

## 플랙탈 이론을 활용한 콘관입시험 결과의 새로운 보간법 개발

### Development of Alternative Interpolation method of CPT Data using Fractal Theory

유 찬<sup>1)</sup>, Chan Yu, 정성모<sup>2)</sup>, Sung-Mo Jung, 정경식<sup>3)</sup>, Kyoung-Sik Jung

<sup>1)</sup> 경상대학교 농공학과 조교수, Assist. Professor, Dept. of Agri Eng, Gyeongsang Natl' Univ.

<sup>2)</sup> (주)만영엔지니어링 지반사업부 상무이사, Managing Director, Geotechnical Department, Manyong Construction Eng. Consultant.

<sup>3)</sup> 에스텍컨설팅그룹 지반사업부 부장, General manager, Geotechnical Department, S-Tech. Consulting Group

**SYNOPSIS :** In this study, R/S analysis which was proposed by Mandelbrot & Wallis(1969) was applied to evaluate the presence of the fractal property in the cone tip resistance of in-situ CPT data. Hurst exponents( $H$ ) were evaluated in the range of 0.660~0.990 and the average was 0.875. It was confirmed that a cone tip resistance data had the characteristic of fractals and it was expected that cone tip resistance data sets are well approximated by a fBm process with an Hurst exponent near 0.875. It was also observed that the boundary between layers were obviously identified as a result of R/S analysis and it will be usage in practices.

**Key words :** Fractal, CPT(cone penetrometer test), R/S(rescaled range) analysis, Hurst exponent, Fractional brownian motion

## 1. 서론

지반공학자들에게 현장에서 측정되고 관측되는 다양한 자료는 설계나 시공 시에 구조물의 기능수행과 안정성확보를 위해 무엇보다도 중요한 것이다. 그러나 이러한 자료들 중에는 그 경향이 매우 불규칙하게 나타나서 실제 적용시 어려움을 겪는 경우가 많이 있다. 현재까지 이러한 자료들을 해석하는 기법은 선형보간의 개념이 주를 이루고 있어 최소자승법과 같은 단순 선형방법이나 좀 더 복잡한 경우에는 크리깅(Kriging) 등의 보간법을 사용하여 그 경향을 분석하여 설계나 시공에 반영하는 것이 일반적이다.

그러나 이러한 보간 방법들은 지반의 비등방, 비균질적인 특성을 충분히 반영하지 못하고 있으며, 그 원인으로 인하여 설계와 시공과정 중에는 항상 어느 정도의 오차를 인정할 수밖에 없는 실정이다. 그러나 수학적 측면에서 이와 같은 불규칙적인 자료들의 보간시에 불규칙성(randomness)을 반영하는 기법에 연구들이 많이 있었으며, 그 중 하나가 플랙탈(fractal)이론이다.

플랙탈이론은 1960년대 초부터 Mandelbrot가 주장하여 최근에는 많은 분야에서 그 적용성이 검증되고 있다. 이 이론의 기본 내용은 자연현상 속에서 나타나는 매우 복잡한 현상들 중에는 실제로 그 안에 일정한 질서가 존재하며, 그것을 기하학이나 통계 혹은 확률적인 측면에서 증명한 것이다(참고문헌 2. 참조). 실제로 이 이론은 경제학과 기초과학분야 그리고 최근에는 공학분야의 다양한 영역에서 활발하게 적용되고 있다.

따라서 본 연구에서는 콘관입시험값을 대상으로 지반조사 자료의 해석시 플랙탈 이론의 적용성을 검토해보고 그 분석과정 중에 콘관입 저항값의 불규칙성 정도를 판정할 수 있는 정량적인 값을 산정하고 평가하여 향후 관련연구에서 참고가 되도록하는데 목적이 있다.

## 2. fBm(fractional Brownian motion)

앞서 언급한 바와 같이 프랙탈 이론은 자연현상들에서 나타나는 복잡한 현상들을 설명하기 위한 하나의 수단이며, 이 과정에서 관찰된 자기유사성(self-similarity 혹은 self-affinity)의 성질을 이용하여 다양한 축적(scale)에서 변화상황을 실제와 유사하게 묘사하기 위하여 시도하는 기법으로서 이용되고 있다.

자기유사성은 프랙탈 이론의 근간을 이루는 내용으로서 보통은 ‘self-similarity’ 로 표현되며, ‘self-affinity’ 로 표현하는 경우도 있다. 두 경우는 유사성에 서로 약간의 차이가 있으며, 그 차이점은 그림 1과 같이 설명할 수 있다.

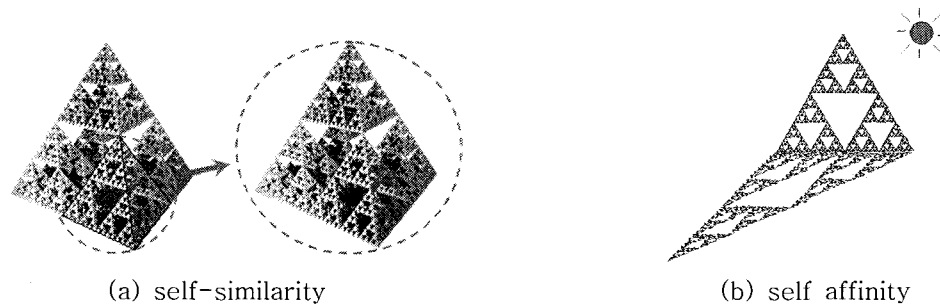


그림 1. self-similarity와 self-affinity의 차이

그림 1(a)는 self-similarity로서 임의의 구조체 내의 일부분은 전체의 구조와 기하학적으로 동일한 구조를 가지며, 따라서 그 물체를 관찰하는 축적(scale)을 변화시켜도 각 단계마다 관찰되는 전체 구조에서는 차이점을 발견할 수 없는 경우이다. 이에 반해서 self-affinity는 그림 1(b)와 같이 임의의 구조체 내의 일부분은 원래의 구조와 유사한 구조를 가지지만, 기하학적으로 정확하게 일치하지는 않는다. 그러나 일반좌표계에서 x- 와 y-축 방향으로 일정한 비율(scale ratio)의 변환과정을 거치면 기하학적으로 정확하게 일치될 수 있는 경우를 말한다.

