

에너지 방법을 이용한 Euler-Bernoulli 보의 손상 규명

Crack Identification of Euler-Bernoulli Beam Using the Strain Energy Method

허영철† · 김재관* · 김병현**
 Young-Cheol, Huh, Jae-Kwan, Kim and Byung-Hyun, Kim

Key Words : Open Crack(열린 균열), Equivalent Bending Stiffness of Cracked Beam(균열 보의 등가 굽힘 강성), Galerkin's Method(Galerkin 방법)

ABSTRACT

We studied the influences of open cracks in free vibrating beam with rectangular section using a numerical model. The crack was assumed to be single and always open during the free vibration and equivalent bending stiffness of a cracked beam was calculated based on the strain energy balance. By Galerkin's method, the frequencies of cantilever beam could be obtained with respect to various crack depths and locations. Also, the experiments on the cracked beams were carried out to find natural frequencies. The cracks were initiated at five locations and the crack depths were increased by five steps at each location. The experimental results were compared with the numerical results and the comparison results were discussed.

1. 서론

교량이나 토목구조물등과 같은 대형 구조물의 균열은 해당 위치에서의 강성을 저하시키고 상시 하중과 같은 반복적인 하중에 의해 균열이 점진적으로 진전하게 되면 구조물 설계 시 산정되었던 강도를 확보하지 못하게 되므로 갑작스러운 파괴로 이어질 수 있다. 이러한 균열 등과 같은 구조물 손상을 조기에 발견하여 안전성을 확보하기 위해 이미 오래 전부터 비파괴 검사를 비롯한 다양한 방법을 이용하여 손상을 감지하고 그 위치를 예측하려는 연구가 수행되어 왔다. 그 중에서도 손상된 구조물의 진동 특성 값 즉, 고유 진동수 및 모드 형상의 변화를 이용한 진동 기반의 손상 감지 연구가 활발하게 수행되어 왔는데, 비교적 경제적이면서 손쉬운 방법으로 손상을 감지할 수 있다는 장점 때문인 것으로 판단된다. 그러나 실제 구조물의 적용에서 전역적인 강성의 변화를 주지 못하는 미세한 균열 등과 같은 손상을 감지하기에는 그 효율성에 한계가 있기 때문에 최근에는 스마트 센서 등을 이용하여 직접 국부적인 손

상을 감지하려는 다양한 연구가 많이 시도되고 있다. 전역적인 손상이나 미세한 균열과 같은 국부적인 손상을 파악하기 위해서는 손상 구조물에 대한 동특성의 변화를 정확히 파악하는 것이 필요하며, 이를 위해서는 손상 구조물의 수치 모델을 확립하여 손상에 따른 구조물의 동특성 변화를 예측해 보는 것이 하나의 방법이 될 수 있다.

본 논문에서는 균열을 갖는 보의 진동 해석에 대해 살펴 보았다. 균열 보의 진동해석과 관련하여 많은 연구가 수행되어 왔는데 Irwin⁽¹⁾은 처음으로 균열 지점 주위의 응력 집중과 하중 사이의 관계를 정립하였다. 이 후 Dimarogonas^(2,3)는 구조물의 동특성에 미치는 균열의 영향에 관해 많은 연구를 수행하였는데, 요소의 유연도 행렬을 도입하여 균열을 스프링-힌지로 모델링하고 다양한 구조물의 균열을 규명하기 위한 주파수 스펙트랄 방법을 제안하였다. Christides와 Barr⁽⁴⁾는 균열 부근 영역의 응력변동을 표현하기 위해 지수함수로 감소하는 균열 동요함수(crack disturbance function)를 제안하고 대칭의 균열을 갖는 보의 고유치 방정식을 유도하였다. Shen과 Pierre⁽⁵⁾는 하나의 균열을 갖는 균일한 보에 대해 균열 주위에서 보의 적합 조건식을 만족하는 균열 함수를 제안하고 양단 단순지지 보와 외팔보의 고유치 문제의 해를 구하였다. 국내에서도 유연도 행렬을 이용한 균열 보의 동특성 연구가 많이 수행되었는데, 균열이 있는 복합재료 보⁽⁶⁾와 회전체의 동특성 변화에 대한 연구^(7,8) 그리고 균열이 있는 유체 유동 파

