

비선형 외팔보의 일대일 공진에서의 위상변화

Phase Change for One to One Resonance of Nonlinear Cantilever Beam

김명구[†] · 박철희* · 조종두* · 조호준*

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chongdu Cho and Hojoon Cho

Key Words : Base harmonic excitation(기초조화가진), One to One Resonance(일대일 공진), Nonlinear Cantilever Beam(비선형 외팔보), Phase Change(위상변화), Lissajous(리셔쥬)

ABSTRACT

The cantilever beam with nonlinearity has many dynamic characteristics of nonlinear vibration. Nonlinear terms of a flexible cantilever beam include inertia, spring, damping, and warping. When the beam is given basic harmonic excitation, it shows planar and nonplanar vibrations due to one-to-one resonance. And when the one-to-one resonance occurs, the flexible beam shows different behaviors in those vibrations. For the one-to-one resonance occurring in each mode, the phase value of the planar vibration is different from that of the nonlinear vibration. This paper investigates the phase change and the phase difference between such planar and nonplanar vibrations which are caused by one-to-one resonance.

1. 서론

가늘고 긴 외팔보는 비선형적인 특성을 갖고 있어서 외력이 작용하면 매우 복잡한 비선형 응답 특성을 보인다. 이러한 현상은 헬리콥터의 회전날개 우주비행선의 안테나, 유연성을 가진 거대한 우주구조물, 그리고 그 외의 여러 시스템에서 비선형 응답특성이 나타나고 있다. 선형화 된 외팔보의 응답특성은 두 개의 주 평면 운동이 서로 독립적으로 나타나고 있다. 따라서 한쪽의 주 평면의 강제운동은 항상 그 평면에서 항상 안정된 운동을 한다. 그러나 강제진동으로 외팔보의 진폭이 매우 커지게 되면, 외팔보의 동적 특성에 영향을 주는 전단변형, 뒤틀림, 회전관성 중력 등의 요소들이 중요해지며, 그러므로 이 요소들의 영향으로 여러 가지 비선형 현상들이 나타난다. 외팔보의

운동에 영향을 주는 모든 효과를 포함하는 비선형 운동방정식을 유도하는 것은 이론적으로 거의 불가능하다. 이전의 논문에서는 종종 특정효과가 특정한 형태의 응답특성을 보인다고 소개되고 있으며, 그 외 다른 여러 가지 비선형 효과들은 연구자들의 판단에 의해 임의적으로 무시되었다.

길고 얇은 비선형 외팔보는 비선형 진동 시 관성항(inertia), 스프링항, 감쇠항, 중력항, 휨항(warping term) 등의 비선형성을 포함하고 있다. 외부 가진력이 작은 경우 외팔보는 선형운동을 하지만 외부 가진력이 점점 커지면 외팔보가 포함하고 있는 비선형성을 갖는 요소들에 의해서 선형운동이 비선형운동으로 운동특성이 변환된다. 따라서 비선형 계에서만 나타나는 현상인 차수조화진동(superharmonic), 분수조화진동(subharmonic), 차수-분수조화진동(super-subharmonic), 준 주기운동(quasi-periodic)현상 도약현상, 위상변화 등이 나타나고 있다. 위 현상들을 분석함으로써 계가 갖고 있는 비선형 요소들의 특성을 분석하고, 동역학적으로 왜 이와 같은 현상을 갖는가에 대한 연구가 필요하다. 길고 얇은 유연한 원형 외팔보를 사용하여 이론적, 실험적인 방법으로 접근을

[†] 인하대학교 기계공학과

E-mail: mgkim21@hotmail.com

TEL: (032) 860-7321 FAX: (032) 868-1716

* 인하대학교 기계공학과

하였다. 유연한 원형 외팔보를 기초조화가진(base harmonic excitation)을 시켜서 외팔보가 선형진동에서 비선형 진동으로 전환해가는 과정에서 위상변화와 위상차에 대하여 이론적 실험적으로 분석하였다. (1), (11), (3)

