

점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능 향상에 관한 연구

A Study on Improving The Capacity of Absorbing Boundary Using Dashpot

김희석* 이종세**

Kim, Hee Seok Lee, Jong Seh

ABSTRACT

In this paper an analytical study is carried out to improve the capacity of absorbing boundary using dashpot, one of the most widely used absorbing boundaries in FEM. Using harmonic plane wave equation, absorbing boundary condition is modified to maximize its capacity according to the incident angle. Validity of the modified absorbing boundary conditions is investigated by adopting the solution of Miller-Pursey which is the solution for the wave propagation in semi-infinite elastic media, and the absorption ratio is calculated according to various Poisson's ratios.

1. 서론

지진, 초음파 탐상, 기초의 진동 등 다양한 동적문제의 해석적 연구에 있어서의 합리적인 접근 방법은 이 문제들을 무한 또는 반무한 영역에서의 파의 진행문제로서 고려하는 것이지만 대부분의 문제들이 복잡한 형상 때문에 해석해를 찾는 것이 거의 불가능하다. 따라서 수치적인 방법을 이용하는 것이 필요하며, 경계요소법, 유한요소법 및 이들을 조합하는 방법 등이 쓰이고 있다. 이 중 유한 요소법은 요소화된 모든 영역에 있어서 운동방정식을 그대로 사용하기 때문에 불연속면에서의 모드변환 등 여러 가지 중요한 현상들을 직접 관찰할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 무한영역을 유한의 요소영역으로 모형화 할 경우에 파가 제한된 대상 모형의 유한 경계에 도달한 후 반사 현상이 발생하게 되며 이로 인해 구조계 전체의 응답에 큰 영향을 미치게 된다. 따라서 무한영역을 모형화 하는데 있어서는 반사파의 영향을 상쇄시켜주는 인공적인 경계요소가 필요한데, 이러한 인공적인 경계요소를 흡수경계(absorbing boundary)라고 하며 파진행 문제에 널리 쓰이고 있다. 지금까지 Lysmer-Kuhlemeyer(1969), Smith(1974), Engquist-Majda(1977), White et al.(1977) 그리고 Liao-Wong(1984) 등, 여러 연구자들에 의해 많은 경계요소들이 제안되어졌으며, 이종 일반적인 수치해석 모델에 가장 효과적으로 적용되는 모델은 점성감쇠기를 이용하는 방법으로서 요소의 경계에 단지 점성감쇠기를 부착하여 흡수효과를 구현하므로 일반적인 유한요소 프로그램에 응용이 용이하다.

*정회원 · 한양대학교 토목환경공학과, 박사과정
**정회원 · 한양대학교 토목환경공학과, 교수

본 연구에서는 이러한 점성감쇠기를 이용하는 흡수경계의 성능을 향상시키고자 하였다. 먼저 조화평면 파동방정식을 이용하여 응력파의 경계면으로의 입사각에 따른 흡수경계조건을 최적화 하였으며, 수정된 경계조건을 Miller-Pursey(1954)의 반무한 탄성체에서의 파동방정식에 삽입하여 포아송비에 따른 흡수율을 산정하였다.

2. 점성감쇠기 흡수경계조건

식 (1)과 (2)는 본 연구에서 성능을 향상시키고자 하는 점성감쇠기 흡수경계조건을 나타낸다.

$$\sigma = a\rho V_p \dot{u}_1, \quad \tau = b\rho V_s \dot{u}_3 \quad (1), (2)$$

여기서 \dot{u}_1 과 \dot{u}_3 은 x_1 방향의 속도와 x_3 방향의 속도를 각각 나타내며 ρ 는 밀도를, V_p 와 V_s 는 P파와 S파의 속도를 각각 나타낸다.

위 식에서 Lysmer-Kuhlemeyer(1969)는 모든 포아송비에 대해 $a = b = 1$ 의 값을 제안하였으며, White et al.(1977)은 표 1의 값을 제안하였다.