프랙탈 성질을 가지는 이러한 복잡(complexity)한 문제들에서는 프랙탈 차원(fractal dimension;  $D$ ) 값을 이용하면 좀 더 명확하게 정량적으로 설명할 수 있다. 프랙탈적 특성인 자기유사성을 가지는 경우(현상 혹은 물체)들은 축적과 관찰값이 양대수(log-log) 그래프 상에서 선형관계를 가지며, 이때 선형관계의 기울기가 프랙탈 차원값이 된다. 이에 대한 자세한 과정은 3절 분석방법에서 자세히 설명하기로 한다.

한편 우리에게 익히 알려져 있는 브라운 운동(Brownian motion)은 1828년에 Robert Brown에 의해서 처음 그 원리가 소개되었으며, 1923년에는 Wiener에 의해서 임의의 두 시간  $t$  와  $t_0$  사이의 브라운 운동에 대한 난수함수(random function)  $X(t)$ 가 다음과 같이 제안되었다.

$$X(t) - X(t_0) \sim r |t - t_0|^H \quad (t \geq t_0) \quad (1)$$

여기서,  $r$  은 축적비(scale ratio)이며,  $H$  는 ‘Hurst 지수(Hurst exponent)’로서 1951년 Hurst에 의해서 처음 제안되었으며, 그 이후에 Mandelbrot에 의해서 발견되어 최근에 널리 활용되고 있다. 기본적으로 식 (1)은 장기간에 걸쳐 축적된 임의의 시계열 자료의 상관관계를 정량적으로 나타내는 방법으로서 이해할 수 있다.

Mandelbrot는 이 난수함수  $X(t)$ 에서 Hurst 지수( $H$ )의 값을  $0 < H < 1$  으로 확장하여 fBm(fractional brownian motion)으로 정의하였는데,  $H > 1/2$  의 경우는 자료 간에 양의 상관성을 가

지고  $H < 1/2$  의 경우에는 자료 간에 음의 상관성을 가진다(그림 2. 참조).

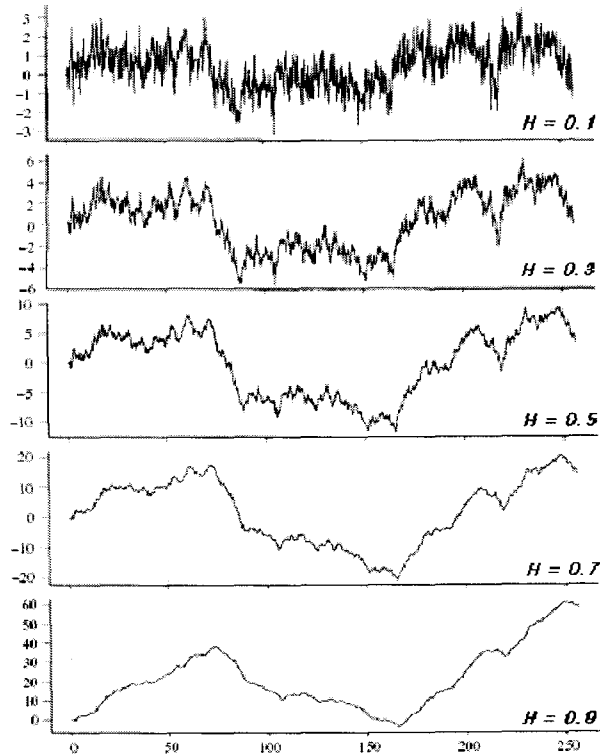


그림 2. Hurst 지수(H)에 따른  $fBm$ 의 변화 예(Falconer, 1988)

브라운 운동의 경우에  $H = 1/2 (=0.5)$ 인데, 이 의미는 자료간 장기간의 상관성은 존재하지 않으며, 일부 구간(즉, 몇 년 혹은 10년 단위)의 자료들만 상관성이 존재하는 경우를 말한다. 한편  $0 < H < 1/2$  은 자료간의 불규칙 정도가 브라운 운동보다도 심하여 매우 급격한 변화양상을 나타내는 경우이며,  $1/2 < H < 1$  의 경우에는 자료 간에 상관성이 존재하는 경우이다. 한편 이러한 해석법은 시계열 자료뿐만 아니라 공간적인 자료의 경우에서도 그대로 적용될 수 있으며, 지반 조사시 현장에서 적용하고 있는 CPT 혹은 기타 관입시험 등의 자료들에서 얻어지는 공간적으로 연속적으로 얻어지는 자료 해석에서도 그 적용성이 충분하다 하겠다(Feder, 1988; Mandelbrot & Van Ness, 1968 & Mandelbrot, 1983).

### 3. 분석방법 및 자료

#### 3.1 R/S(rescaled range)분석법

$fBm$ 특성을 가지는 자료로부터 Hurst 지수( $H$ )를 산정하는 방법은  $R/S$  (rescaled range)분석법이 있다.  $R/S$  분석에서  $R$  은 평균값을 제하고 표준편차로 나누었을 때의 차이로 정규화(normalized)된 범위(range)값이며,  $S$  는 표준편차이다. 여기서  $R/S$ 분석법의 기본 과정은 앞서 언급하였던 플렉탈의 기본 성질은 자기유사성의 원리를 그대로 이용하는 것이다. 기본적인 분석과정은 다음과 같은 단계를 거친다.