2. 일대일 공진에서 외팔보의 비선형 현상

외팔보의 강제진동을 이론적으로 분석하기 위하여 Crespo da Silva and Glynn 이 유도한 미분-적분방정식을 사용하였다. 모든 변수는 보의 길이 L 과 특정시간 $L^2\sqrt{m/D_\eta}$ 을 이용하여 무차원화 시킨다. 무차원화 된 보의 운동방정식은 다음과 같다. (7)

$$\ddot{v} + c\dot{v} + \beta_y v'' = (1 - \beta_y) \left[\dot{w} \int \dot{v} \dot{w} ds - \dot{w} \int \dot{v} \dot{w} ds \right] - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \left[\dot{w} \int \int \dot{v} \dot{w} ds ds \right] - \beta_y \left[\dot{v} (\dot{v} \dot{v} + \dot{w} \dot{w}) \right] - \frac{1}{2} \left\{ \dot{v} \int \int \left[\int (v^2 + w^2) ds \right] ds \right\} + [\dot{v}(s-1) + \dot{v}] \frac{L}{D_\eta} mg \quad (1a)$$

$$\ddot{w} + c\dot{w} + w'' = -(1 - \beta_y) \left[\dot{v} \int \dot{v} \dot{w} ds - \dot{v} \int \dot{w} \dot{v} ds \right] - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \left[\dot{v} \int \int \dot{v} \dot{w} ds ds \right] - \left[\dot{w} (\dot{w} \dot{w} + \dot{v} \dot{v}) \right] - \frac{1}{2} \left\{ \dot{w} \int \int \left[\int (v^2 + w^2) ds \right] ds \right\} + [\dot{w}(s-1) + \dot{w}] \frac{L}{D_\eta} mg \quad (1b)$$

$$+ F\Omega^2 \cos(\Omega t) + cF\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

외팔보의 경계조건은 다음과 같다.

$$v = w = \dot{v} = \dot{w} = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \quad (2a)$$

$$\dot{v} = \dot{w} = \ddot{v} = \ddot{w} = 0 \quad \text{at} \quad s = 1. \quad (2b)$$

방정식(1a) 와 (1b)에서 첫 번째와 두 번째의 []안의 항들은 비틀림과 축 방향 진동의 연성관계를 나타낸다. 세 번째 [] 안에 있는 두 번째 항은 y 방향의 축 방향 진동과 x 방향의 축 방향 진동의 연성관계를 보여주고 있다. { }안의 항은 비선형 관성항이고 마지막 [] 안의 항은 중력항

과 비선형성의 제약조건을 나타낸다. $F\Omega^2 \cos \Omega t$ 는 기초부의 가진력과 가진 주파수이다. 모든 비선형 항들은 3 차 항까지 포함하고 있다. 그리고 만일 관성비가 $\beta_y = 1$ 이면, 비틀림과 축 방향 사이의 운동에 대한 연성효과는 사라지게 된다.

3. 비선형 운동방정식의 해

미분-적분으로 구성된 비선형 운동방정식(1a) 와 (1b)을 분석하기 위하여 다축적법(method of multiple scales)을 사용하였다. 비선형 운동방정식을 섭동분석하기 위하여 작은 매개변수 ϵ 을 사용하였다. 따라서 $v(s, t)$ 와 $w(s, t)$ 의 근사해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v(s, T_0, T_2; \epsilon) = \epsilon v_1(s, T_0, T_2, \dots) + \epsilon^2 v_2(s, T_0, T_2, \dots) + \dots \quad (3)$$

$$w(s, T_0, T_2; \epsilon) = \epsilon w_1(s, T_0, T_2, \dots) + \epsilon^2 w_2(s, T_0, T_2, \dots) + \dots \quad (4)$$