표 1. 흡수경계 계수 값(White et al. 1977)

Poisson's ratio	a	b	Poisson's ratio	a	b
0.10	0.975	0.756	0.30	0.986	0.742
0.20	0.986	0.747	0.40	1.007	0.746

3. 조화평면파동식을 이용한 흡수경계조건의 최적화

3.1 조화평면파동방정식

2차원 무한영역으로 전파하는 평면파의 변위는 식 (3)과 같이 두 개의 x_1 , x_3 방향 스칼라 포텐셜 (ϕ, ψ_2) 의 형태로 표현할 수 있다.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \quad (3)$$

$$\phi = Ae^{i(k_{1(P)}x_1 + k_{3(P)}x_3 - \omega t)}, \quad \psi_2 = Ce^{i(k_{1(S)}x_1 + k_{3(S)}x_3 - \omega t)} \quad (4)$$

여기서 A, $k_{1(P)}$, $k_{3(P)}$ 은 채적파(P파)의 진폭과 x_1 , x_3 방향 파수(wave number)를 각각 나타내며, B, $k_{1(S)}$, $k_{3(S)}$ 은 전단파(S파)의 진폭 및 x_1 , x_3 방향 파수를 각각 나타낸다. 이때, P파 및 S파가 x_1 축에 경사각 θ 를 가지고 입사하는 경우의 스칼라 포텐셜은 식 (5)~(7)과 같이 가정할 수 있다.

Incident P-wave :

$$\begin{aligned} \phi &= Ie^{i(k_p x_1 \cos \theta - k_p x_3 \sin \theta - \omega t)} + Pe^{i(k_p x_1 \cos \theta_p + k_p x_3 \sin \theta_p - \omega t)} \\ \psi_2 &= Se^{i(k_s x_1 \cos \theta_s + k_s x_3 \sin \theta_s - \omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Incident S-wave : CASE I - Angle θ greater than the critical angle θ_c

$$\begin{aligned} \phi &= Pe^{i(k_p x_1 \cos \theta_p + k_p x_3 \sin \theta_p - \omega t)} \\ \psi_2 &= Ie^{i(k_s x_1 \cos \theta - k_s x_3 \sin \theta - \omega t)} + Se^{i(k_s x_1 \cos \theta_s + k_s x_3 \sin \theta_s - \omega t)} \end{aligned} \quad (6)$$

CASE II - Angle θ less than the critical angle θ_c

$$\begin{aligned}\phi &= Pe^{-hx_3} e^{i(k_p x_1 - \omega t)} \\ \varphi_2 &= Ie^{i(k_s x_1 \cos \theta - k_s x_3 \sin \theta - \omega t)} + Se^{i(k_s x_1 \cos \theta_S + k_s x_3 \sin \theta_S - \omega t)}\end{aligned}\quad (7)$$

여기서

$$h = \left(k_p^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2} \right)^{1/2}$$

이며, I, P 및 S는 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 복소진폭을 각각 나타내고, k_p , k_s 는 P파 및 S파의 파수를 각각 나타낸다. 이제 식 (5)~(7)를 식 (3)에 삽입하면 경계면에서의 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 변위성분을 얻을 수 있다.

식 (3)은 입사파와 반사파에 대해 식 (8)과 같이 표현할 수 있으며, 이때 $(u_1)_I$, $(u_1)_P$, $(u_1)_S$ 및 $(u_3)_I$, $(u_3)_P$, $(u_3)_S$ 는 입사파와 반사되는 P파 및 S파의 x_1 및 x_3 방향 성분을 각각 나타낸다.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = (u_1)_I + (u_1)_P + (u_1)_S, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = (u_3)_I + (u_3)_P + (u_3)_S \quad (8)$$

식 (1)과 (2)는 다음 식 (9) 및 (10)과 같이 표현할 수 있다

$$\sigma = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} = a\rho V_p \dot{u}_1 \quad (9)$$

$$\tau = 2\mu\varepsilon_{13} = \mu(u_{1,3} + u_{3,1}) = b\rho V_s \dot{u}_3 \quad (10)$$

3.2 P파 입사에 따른 흡수경계조건의 최적화

식 (5)~(7)를 식 (8)에 삽입하여 u_1 과 u_3 를 구한 후, 이를 식 (9)와 (10)에 삽입하면 다음 식 (11) 및 (12)를 얻을 수 있다.

$$\left\{ 1 - 2s^2 \cos^2 \theta_p + a \sin \theta_p \left(\frac{P}{I} \right) + \left\{ \sin 2\theta_S + a \cos \theta \right\} \left(\frac{S}{I} \right) \right\} = 2s^2 \cos^2 \theta - 1 + a \sin \theta \quad (11)$$

$$\left\{ b \cos \theta_S + s^2 \sin 2\theta_p \left(\frac{P}{I} \right) + \left\{ \cos 2\theta_S - b \sin \theta_S \right\} \left(\frac{S}{I} \right) \right\} = s^2 \sin 2\theta - b \cos \theta_S \quad (12)$$