- i. 분석구간( $\Delta z$ )을 정한다.
- ii. 정규화된 범위값을 표준편차로 나눈다 :  $R/S$
- iii. 분석구간( $\Delta z$ )을 1/2(혹은 임의의 수치; self-affinity)로 줄여 가면서 i, ii 과정을 반복
- iv. 이러한 과정을 몇 단계 반복한다.
- v. 분석이 종료되면 양대수 그래프상에  $\log(\Delta z)$ - $\log(R/S)$ 관계를 플로팅한다.
- vi. v 단계에서 얻어진 직선의 기울기가 Hurst 지수( $H$ )가 된다.

실제로 콘관입 저항값에 대해서 적용하는 경우에는 각각의 분석구간에 대해서 Molz & Boman(1993)가 사용하였던 식을 수정한 아래의 식 (2)와 (3)을 적용하여  $R$  과  $S$  값을 계산해 낼 수 있다. 여기서,  $Gq_c$  은 정규화한 콘관입 저항값,  $z$  는 측정심도 그리고  $u$  는 전체범위 자료 중 고려한 지점이다.

$$R(z, n \cdot \Delta z) = \max \left( Gq_c(z+u) - \left[ Gq_c(z) + \frac{u}{n \cdot \Delta z} (Gq_c(z+n \cdot \Delta z) - Gq_c(z)) \right] \right) \quad (2)$$

$$- \min \left( Gq_c(z+u) - \left[ Gq_c(z) + \frac{u}{n \cdot \Delta z} (Gq_c(z+n \cdot \Delta z) - Gq_c(z)) \right] \right)$$

$$S(z, n \cdot \Delta z) = \left( \frac{\sum Gq_c^2(z+u)}{n \cdot \Delta z - 1} - \frac{(\sum Gq_c(z+u))^2}{(n \cdot \Delta z)^2 - n \cdot \Delta z} \right)^{1/2} \quad (3)$$

### 3.2 콘관입시험(CPT; cone penetrometer test) 및 자료

콘관입 시험기는 원통형 몸체의 선단부에 콘(면적 10 cm<sup>2</sup>, 콘의 각도 60°)이 부착된 관입체를 지중에 연속적으로 관입하면서 일정한 주기로 선단부에서 지지저항과 선단부 주변부에서 마찰저항 그리고 공극수압 등을 측정할 수 있는 장비로서 이미 전 세계적으로 현장에서 일반화되어 있는 측정 장비이다 (그림 2. 참조; IRTP, 1999). 측정결과는 지층구분, 토질특성, 밀도, 응력상태 그리고 전단강도 정수 등을 산정하는데 이용된다.

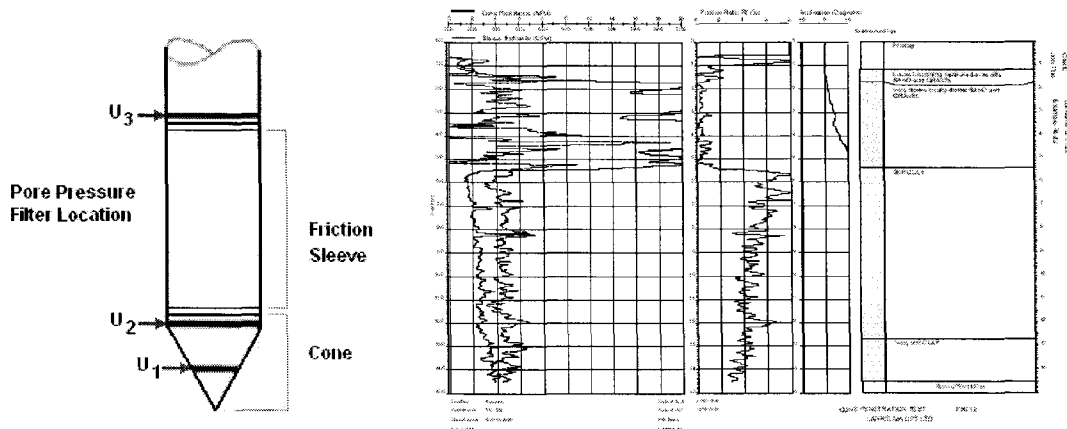


그림 3. 일반적인 (Piezo)콘관입 시험기의 구조와 결과의 예(IRTP, 1999)

한편 본 연구에서 해석을 위하여 사용한 자료는 부산지역에서 신항만 건설과 관련되어 기존에 조사된 결과를 활용하였으며, 본 지역의 지층구성은 표층은 매립층으로서 5~15m 두께로 형성되어 있었으며,

점토질 퇴적층(16~32m), 풍화토층 그리고 풍화암의 순으로 구성되어 있었다(Chung-suk, 2002; 그림 4. 참조).