† 정회원, 한국기계연구원 e-엔지니어링 연구센터
 E-mail : ychuh@kimm.re.kr
 Tel : (042) 858-7468, Fax : (042) 868-7418

* 정회원, 서울대학교 지구환경시스템공학과

** 정회원, 한국기계연구원 e-엔지니어링 연구센터

이프에서 이동 질량에 따른 동특성 변화에 관한 연구⁽⁹⁾ 등이 있다.

최근 Yang과 Swamidas⁽¹⁰⁾, Owolabi와 Swamidas⁽¹¹⁾ 등은 열린 균열이 존재하는 보에서 변형 에너지의 균형 조건식을 이용하여 균열 보의 등가 굽힘 강성을 분수함수의 형태로 유도하고 단순지지 및 고정지지 조건의 보에 대해 균열 크기와 위치 변화에 따른 고유진동수를 계산하는 연구를 수행하였다. 에너지 방법을 이용함으로써 단순한 정식화가 가능하고 균열 보를 연속보로 가정함에 따라 Galerkin 방법을 이용하여 균열 보의 고유해를 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 논문에서는 하나의 균열이 존재하는 외팔보에 대해서 균열 크기와 위치 변화에 따른 고유진동수를 계산하고 이를 실험을 통하여 검증하였다. 이 때 균열은 항상 열린 균열로 존재하며 진전하지 않는다고 가정하였다. 등가 굽힘 강성이 적용된 균열 보의 운동 방정식에 대해서 외팔보의 경계 조건을 적용하여 Galerkin 방법을 이용한 고유해를 제시하였다. 한편, 실험에 사용된 시편은 정사각형 단면의 알루미늄 보로써 초기 균열의 위치를 보 길이의 0.1L ~ 0.5L 지점의 서로 다른 다섯 군데로 정하고 균열의 깊이를 단면 높이의 1/2까지 5단계로 점진적으로 증가시키면서 고유진동수의 변화를 살펴보았다. 이를 수치 해석 결과와 비교하고 그 정도를 검증하였으며 고유진동수 변화율의 등고선과 균열 위치 및 크기와의 관계를 규명하였다.

2. 균열 보의 횡 방향 고유진동수

2.1 균열 보의 탄성 변형 에너지

사하중(dead-load)과 같이 외력 F 가 일정하게 작용하는 구조물에서 초기 균열이 a 만큼 성장한 후 평형 상태에 도달했다고 가정한다면 Clapeyron의 이론⁽¹²⁾에 따라 외력이 행한 일 W 는 내부 변형 에너지 변화량의 두 배가 된다. 즉, 외력에 의한 일 W 의 반은 내부의 변형 에너지로 축적되고 나머지 반은 균열을 성장시키는데 소모된다. Fig. 1은 균열이 a 만큼 성장했을 때 상태 1,2의 하중-변위 응답을 보여주는데 균열 성장 전후의 에너지 크기는 각각 면적 $O\delta_1 p_1$ 및 $O\delta_2 p_2$ 이고 외력 P 에 의한 일 W 는 $\delta_1 p_1 \delta_2 p_2$ 이다. 기하학적으로도 $(O\delta_2 p_2) - (O\delta_1 p_1) = (\delta_1 p_1 \delta_2 p_2)/2$ 가 성립됨을 쉽게 알 수 있다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$W = E_c + \Delta U = 2\Delta U \quad (1)$$

여기서, E_c 는 균열의 성장에 소모된 에너지이며 ΔU 는 축적되는 변형 에너지의 증가분이다. 따라서 균열된 보의 최종 탄성 변형 에너지 U_c 는

$$U_c = U + \Delta U = U + E_c \quad (2)$$

로 표현할 수 있으며, U 는 균열 성장 전 상태 1의 보의 변

형 에너지를 의미한다.