여기서 $T_0 = t$ 는 Ω 와 고유 주파수 ω_m 을 가진 빠른 척도 이고 $T_2 = \epsilon^2 t$ 는 진폭과 위상변조의 특징을 결정하는 느린 척도이다. 그리고 $c = \epsilon^2 \mu$ 이고 $F = \epsilon^3 f$, $\beta_y = 1 + \delta_0 + \epsilon^2 \delta_2$ 이라고 가정하였다. 식(3)과 식(4)를 식(1a) (1b)에 대입하고 ϵ 차수에 대하여 정리하였다. (6) (15)

본 논문에서는 n 번째 모드와 같은 x 방향의 어느 한 모드의 주 매개변수 가진을 다루고 있다. 이 가진은 일대일 내부공진, 즉 매개변수 공진을 통해 m 번째 모드와 같은 y 방향의 어느 한 모드를 가진 시킨다. 따라서 앞의 모드는 매개변수 공진에 의해 직접 가진 되며, 뒤에 있는 모드는 매개변수에 의해 일대일 공진으로 간접적인 방법으로 가진 된다.

$$v_1(s, T_0, T_2, \dots) = \Phi_m(s) A_1(T_2) e^{i\omega_m T_0} + cc \quad (5a)$$

$$w_1(s, T_0, T_2, \dots) = \Phi_n(s) A_2(T_2) e^{i\omega_n T_0} + cc \quad (5b)$$

여기에서 cc 는 complex conjugate 을 의미한다.

$$\omega_m = z_m^2 \sqrt{1 + \delta_0}, \quad \omega_n = z_n^2, \quad (6)$$

$$\Phi_i(s) = \cosh z_i s - \cos z_i s + \frac{\cosh z_i + \cosh z_i}{\sin z_i + \sinh z_i} (\sin z_i s - \sinh z_i s) \quad (7)$$

여기서 Z_i 는 $1 + \cos z \cdot \cosh z = 0$ 인 근이며, 식(7)의 세 개의 근은 1.8751, 4.6941, 7.8548 이다. 고유

함수 Φ_n 는 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\int_0^1 \Phi_n^2(s) ds = 1 \quad (8)$$

ω_{2n} 은 x 방향의 n 번째 진동모드의 선형화 된 고유주파수 이고, ω_m 은 근사적으로 y 방향의 m 번째 진동모드의 선형화 된 고유주파수와 같다. 후자의 실제의 주파수는 $Z_{2m}^2 \sqrt{1 + \delta_0 + \varepsilon^2 \delta_2}$ 이다. 위의 방정식을 Galerkin 방법을 사용하여 상미분방정식으로 변환시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_0^2 v_{3i} + \omega_{2m}^2 v_{3i} = & -2D_0 D_2 v_{1i} - \mu D_0 v_{1i} - \delta_2 z^4 v_{1i} \\ & + (1 - \beta_y) \alpha_1 v_{1i} w_{1i}^2 - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \alpha_2 v_{1i} w_{1i}^2 - \beta_y \alpha_3 v_{1i} w_{1i}^2 - \beta_y \alpha_4 v_{1i}^3 \\ & - \frac{1}{2} \alpha_5 v_{1i} D_0^2 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} \alpha_6 v_{1i} D_0^2 w_{1i}^2 + \alpha_7 g_0 v_{1i} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{3i} + \omega_{2n}^2 w_{3i} = & -2D_0 D_2 w_{1i} - \mu D_0 w_{1i} \\ & - (1 - \beta_y) \beta_1 v_{1i}^2 w_{1i} - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \beta_2 v_{1i}^2 w_{1i} - \beta_3 v_{1i}^2 w_{1i} - \beta_4 w_{1i}^3 \\ & - \frac{1}{2} \beta_5 w_{1i} D_0^2 w_{1i}^2 - \frac{1}{2} \beta_6 w_{1i} D_0^2 v_{1i}^2 + \beta_7 g_0 w_{1i} + \beta_8 f \Omega^2 \cos \Omega T_0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 α_i 와 β_i 는 참고문헌⁽⁶⁾(부록 A)에 의해 정의되어 있다. 보의 1 차 모드와 같은 주파수로 가진을 받는 시스템의 응답특성을 분석하기 위하여 detuning 매개변수 $\hat{\sigma}$ 을 도입하였고 $\omega_{im} = \omega_{2n}$ 로 정의한다.