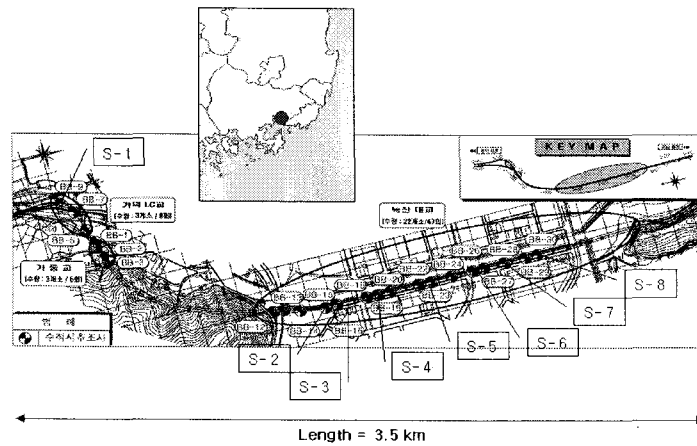


그림 4. 실험위치

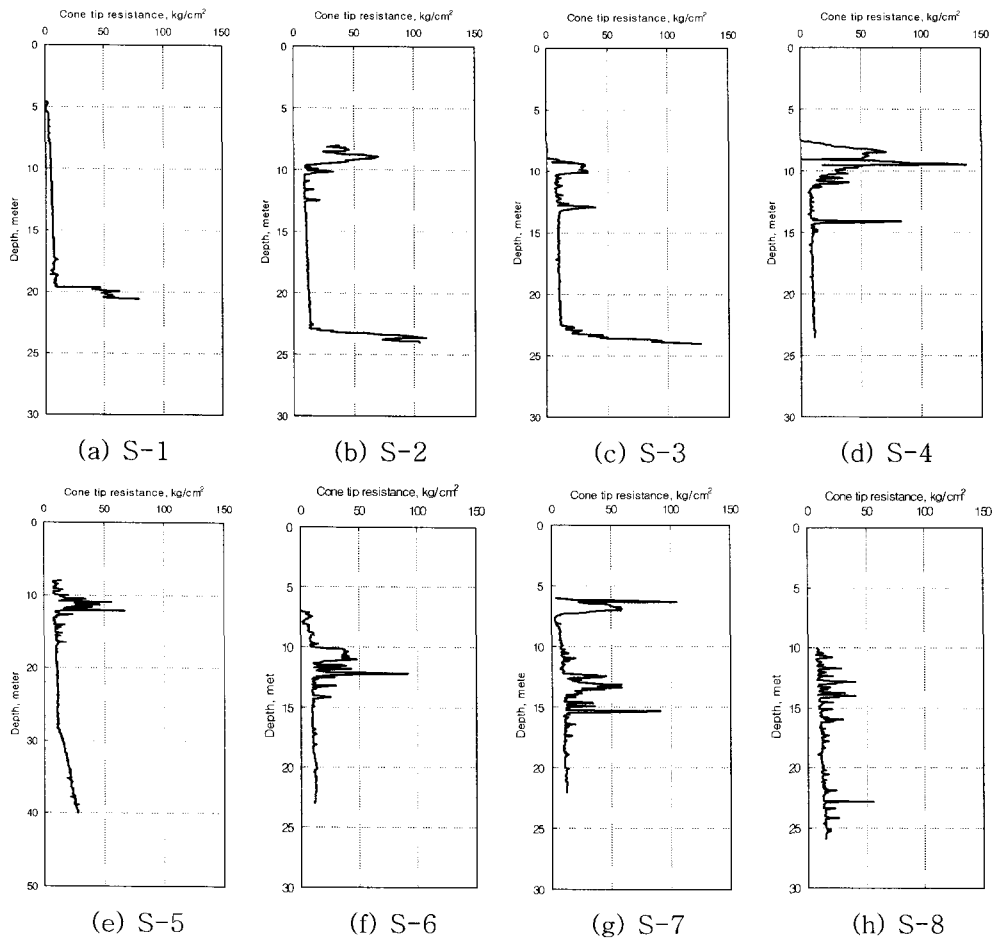
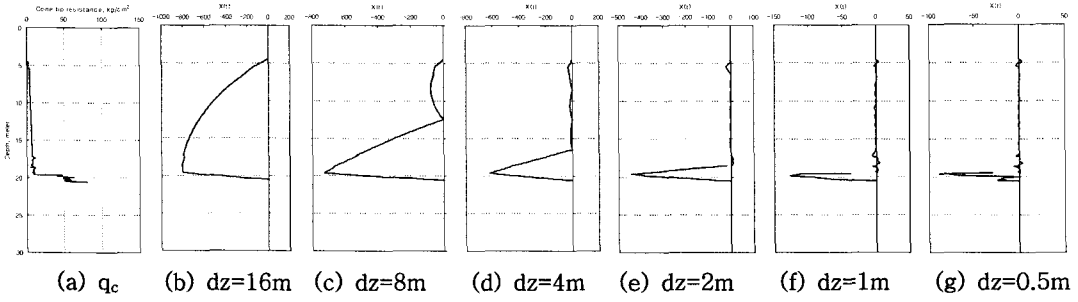


그림 5. 콘관입 시험과정 중 측정된 선단지지저항

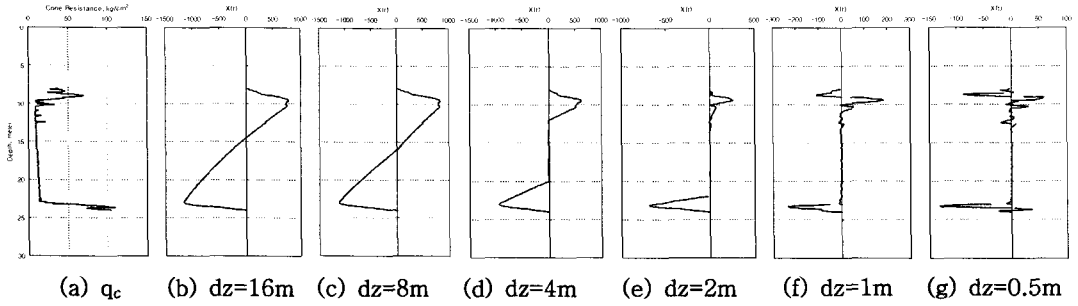
본 연구에서는 우선조사자료 중에서 콘관입 저항값의 특징이 상이한 8개 대표지점을 선정하여 분석을 실시하였다(그림 5 참조). 그림 5(a)는 심도 5m~19m까지 연약한 점성 퇴적토층에 대한 콘관입시험