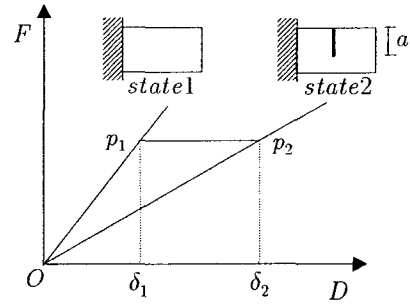


Fig.1 Load-displacement curve according to crack growth

2.2 균열 보의 등가 굽힘 강성

평 진동하는 보의 전단 변형을 무시할 수 있다고 가정하면 균열에 의한 제 I의 파괴모드만이 존재하게 되고 폭이 b 이고 높이가 h 인 사각단면 보의 응력 확대계수(stress intensity factor) K_I 는

$$K_I = F(a) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} = \frac{6M\sqrt{\pi a}}{bh^2} F(a) \quad (3)$$

$$F(a) = 1.12 - 1.4(a/h) + 7.33(a/h)^2 - 13.8(a/h)^3 + 14(a/h)^4 \quad (4)$$

여기서, a : 균열 길이, M : 보의 굽힘 모멘트 로 정의할 수 있다.

일정한 굽힘 모멘트 M 이 작용하는 보에서 균열이 a 만큼 성장할 때 소모되는 에너지 E_c 는 파괴역학 이론에 의한 변형 에너지 분산을 G 의 적분을 통해 구할 수 있다. 즉,

$$E_c = \int_0^a G dA = \int_0^a G b da \quad (5)$$

$$= \frac{K_I^2}{E} \quad (6)$$

여기서, E : 재료의 영률

식 (3)~(6)으로부터 균열의 성장에 소모되는 에너지 E_c 는

$$E_c = \frac{18\pi [F(a)]^2 a^2}{Ebh^4} M^2 \quad (7)$$

로 정리할 수 있다.

일반적으로 균열이 발생하면 응력은 주로 균열선단 주위에 집중되며 균열 위치로부터 멀리 떨어질수록 공칭응력(nominal stress)의 수준에 접근하는 분포 특성을 갖는다고 알려져 있다. 에너지 측면에서 보면 변형 에너지가 균열 주위에 집중되어 증가된다고 가정할 수 있다. 즉, 균열이 발생한 보에서 변형 에너지의 밀도함수를 도입하여 균열 깊이와 위치에 따른 E_c 의 길이 방향 분포를

$$E_c = \int_0^L \frac{Q(a, c)}{1 + [(x-c)/\{k(a)a\}]^2} dx \quad (8)$$

로 가정해 볼 수 있다. 여기서, c 는 균열이 발생한 위치를 의미하고 $Q(a, c)$ 와 $k(a)$ 는 결정해야 할 함수이다. 식 (7), (8)로부터 $Q(a, c)$ 를

$$Q(a, c) = \frac{D(a)M^2}{k(a)a[\text{atan}((L-c)/\{k(a)a\}) + \text{atan}(c/\{k(a)a\})]} \quad (9)$$

$$\text{여기서, } D(a) = \frac{18\pi [F(a)]^2 a^2}{Eb h^4} \quad (10)$$

와 같이 구할 수 있다. EI_c 를 균열 보에서의 등가 굽힘 강성으로 정의하면 최종적인 변형 에너지는 식 (2)에 의해서

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI_c} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{Q(a, c)}{1 + [(x-c)/\{k(a)a\}]^2} dx \quad (11)$$

가 된다. 식 (9)~(11)로부터 균열 보에서의 등가 굽힘 강성 EI_c 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$EI_c = \frac{EI}{1 + EI \cdot R(a, c)/[1 + ((x-c)/\{k(a)a\})^2]} \quad (12)$$

여기서,

$$R(a, c) = \frac{2D(a)}{k(a)a[\text{atan}((L-c)/\{k(a)a\}) + \text{atan}(c/\{k(a)a\})]} \quad (13)$$

균열이 발생한 위치 $x=c$ 에서 단면 감소로 인한 관성모멘트 I_c 를 고려해 보면

$$\frac{I}{I_c} = \frac{bh^3/12}{b(h-a)^3/12} \quad (14)$$

식 (12), (14)로부터

$$k(a) = \frac{3\pi [F(a)]^2 (h-a)^3 a}{[h^3 - (h-a)^3] h} \quad (15)$$

를 얻을 수 있다.