$$\Omega = \omega_{2n}(1 + \varepsilon^2 \hat{\sigma}) \quad (11)$$

식(9)과 식(10)에 대입에서 영구항을 발생시키는 항을 제거하면 다음과 같은 해의 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} -i(2\omega_m A_1 + \mu \omega_m A_1) - \delta_2 z^4 A_1 - \left[\delta_0 \alpha_1 + \frac{\delta_0^2}{\beta_y} \alpha_2 + (1 + \delta_0) \alpha_3 \right] (2A_1 A_2 \bar{A}_1 + \bar{A}_1 A_2^2) \\ - 3(1 + \delta_0) \alpha_4 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_5 \omega_m^2 \bar{A}_1 A_1^2 + 2\alpha_6 \omega_m^2 \bar{A}_1 A_2^2 + \alpha_7 g_0 A_1 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -i(2\omega_m A_2 + \mu \omega_m A_2) - \left(\delta_0 \beta_1 - \frac{\delta_0^2}{\beta_y} \beta_2 - \beta_3 \right) (2A_2 A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_2 A_1^2) - 3\beta_4 A_2 \bar{A}_2 \\ + 2\beta_5 \omega_m^2 \bar{A}_2 A_2^2 + 2\beta_6 \omega_m^2 \bar{A}_2 A_1^2 + \beta_7 g_0 A_2 + \frac{1}{2} \beta_8 f \omega_m^2 e^{i\omega_m \hat{\sigma} T_2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

위의 식을 극 좌표의 형태로 변환을 시키면

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\theta_1(T_2)} \quad \text{and} \quad A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\theta_2(T_2)} \quad (14)$$

위의 변수를 식(12)과 (13)에 대입하고 실수부와 허수부를 분리하면 다음과 같은 변조 방정식을 유도할 수 있다.

$$2\omega_m a_1' + [R_1 + R_2 a_2^2 \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2)] a_1 = 0 \quad (15)$$

$$[2\omega_m \gamma_1' - R_3 - R_4 a_1^2 + R_5 a_2^2 + R_2 a_2^2 \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)] a_1 = 0 \quad (16)$$

$$2\omega_m a_2' + [E_1 + E_2 a_1^2 \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2)] a_2 - \beta_8 f \omega_m^2 \sin \gamma_2 = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [2\omega_m \gamma_2' - E_3 - E_4 a_2^2 - E_5 a_1^2 - E_2 a_1^2 \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)] a_2 \\ - \beta_8 f \omega_m^2 \cos \gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 R_i 와 E_i 는 참고문헌⁽⁶⁾(부록 B)에 정의되어 있다.

$$\gamma_1 = \omega_{2n} \hat{\sigma} T_2 - \theta_1, \quad \gamma_2 = \omega_{2n} \hat{\sigma} T_2 - \theta_2 \quad (19)$$

보의 주기해 (periodic solution)은 식 (15)-(18)의 고정점에서의 해를 의미하고, 이 고정점은 $a_1' = a_2' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$ 에 해당한다. 식 (19)로부터 $\theta_1' = \omega_{2n} \hat{\sigma}$, $\theta_2' = \omega_{2n} \hat{\sigma}$ 이다. 식(15)-(18)의 대수방정식은 수치해석적인 방법으로 문제를 해석한다. 보의 응답에 대한 1 차 근사식은 다음과 같이 주어진다.

