4) Sugiyama, Y., Langthjem, M. A. and Ryu, B. J., 1999, "Realistic Follower Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, pp.779-782.
- (5) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.