2.3 균열 보의 고유진동수 방정식

균열이 있는 Euler-Bernoulli 보에서 횡방향의 변위를 $w(x, t)$ 라고 정의하면 등가 굽힘 강성 EI_c 을 적용한 운동 방정식은

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI_c \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

으로 표현할 수 있고 $w(x, t) = W(x)Q(t)$ 로 변수 분리하면 다음과 같은 보의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI_c \frac{d^2 W}{dx^2}] - \rho A w_c W = 0 \quad (17)$$

여기서, w_c 는 균열 보의 고유진동수이다.

외팔보에 대한 식 (17)의 해를 구하기 위해 Galerkin 방법을 사용하였다. 균열 전후의 모드 형상의 변화가 미미하다는 가정 하에 균열이 없는 외팔보의 엄밀해⁽¹³⁾인 보 함수

를 시도 함수(trial function)로 선정하였다. 4차 항까지만 고려한 시도 함수 ϕ 는

$$\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3 + C_4\phi_4 \quad (18)$$

와 같고,

$$\phi_i(\xi) = \sin \tilde{\lambda}_i \xi - \sinh \tilde{\lambda}_i \xi - A_i (\cos \tilde{\lambda}_i \xi - \cosh \tilde{\lambda}_i \xi) \quad (19)$$

여기서, $\xi = x/L$

$$A_i = \frac{\sin \beta_i + \sinh \beta_i}{\cos \beta_i + \cosh \beta_i} \quad (20)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = 1.8751, \tilde{\lambda}_2 = 4.6941, \tilde{\lambda}_3 = 7.8547, \tilde{\lambda}_4 = 10.9955 \quad (21)$$

와 같다. 가중 함수를 ϕ_i 로 정하고 시도 함수 ϕ 와 함께 clamped-free 경계조건에 대해서 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같은 적분 형태의 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^L \phi_i^n EI_c \phi^n dx - \rho A w_c \int_0^L \phi_i \phi dx = 0 \quad (22)$$

$$\text{여기서, } \phi^n = \frac{d^2 \phi}{dx^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

식 (22)의 적분은 양함수(explicit function)로 구하기가 매우 어려워서 MatLab의 내장 함수를 이용한 수치 적분을 수행하였다.

3. 균열 외팔보의 실험 및 수치해석 결과 비교

3.1 균열 외팔보의 자유진동 실험

균열 외팔보에 대한 2절의 수치해석 결과를 검증하기 위해 0.05m×0.05m 단면을 갖는 5.7m 길이의 알루미늄 보에 대한 자유진동 실험을 수행하였다. 시편은 총 5개가 제작되어 보 길이의 0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L, 0.5L 위치에서 초기 균열을 줄 수 있도록 하였다. 사용된 알루미늄 재질의 영률 $E = 70 GPa$ 이고 밀도 $\rho = 2710 kg/m^3$ 이다. 각각의 초기 균열 위치에서 균열의 깊이 비율을 $a/h = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 의 5단계로 증가시켜 가면서 고유진동수를 측정하였다. 열린 균열의 상태를 유지시키기 위해서 가는 줄 톱을 사용하여 약 1mm 정도의 넓이로 균열을 주었다. 고유진동수 측정을 위해 보의 상단에 4개의 B&K 가속도계를 취부 하였는데, 이 중 하나는 특별히 약 500g 정도의 무게를 갖는 저주파용 가속도계를 사용하였다.