$$v(s, t) = \varepsilon \Phi_m(s) a_1(\varepsilon^2 t) \cos(\Omega t - \gamma_1) + \dots \quad (20)$$

$$w(s, t) = \varepsilon \Phi_n(s) a_2(\varepsilon^2 t) \cos(\Omega t - \gamma_2) + \dots \quad (21)$$

다음의 근사식(20), (21)을 이용하여 MATLAB 7.0으로 수치해석을 수행하였다. 대수방정식의 수치해석을 통하여 평면과 비평면 방향의 비선형 진동의 응답특성을 분석을 하였고 분석한 결과를 이용하여 평면방향과 비평면 방향의 위상분석을 수행하였다. 비선형 진동의 응답특성은 외팔보의 1 차 모드와 2 차 모드에서 수행을 하였다. 각각의 모드에서의 위상변화와 위상차를 분석하였다. Fig. 1에서는 1 차 모드에서 평면과 비평면 진동 사이의 위상변화와 위상차를 보여주고 있다. 1 차 모드에서 가진력의 크기는 $F = \varepsilon^3 f = 0.0125$ 이며, 감쇠력은 $c = \varepsilon^2 \mu = 0.0151$ 이다. 평면과 비평면 진동 사이의 위상변화를 나타나고 있고, 그 위상차는 32° 이다. Fig. 2와 Fig. 3에서는 비선형 외팔보의 2 차 모드에서의 평면과 비평면 진동 사이의 위상변화

와 위상차를 보여주고 있다. 가진력은 $F = \varepsilon^3 f = 0.0466$, 감쇠력은 $c = \varepsilon^2 \mu = 0.00736$ 인 경우 평면과 비평면 진동 사이의 위상차는 45° 이다. 2차 모드에서 가진력이 $F = \varepsilon^3 f = 0.1980$ 인 경우 평면과 비평면 진동 사이의 위상차는 90° 이다.