결과이며, 그림 5(b)~그림 5(f)는 5m~15m 점성 퇴적토층 사이에 매립토 혹은 이질토층이 혼입되어 이 부분에서 콘관입 저항값이 크게 증가되는 경향을 보이고 있다. 한편 그림 5(g)와 그림 5(h)는 측정 구간 전체에서 콘관입 저항값이 매우 불규칙하게 나타나고 있는 경우로서 상부 매립토의 하중으로 인하여 원지반에 전단파괴가 발생하여 원지반토와 매립토가 혼합되어 있는 경우로 판단되었다.

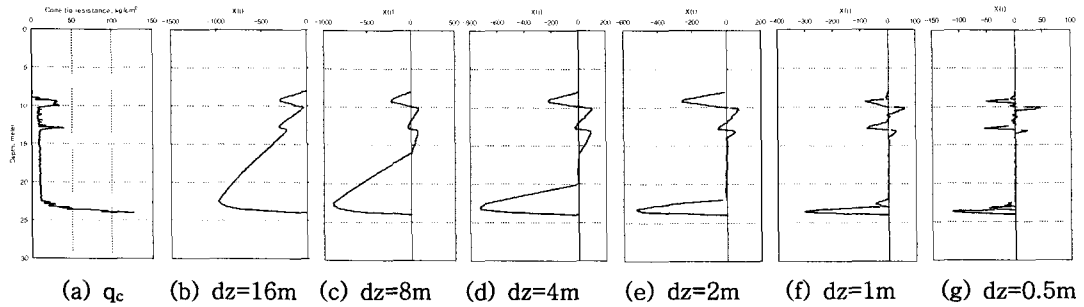
S-1



S-2



S-3



S-4

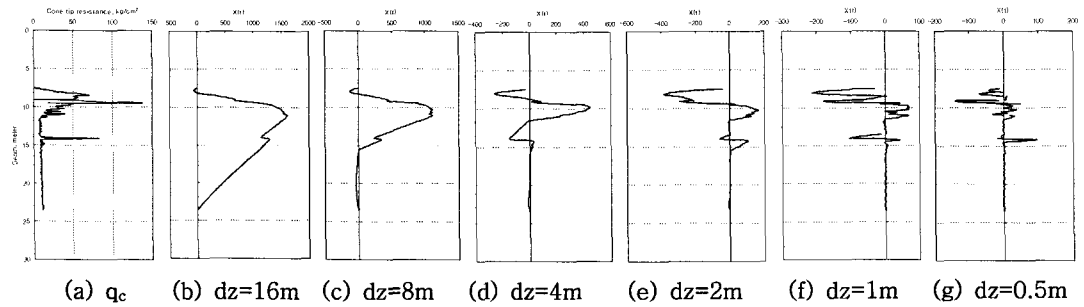
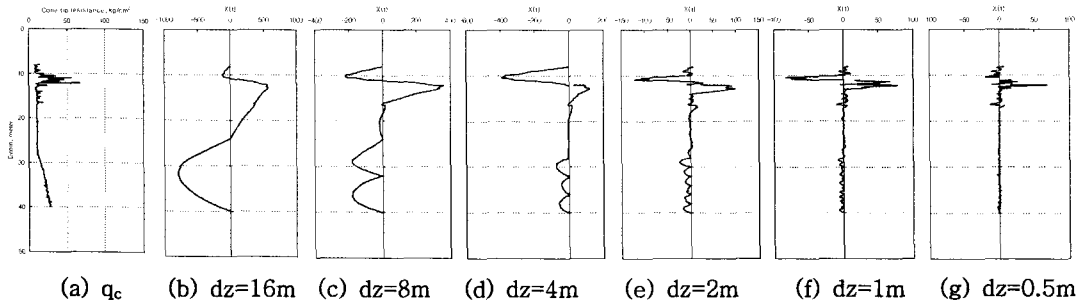
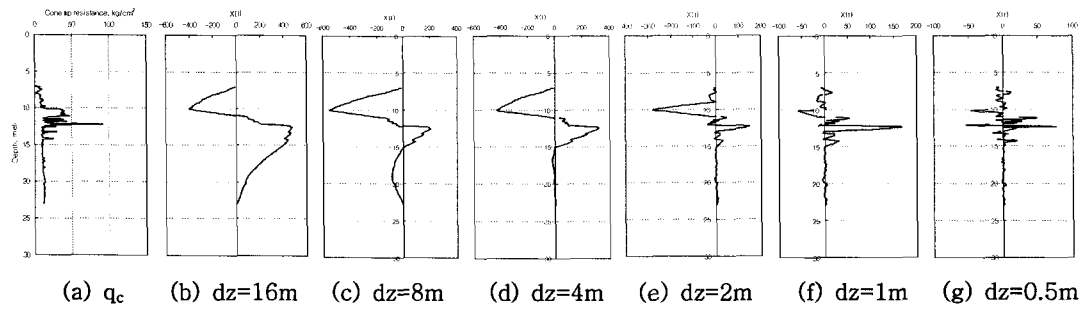