5개의 시편에 대해 균열 전후 상태의 고유진동수 측정을 위해 매번 10회의 측정이 이루어졌고 보의 끝단에서 10cm 정도의 강제 변위를 가했다가 해제하는 자유진동 측정과 고무 해머를 이용한 임팩트 실험에 의한 측정이 각각 5회씩 수행되었다. 가속도 신호의 데이터 취득은, NI사의 A/D 보드와 Labview를 이용하였는데, 샘플링 주파수를 100Hz로 정하고 200초간 데이터를 취득하였다. 예비 분석 결과 샘플링 주파수 100Hz와 데이터의 취득시간 200초에 의해서 결

정되는 주파수 분해능은 시편의 1차 고유진동수의 변화를 파악할 수 있을 만큼 충분한 것으로 판단되었다. 매번 10회의 측정 결과를 종합하여 시편의 4차 고유진동수까지 분석하였다. 한편, 균열 전 상태에서 알루미늄 외팔보의 고유진동수 임밀 해와 측정 결과는 Table 1과 같다.

Table 1 Natural frequencies of uncracked beam

	임밀해 (Hz)	Experiment (Hz)				
		시편 1	시편 2	시편 3	시편 4	시편 5
1st mode	1.26	1.25	1.26	1.25	1.26	1.26
2nd mode	7.92	7.86	7.96	7.84	7.94	7.94
3rd mode	22.17	21.86	22.17	21.81	22.08	22.09
4th mode	45.45	43.07	43.64	43.07	43.46	43.49

3.2 수치해석 결과와의 비교 및 검토

식 (22)를 이용하여 균열 외팔보의 고유진동수를 계산하였다. 계산 조건은 실험에 사용된 시편의 조건과 동일하게 적용하였다. 균열 위치 c/L 과 균열 깊이의 비 a/h 를 0.02~0.5로 변화시켜가면서 Table 1에 보인 균열 전 외팔보의 고유진동수에 대한 변화율을 계산하였다. 대표적으로 균열 깊이의 비 a/h 가 0.3, 0.5일 때 균열 위치에 따른 고유진동수 변화율 결과를 Fig.2, Fig.3에 균열 위치의 비 c/L 이 0.5일 때 균열 깊이에 따른 고유진동수 변화율 결과를 Fig.4에 보였다. 그림에서 볼 수 있듯이 4차까지 측정된 모든 모드에서 실험결과와 수치해석 결과가 매우 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 그러나 균열의 깊이가 클수록 균열 위치가 고정단에 가까워질수록 실험값과 비교적 큰 차이를 보인다. 한편, Fig.4에서 보인 2차와 4차 모드의 변화율이 크고 3차 모드의 변화율이 거의 없는 것으로 미루어 균열 위치 0.5L은 3차 모드의 노드점 부근인 것으로 판단된다. 잘 알려진 바와 같이 균열 구조물의 고유진동수의 변화는 균열 위치 및 깊이가 변화와 밀접한 관계를 갖고 있음을 실험과 수치해석 결과로부터 확인할 수 있었다.

4. 결론

균열 외팔보에 대해 균열 위치 및 깊이에 따른 고유진동수 계산과 실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 제시된 등가 굽힘 강성 EI_c 를 적용하여 계산된 균열 보의 고유진동수는 실험 결과와 매우 잘 일치한다.
- (2) 균열 구조물의 고유진동수는 균열의 위치 및 깊이 변화와 밀접한 관계를 갖고 있음을 확인할 수 있었다.
- (3) 균열 보의 강성 저하에 의한 고유진동 특성 변화는 5% 미만으로 매우 적은 수준이었다.
- (4) 본 논문에서 제시한 균열 보에 대한 수치 모델은

향 후 손상감지 알고리즘 개발에 효과적으로 활용될 수 있을 것으로 기대한다.

후 기

본 연구는 과학기술부에서 지원하는 기관고유사업의 일환으로 수행되었으며 관련 지원에 감사드립니다.