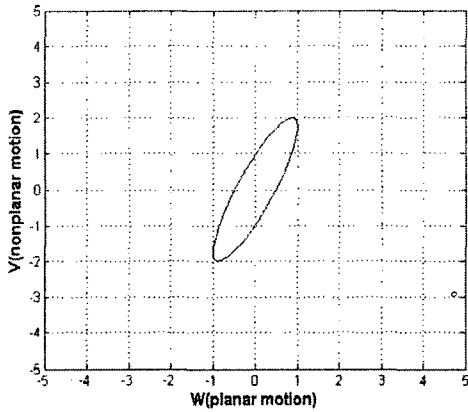


Fig. 1 Phase change in one two one resonance of the first mode

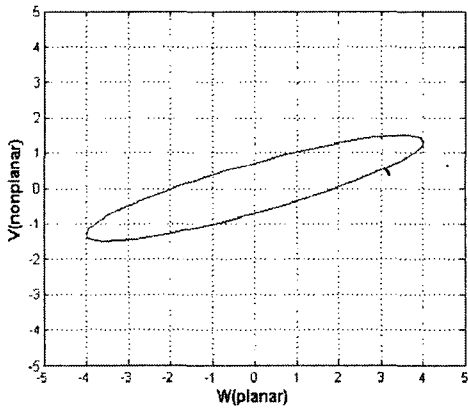


Fig. 2 Phase change in one two one resonance of the second mode

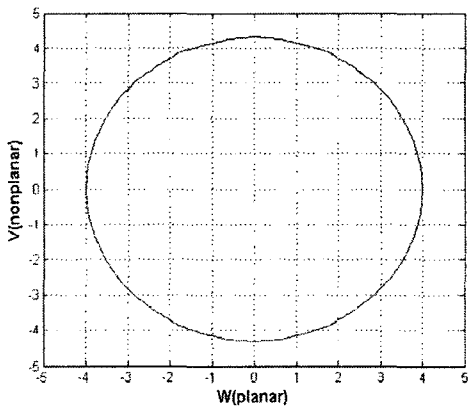


Fig. 3 Phase change in one two one resonance of the second mode

4. 비선형 실험

4.1 실험 장치

비선형 실험을 하기 위하여 유연한 탄성재료인 알루미늄 합금으로 된 원형 외팔보를 사용하였다. 알루미늄 합금의 물성치는 탄성계수 $E=72\text{GPa}$, 강성계수 $G=27\text{GPa}$, 푸아송 비(poisson's ratio) $\nu=0.3333$, 외팔보의 단위길이 당 질량 $m=0.0336\text{Kg/m}$ 보의 형상은 지름 $\phi=5\text{mm}$ 길이 $L=675\text{mm}$ 이다. 외팔보의 가진방법은 고정부를 기초조화가진으로 일정한 진폭의 사인과 가진을 하였다.

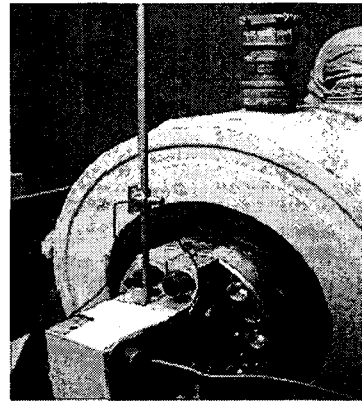


Fig. 4 Accelerometer position on the circular cantilever beam



Fig. 5 One to one internal resonance of the circular cantilever beam on the second mode

Table 1 Measured natural frequency and damping coefficient of the circular cantilever beam

Mode	λ	Theory(Hz)	Meas.(Hz)	Damping
1	1.8751	7.94	7.63	1.510%
2	4.6941	49.78	48.25	0.736%
3	7.8548	139.40	135.13	0.341%

실험에 사용된 측정장치는 다음과 같다.

- FFT signal analyzer (B&K pulse system)
- Charge amplifier (B&K type 2635)
- Accelerometer (1-axis, B&K type 4374)
- Accelerometer (3-axis, B&K type 4370)
- Shaker (LDS U550)
- Power amplifier (LDS)
- Level record (B&K type 2307)
- Oscilloscope (HP 54615B)
- Phase shifter

가진기와 보를 고정시키는 지그(jig)는 알루미늄 AL2024 로 만들었으며, 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족시키고 보가 횡 방향(x방향)으로 가진을 받도록 설계되었다.^{(12), (15)}

4.2 실험방법

유연한 비선형 외팔보의 경계조건을 만족시키는 상태로 가진기에 고정을 하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진 주파수를 증가하거나 감소시키는 방법으로 실험을 수행하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분은 가진 주파수의 변화와 상관없이 일정한 값을 갖게 된다. 가진 주파수의 증가와 감소는 Sine sweeping 의 형태이며 변화 비율은 0.030Hz/s 이다.

원형 외팔보의 1 차, 2 차 모드에서 주파수를 고정시키고 가진 진폭을 증가시키는 방법으로 가진 진폭을 증가하면 선형진동에서 비선형 진동으로 변화하는 과정을 분석하였다. 비선형 진동의 위상변화를 해석하기 위해서 위상궤적과 위상차를 분석을 하였다. 외팔보의 응답특성을 측정하기 위하여 외팔보의 평면 방향(x-축 방향)과 비평면 방향(y-축 방향)에 각각 B&K 4374 가속도계를 부착하였다. 가속도계의 무게는 각각 0.65g정도이고, 측정주파수 범위는 1-25KHz, 측정가능 가속도 레벨은 250,000 m/s^2 이다. 가속도계의 부착위치는 고정부에서 100mm 높이에 순간접착제를 이용하여 외팔보의 표면에 고정을 시켰다.⁽¹⁵⁾

일대일 공진에 의해 발생하는 평면진동과 비평면 진동의 진동신호를 각각의 가속도계로 측정하여 증폭기(charge amplifier B&K2635)을 통해서 전압신호로 변환을 하였다. 증폭기에서 나온 전압신호를 오실로스코프를 이용하여 오실로스코프 화면 내에서 리셔쥬(Lissajous) 도형을 만들었다. 평면과 비평면 진동신호를 이용하여 만든 리셔쥬 도형을 이용하여 평면과 비평면 진동 사이의 위상변화와 위상차를 분석하였다.