여기서 s 는 P파 및 S파의 전파속도 비로서 식 (13)과 같이 포아송비(ν)로서 정의된다.

$$s = \frac{V_S}{V_p} = \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right)^{1/2} \quad (13)$$

식 (8)로부터 입사파(P파)와 반사파(P파, S파)의 진폭을 식 (14)와 같이 나타낼 수 있으며,

$$\begin{aligned}|u_1| &= |(u_1)_I \cos \theta - (u_3)_I \sin \theta| = k_p |I| \\ |u_P| &= |(u_1)_P \cos \theta_P + (u_3)_P \sin \theta_P| = k_p |P| \\ |u_S| &= |(u_1)_S \sin \theta_S - (u_3)_S \cos \theta_S| = k_S |S|\end{aligned}\quad (14)$$

식 (14)로부터 입사파(P파)에 대한 반사파(P파, S파)의 진폭비를 식 (15)와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}|u_P/u_1| &= |P/I| \\ |u_S/u_1| &= (k_S/k_p) |S/I| = \frac{1}{s} |S/I|\end{aligned}\quad (15)$$

흡수경계의 성능을 정량적으로 산출하기 위해 그림 1과 식 (15)를 이용하여 경계면에서의 단위

면적당 입사파 에너지에 대한 반사파의 에너지비(E_R)를 식 (16)과 같이 정의한다(Lysmer-Kuhlemeyer, 1969).

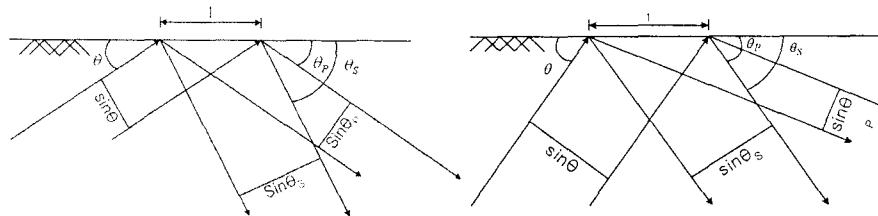


그림 1. P파 입사시의 단위면적당 입사파 및 반사파

그림 2. S파 입사시의 단위면적당 입사파 및 반사파

$$E_R = |u_P / u_I|^2 + s \frac{\sin \theta_S}{\sin \theta} |u_S / u_I|^2 \quad (16)$$

경계면에서의 단위 면적당 도달하는 에너지는 그림 1과 같이 $\sin \theta$ 에 비례하므로 입사각에 따른 흡수경계의 흡수율 $AR(\theta)$ 는 식 (17)과 같이 정의할 수 있으며, 이로부터 모든 입사각에 대한 평균 흡수율을 식 (18)로 정의할 수 있다. 여기서 AR(Absorption Ratio)은 흡수율을 의미한다.

$$AR(\theta) = 1 - E_R \sin \theta, \quad AR = \frac{\int_{0}^{\pi} 1 - E_R \sin \theta d\theta}{\int_{0}^{\pi} d\theta} \quad (17), (18)$$

이제 식 (1), (2)에서의 a, b값을 식 (17)의 입사각에 따른 흡수율이 최대가 되도록 결정하면 표 2의 값을 얻을 수 있다.

표 2. P파 입사시 흡수경계 계수 값

Poisson's ratio	Coefficient	Incident angle								
		10	20	30	40	50	60	70	80	90
0.10	a	0.794	0.629	0.667	0.744	0.826	0.898	0.954	0.988	1.000
	b	0.232	0.456	0.667	0.857	1.021	1.155	1.253	1.313	1.345
0.20	a	1.570	0.987	0.875	0.871	0.901	0.938	0.971	0.992	1.000
	b	0.213	0.419	0.612	0.787	0.938	1.061	1.151	1.206	1.236
0.30	a	2.568	1.449	1.143	1.034	0.997	0.990	0.993	0.998	1.000
	b	0.186	0.366	0.535	0.687	0.819	0.926	1.005	1.053	1.081
0.4	a	3.898	2.063	1.500	1.251	1.126	1.058	1.023	1.005	1.000
	b	0.142	0.279	0.408	0.525	0.625	0.707	0.767	0.804	0.828

그림 3는 표 2의 값을 적용하여 산출된 식 (17)의 흡수율을 나타낸다.