그림 6. Normalization analysis results with  $\Delta z = 16, 8, 4, 2, 1, 0.5m$

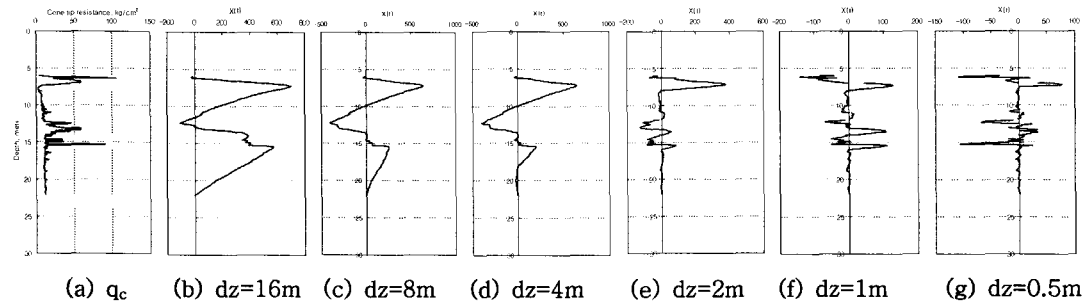
S-5



S-6



S-7



S-8

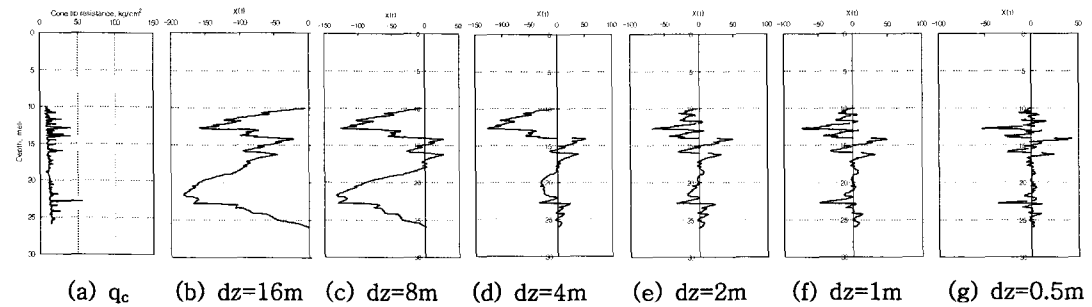


그림 6. Normalization analysis results with  $\Delta z = 16, 8, 4, 2, 1, 0.5m$ (continued)

#### 4. 결과 및 고찰

분석구간( $\Delta z=16, 8, 4, 2, 1, 0.5m$ )에 따라 정규화된 콘관입 저항값은 그림 6과 같으며, 그림에서는 정규화된 자료를 실험 결과값과 비교하여 나타내었다. 그림에서는 분석구간의 크기가 감소함에 따라서 비슷한 성질을 가지는 지층 간에는  $X(t)$  값의 크기에 큰 차이가 없는 것으로 판단되었으며, 따라서 정규

화 과정에서 유사한 지층의 확인이 가능한 것으로 예상되었다. 또한 이질층간의 경계면에서는  $X(t)$ 값의 기울기가 역전되는 현상이 정확하게 나타나고 있어 지층간의 경계면의 결정도 용이할 것으로 예상되었다. 이러한 결과는 기존에 많이 사용되고 있는 마찰비(friction ratio;  $R_f = (f_s/q_c) \times 100\%$ ) 혹은 도표를 이용하는 방법들과 함께 사용하면 복잡한 지층의 경우에는 비교수단으로서 또 하나의 방안으로 사용하면 자료해석의 신뢰성을 높일 수 있을 것으로 판단되었다.(Lunne et al., 1997).

그림 7은 콘관입 저항값 별 Hurst 지수값을 나타낸 것이다. 그림에서는 관입저항값의 변화가 크지 않을수록 1에 가까운 값을 나타내고 있고 변화가 급격하게 나타나는 S-8의 경우에는 0.660으로서 0.5(브라운 운동,  $H=0.5$ )에 가까워지는 것을 알 수 있다. 그러나 S-8의 경우에도  $H > 0.5$ 로서 콘관입 저항값이 자료 간에 양의 상관성을 가지고 실제로 S-8의 경우가 현장에서 얻어질 수 있는 가장 변화가 심한 경우라고 한다면 콘관입 저항값의 Hurst 지수( $H$ )  $> 0.5$ 라는 사실을 확인할 수 있었다.