5. 실험 결과 및 고찰

원형 외팔보의 1 차 모드(7.63Hz)에서는 일대일 공진에 의한 평면과 비평면 사이의 진동이 매우 작게 일어나고 있다. 그러므로 일대일 공진에 의한 평면과 비평면사이의 위상변화와 위상각을 실험적으로 해석이 매우 어렵다. 오실로스코프 화면에서 거의 점의 형태로 나타나고 있다.

원형 외팔보의 2 차 모드(48.25Hz)에서 일대일 공진에 의한 평면과 비평면 진동이 실험적으로 잘 발생하고 있다. 그러므로 일대일 공진에서 평면과 비평면 진동의 위상분석과 위상차를 해석하기가 쉽다. Fig. 6 에서 가진 진동의 레벨이 10m/s²인 경우 평면과 비평면 사이의 위상변화를 보여주고 있다. 이 때 평면과 비평면 진동 사이의 위상각의 차이는 40°이다. 가진 진동의 레벨이 25m/s²인 경우에는 평면과 비평면 진동 사이의 위상각이 최고 87°까지 변화함을 볼 수 있다. (Fig. 7)

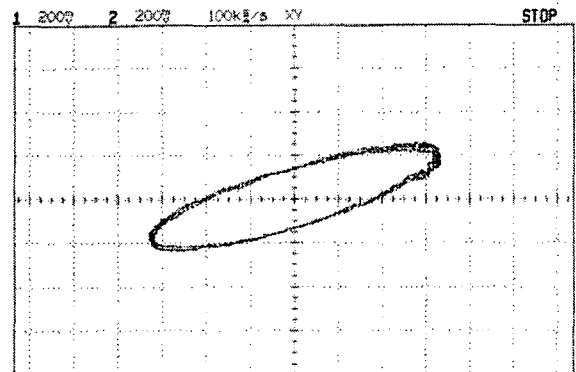


Fig. 6 Phase change in phase portrait of the second mode (x-planar, y-nonplanar)

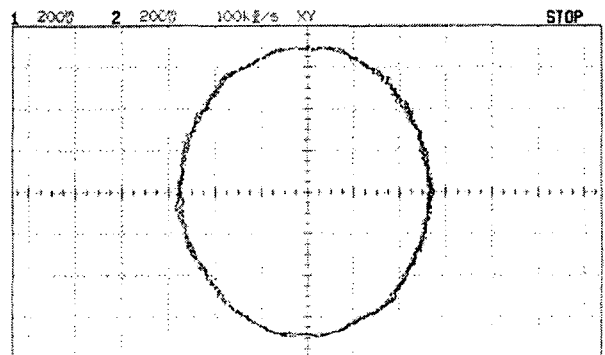


Fig. 7 Phase change in phase portrait of the second mode (x-planar, y-nonplanar)

6. 결론

기초조화가진을 받는 유연한 원형 외팔보의 비선형 진동현상에서 발생하는 일대일 공진에 의한 위상변화와 위상차를 분석하였다. 이론적으로는 Crespo da Silva and Glynn 이 유도한 미분-적분방정식을 사용하였다. 비선형 외팔보의 1 차, 2 차 모드에서 일대일 공진에 의한 평면과 비평면 진동 사이에 위상변화와 위상차가 발생하고 있음을 알 수 있다. 비선형 외팔보의 1 차 모드에서는 평면과 비평면 진동에 의한 위상차가 32°나 발생하였다. 2 차 모드에서는 가진력의 크기에 따라서 위상변화와 위상차가 변화함을 볼 수 있다. 2 차 모드에서 가진력을 변화를 하면 최고 90°까지 변화함을 보였다.