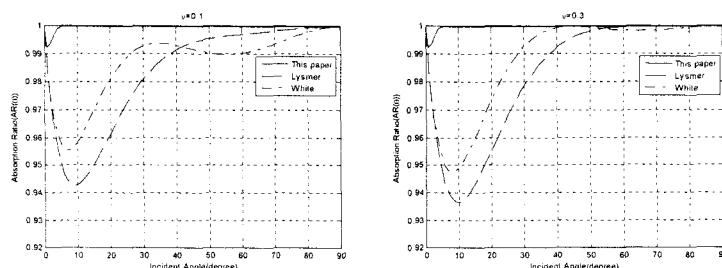


그림 3. P파 입사시의 입사각에 따른 흡수율

그림 3으로부터 P파의 입사각에 따라 식 (17)을 최대화하는 계수 a, b값을 사용하였을 경우, 모든 입사각에서 보다 향상된 흡수율을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

3.3 S파 입사에 따른 흡수경계조건의 측적화

S파가 경계면에 입사하는 경우는 입계각(Critical angle)이 발생하게 되는데, 입계각 이상의 입사각에 대해서는 P파와 S파가 동시에 반사되게 되나, 입계각 이하의 입사각에 대해서는 S파만이 반사되고 P파는 표면을 따라 전파되게 된다. 따라서, 입계각보다 큰경우(CASE I)와 작은 경우(CASE II)로 구분하여 흡수경계의 성능을 조사한다. 이때 3.1절에서 P파가 입사하는 경우와 같은 방법으로 식 (6), (7)을 식(8)에 삽입하여 u_1 과 u_3 를 구한 후 이를 식 (9), (10)에 대입하면 다음 식 (19), (20)을 얻을 수 있다.

CASE I : Angle θ greater than the critical angle θ_c

$$\begin{aligned} |u_P/u_I| &= (k_P/k_S)|P/I| = s|P/I| \\ |u_S/u_I| &= |S/I| \end{aligned} \quad (19)$$

CASE II : Angle θ less than the critical angle θ_c

$$\begin{aligned} |u_P/u_I| &= \cos\theta|P/I| \\ |u_S/u_I| &= |S/I| \end{aligned} \quad (20)$$

또한, 그림 2와 식 (19), (20)을 이용하여 경계면에서의 단위 면적당 입사파 에너지에 대한 반사파의 에너지비(E_R)를 식 (21)과 같이 정의한다

$$E_R = \left| u_S / u_I \right|^2 + \frac{1}{s} \frac{\sin\theta_p}{\sin\theta} \left| u_P / u_I \right|^2 \quad \text{for } \theta \geq \theta_c, \quad E_R = \left| u_S / u_I \right|^2 \quad \text{for } \theta \leq \theta_c \quad (21)$$

이제 식 (1), (2)에서의 a, b값을 식 (17)의 입사각에 따른 흡수율이 최대가 되도록 결정하면 표 3의 값을 얻을 수 있다.

표 3. S파 입사시 흡수경계 계수 값

Poisson's ratio	Coefficient	Incident angle								
		10	20	30	40	50	60	70	80	90
0.10	a	0.928	0.999	1.044	1.007	1.021	1.155	1.253	1.313	1.341
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.227	0.577	0.815	0.954	1.000
0.20	a	0.813	0.895	0.952	0.925	0.935	1.061	1.151	1.206	1.232
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.223	0.577	0.815	0.954	1.000
0.30	a	0.675	0.763	0.825	0.807	0.823	0.926	1.005	1.053	1.075
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.232	0.577	0.815	0.954	1.000
0.4	a	0.487	0.569	0.627	0.616	0.628	0.703	0.767	0.804	0.821
	b	0.000	0.000	0.000	0.000	0.231	0.574	0.815	0.954	1.000

그림 4는 표 3의 값을 적용하여 산출된 식 (17)의 흡수율을 나타낸다.

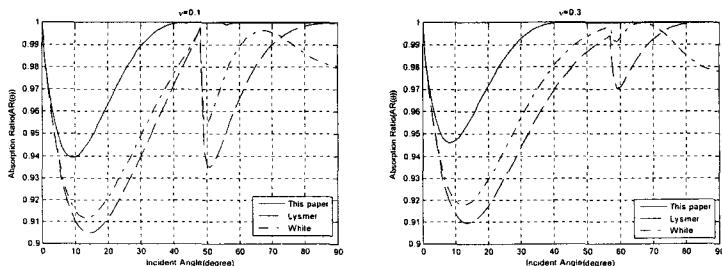


그림 4. S파 입사시의 입사각에 따른 흡수율