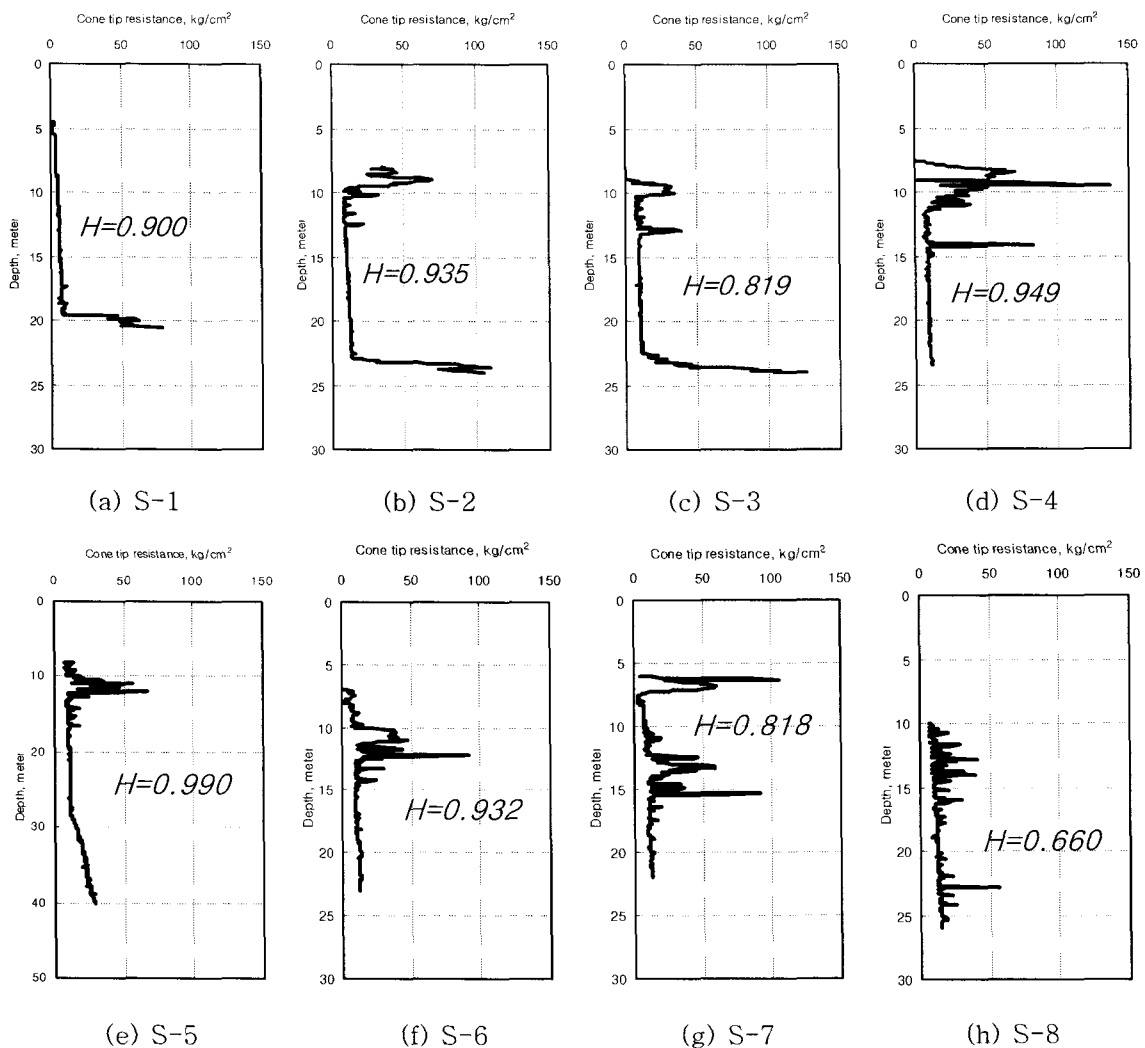


그림 7. 선단지지저항과 R/S 분석결과

그림 8과 표 1은 R/S분결결과를 정리한 것이다. 분석결과 Hurst 지수는 0.660~0.990 로 나타났으며, 평균값은 0.875로 계산되었다. 이러한 계산결과는 Madelbort & wallis(1968, 1969a, 1969b)가 주장한 범위 내에 있었으며, Feder(1988) 그리고 Molz et al.(1993, 1998) 등의 기존 연구결과들과 비



교했을 때, 자연현상에서 관찰되는 일반적인 범위에 속하였으며, 평균값도 지질을 대상으로 한 연구결과와 유사한 것으로 나타났다. 이는 콘관입 저항값이  $fB_m$  과정을 이용하여 모사될 수 있다는 사실을 말해주는 중요한 결과라고 말할 수 있다. Feder(1988)의 자료에서는 저수지의 수위변화( $H=0.72$ ), 태양의 흑점( $H=0.75$ ), 지구의 온도( $H=0.68$ ) 등의 자연현상들의 Hurst 지수를 정리되어 있다.

특히 Molz & Boman(1993)의 연구결과에서는 지질조사결과에서 지층 깊이에 따른 공극률( $n$ )과 수리전도도( $K$ )의 R/S분석결과, Hurst 지수의 평균값이 각각 약 0.820 및 0.855인 것으로 보고한 바 있는데, 이 결과는 본 연구의 결과와 유사한 범위로 나타났으며, 고려하는 심도에서는 차이가 있지만 두 연구결과가 모두 지반을 대상으로 한 결과라는 점에서 의의가 있다 하겠다. 그러나 아직까지 충분한 자료에 대한 해석이 이루어지지 않았으므로 추후 이에 대한 확인 연구는 계속 수행이 되어야 한다고 판단된다. 결과적으로 콘관입 시험결과는 Hurst 지수값을 이용하여  $fB_m$  과정으로 근사화 될 수 있으며, 이는 기존의 선형보간법이 아닌 지층의 불규칙성을 반영할 수 있는 보간법으로 활용될 수 있을 것이다.

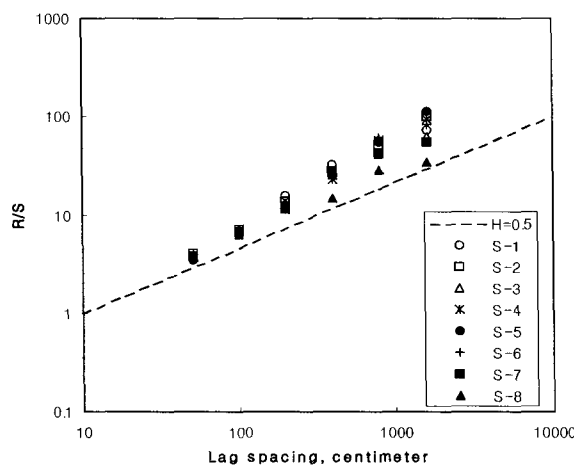


표 1. Summary of R/S analysis

| Data    | Thickness of layer(m) | Hurst's exponent | Local Fractal Dimension |
|---------|-----------------------|------------------|-------------------------|
| S-1     | 16                    | 0.900            | 1.100                   |
| S-2     | 16                    | 0.935            | 1.065                   |
| S-3     | 16                    | 0.819            | 1.181                   |
| S-4     | 16                    | 0.949            | 1.051                   |
| S-5     | 32                    | 0.990            | 1.010                   |
| S-6     | 16                    | 0.932            | 1.068                   |
| S-7     | 16                    | 0.818            | 1.182                   |
| S-8     | 16                    | 0.660            | 1.340                   |
| Average |                       | 0.875            | -                       |