실험적으로 해석하기 위하여 비선형 특성이 있는 유연한 외팔보를 기초조화가진을 하여 평면과 비평면 진동의 특성을 분석하였다. 평면과 비평면의 진동을 오실로스코프를 이용하여 리셔츄 도형을 만들어서 오실로스코프 화면 내에서 분석을 수행하였다. 유연한 외팔보의 1 차 모드에 일대일 공진이 잘 발생하지 않아서 평면과 비평면 진동의 의한 정확한 데이터를 얻을 수가 없었다. 그러나 2 차 모드의 경우 일대일 공진이 잘 발생하여 평면과 비평면 진동이 잘 발생하고 있다. 따라서 2 차 모두에서는 평면과 비평면 진동에 의한 위상변화와 위상차가 잘 나타나고 있다. 2 차 모드의 경우 평면과 비평면 진동 사이의 위상차가 최고 87° 변화함을 볼 수 있다. 또한 2 차 모드에서 가진력의 크기에 평면과 비평면 진동 사이에서 위상변화와 발생하며 위상차가 다른 값을 갖고 있음을 이론적 실험적으로 규명을 하였다.

참고문헌

(1) Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990, Nonlinear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitation, *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.25, No.5, pp.455-474.
 (2) Nayfeh, A. H. and Pai, P.F., 1989, Nonlinear Non-Planar Parametric Responses of an inextensional Beam, *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.24, No.2, pp.139-158.
 (3) Haigh, E. C. and King, W. W., 1972, Stability of Nonlinear Oscillations of an Elastic Rod, *J.Acost.Soc.Am.*52, pp.899-911.
 (4) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979,

Nonlinear Oscillations
 (5) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, *Dynamics the Geometry of Behavior*, 2nd Ed., Addison-Wesley.
 (6) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold.
 (7) Cusumano, J. P., 1990, *Low-dimensional, Chaotic nonplanar motions of the elastica*, Ph.D.Thesis, Cornell University, New York.
 (8) Pak, C. H., Rand, R. H, and Moon, F. C., 1992, *Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes*, *Nonlinear Dynamics*, Vol.3, pp.347-364.
 (9) M. R. M. Crespo da Silva and C. C. Glynn, 1978, *Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beam-I. Equations of Motion*, *J. Struct. Mech.* 6., pp.437-448.
 (10) Y. S. Lee, J. M. Joo and C.H. Pak, 1996, *On the chaotic vibrations of thin beams by a bifurcation mode*, *Autumn Annual Conference of Korean Soc. Noise and Vibration Engineering*, pp.121-128
 (11) ALI H. NAYFEH, 2000, *NONLINEAR INTERACTIONS Analytical, Computational and Experimental Methods*, JOHN WILEY & SONS, INC., pp. 181-304.
 (12) M. G. Kim, H. S. Lee and C. D. Cho, 2005, *Non-linear Phenomenon in the Response of Circle Cantilever Beam*, *KSNVE*, Vol. 15, No. 4, pp.445-451.
 (13) Y. S. Choi, K. S. Seo and Y. J. Woo, 2003, *Nonlinear Vibration of a Cantilever Beam Subjected to Electromagnetic Forces*, *KSME A*, Vol. 27, No. 1, pp. 48-57.
 (14) Jae-Hoon Lim, Goo-Choong Jung and Yeon-Sun Choi, 2003, *Nonlinear Dynamic Analysis of Cantilever Tube Conveying Fluid with System Identification*, *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 12, pp.1994-2003.
 (15) Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chongdu Cho, 2006, *Non-Planar Non-Linear vibration Phenomenon on the One to One Resonance of the Circular Cantilever Beam*, *KSME*, Vol. 30, No. 2, pp. 171-178.