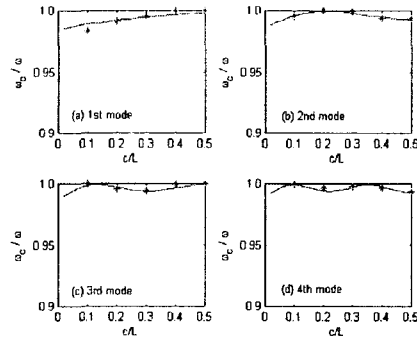


Fig.2 Frequency changes of a cracked cantilever beam according to crack locations ($a/h=0.3$)
 * : experiment, — numerical analysis

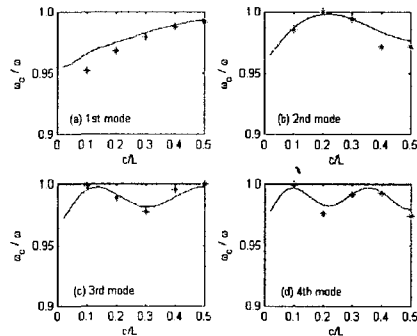


Fig.3 Frequency changes of a cracked cantilever beam according to crack locations ($a/h=0.5$)
 * : experiment, — numerical analysis

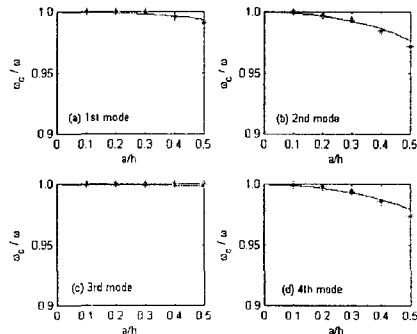


Fig.4 Frequency changes of a cracked cantilever beam according to crack depth ($c/L=0.5$)
 * : experiment, — numerical analysis

참 고 문 헌

- (1) Irwin, G. R., 1957, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 361~364.
- (2) Chondros, T. G., and Dimarogonas A. D., 1980, "Identification of Cracks in Welded Joints of Complex Structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 69, pp. 531~538.
- (3) Dimarogonas A. D., and Papadopoulos C. A., 1983, "Vibration of Cracked Shafts in Bending", Journal of Sound and Vibration, Vol. 91, pp. 583~593.
- (4) Christides S. and Barr A. D. S., 1984, "One-dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams", International Journal Mechanics Science, Vol. 26, pp. 639~648.
- (5) Shen M. H. and Pierre C., 1994, "Free Vibrations of Beams with a Single-edge Crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 170, pp. 237~259.
- (6) 하태완, 송오섭, 1999, "크랙이 존재하는 복합재료 보의 동적 특성 연구", 한국소음진동공학회논문집, 제 9권, 제 5호, pp. 1019~1028.
- (7) 최성환, 홍성욱, 이종원, 2003, "열린 균열이 있는 일반 회전체계의 효율적인 동적 모델", 춘계학술대회논문집, 한국소음진동공학회, pp. 88~93.
- (8) 윤한익, 손인수, 2005, "크랙을 가진 회전 외팔보의 동특성 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 15권, 제 5호, pp. 620~628.
- (9) 윤한익, 손인수, 2004, "크랙과 이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성에 관한 연구", 한국소음진동공학회논문집, 제 14권, 제 12호, pp. 1304~1313.
- (10) Yang X. F., Swamidas A. S. J. and Seshadri R., 2001, "Crack Identification in Vibrating Beams Using the Energy Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 244, pp. 339~357.
- (11) Owolabi G. M., Swamidas A. S. J. and Seshadri R., 2003, "Crack Detection in Beams Using Changes in Frequencies and Amplitudes of Frequency Response Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, pp. 1~22.
- (12) Gdoutos E. E., 1993, Fracture Mechanics, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- (13) Gorman D. J., 1975, Free Vibration Analysis of Beams and Shafts, John Wiley and Sons, Inc.