그림 8. Rescaled range analysis results of CPTs

Feder(1988)에 의하면, Hurst지수와 프랙탈 차원 사이에는  $D = 2 - H$  관계가 있는 것으로 알려져 있다. 따라서 표 1에는 프랙탈차원( $D$ )값도 함께 계산하여 정리하였는데, 1.010~1.340 사이의 값을 가지는 것으로 나타났다.

한편 R/S 분석을 실시하는 과정에서는 자료의 양과 분석구간 크기의 범위결정이 적절한 Hurst 지수 산정에 큰 영향을 미칠 수 있는데, Rangarajan(2000)에 따르면 자료의 양이 적거나 전이구간 등이 포함된 자료의 사용 혹은 분석구간의 상한과 하한값에 대한 고찰이 없으면 적절한 Hurst 지수의 산정이 어렵다고 한 바 있다. 따라서 이러한 부분에도 추가연구가 이루어져야 할 것으로 판단되었다.

Hurst 지수를 이용한 모사과정은 신뢰성 보간(stochastic interpolation)과정이다. 모사과정에서는  $fB_m$  특성을 이용하여 관측점 사이에 임의의 지점에 대한 값을 보간하는 것이다. 이러한 작업을 수행할 수 있는 방법은 Monte-Carlo등 몇 가지 방법을 활용하면 된다. 그러나 이 부분에서도 지반공학에서 적용성이 가장 좋은 방법 등에 대한 비교는 추가로 연구가 수행되어야 하는 부분이다(참고문헌 2. 참조).

## 5. 결론

본 연구에서는 콘 관입 저항값의 Hurst 지수 산정을 위하여 몇 개의 실제 현장 자료에 대해서 R/S분석법을 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 본 연구에서 사용된 자료에 대한 분석결과 콘관입 저항값의 Hurst 지수( $H$ )는 0.660~0.990 범위에서 산정되었으며, 그 평균값은 0.875이었다. 이결과는 Feder(1988) 와 Molz & Boman(1993)의 연구결과와 비교했을 때, 자연현상에서 관찰되는 일반적인 범위에 속하였으며, 평균값도 지질을 대상으로 한 연구결과와 유사한 것으로 나타났다.
- (2) 위의 결과는 콘관입저항값이  $fBm$  과정을 통하여 모사가 가능하며, 이는 기존의 신뢰성 해석방법들을 이용하여 지반의 비등방 비균질성을 반영한 지반내 공간적인 변화양상을 추정할 수 있는 보간법으로 활용이 가능하다는 사실을 말해 주는 것이다.
- (3) 또한 R/S분석과정 중에서는 분석구간의 크기가 작아질수록 지층의 변화과정을 쉽게 파악할 수 있어 기존의 방법들과 함께 사용하면 복잡한 지층의 경우에는 비교수단으로서 또 하나의 방안으로 사용하면 자료해석의 신뢰성을 높일 수 있을 것으로 판단되었다.

## 참 고 문 헌

1. Falconer, K (2003), Fractal geometry - Mathematical foundations and applications 2nd ed., pp. 269, Wiley
2. Feder, J. (1988), Fractals, pp. 149~183, PLENUM
3. Lunne, T., P.K. Robertson, and J.J.M. Powell. (1997), Cone Penetration Testing in Geotechnical Practice, Blackie Academic & Professional, London.
4. Mandelbrot, B.B. (1983), The Fractal Geometry of Nature, Freeman
5. Mandelbrot, B.B. and J.R. Wallis (1969a), Some Long-Run Properties of Geophysical Records, Water Resource Research, Vol. 5., No. 2, pp. 321~340
6. Mandelbrot, B.B. and J.R. Wallis (1969b), Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence, Vol. 5., No. 5, pp. 967~988
7. Mandelbrot, B.B. and J.W. Van Ness (1968), Fractional brownian motions, fractional noises, and applications, SIAM Review, Vol 10, pp. 422~437
8. Mandelbrot, B.B. and J.R. Wallis (1968), Noah, Joseph and Operational Hydrology, Water Resource Research, Vol. 4., No. 5, pp. 909~918
9. Molz, F.J., T.A. Hewett, and G.K. Boman (1998), A Psedo-Fractal Model for Hydraulic Property Distributions in Porous Media, Fractals in Soil Science(Baveye, P., J-Y Parlange & B.A. Stewart ed.), pp. 341~372, CRC press
10. Molz, F.J. and Boman, G.K. (1993), A stochastic interpolation scheme in subsurface hydrology. Water resource research, Vol. 29, pp. 3769~3774
11. Rangarajan, G. (2000), Integrated approach to the assessment of long range correlation in time series data, Physical Review E, Vol. 61, No. 5, pp. 4991~5001
12. Chung-suk Eng. (2002), Proposal for the construction of road development in Pusan Newport construction project.
13. IRTP (1999), International Reference Test Procedure (IRTP) for the Cone Penetration Test (CPT) and the Cone Penetration Test with pore pressure (CPTU),. Report of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering