

회귀분석을 통한 역진자 시스템의 마찰력 측정에 관한 연구

박경윤, 박덕기, 좌동경, 홍석교
아주대학교 전자공학과

A Study on Friction Measurement of an Inverted Pendulum System using the Regression Analysis

Kyung-Yun Park, Duckgee Park, Dongkyoung Chwa, Suk-Kyo Hong
Department of Electrical and Computer Engineering, Ajou University

Abstract - This paper deals with the problem of friction measurement of an inverted pendulum system using the regression analysis and proposes a solution. The approach taken in this study is getting the friction from a regression relational expression between the motor voltage and the cart velocity of an inverted pendulum system. The result to compensate LQR (linear Quadratic Regulator) controller with the friction, which is measured in system, improved the performance of the system. Above all, the study has found that the proposed compensation of the friction reduces the oscillation of the cart position. In conclusion, the proposed method is useful when parameters in the given system model are not known.

1. 서 론

마찰력을 무시한 채 선형화한 시스템 모델을 사용하여 제어 시스템을 구현 했을 경우, 실제 응답에 리밋 싸이클(limit cycle)과 같은 원치 않는 응답이 발생하기도 한다[1]. 어떻게 시스템 응답에 악영향을 미치는 마찰력을 보상하는 방법에 관한 연구는 다양한 방식으로 진행되고 있다. 다변수 비선형 시스템에 포함된 마찰력을 비선형 관측기를 통해 추정하여, 추정된 마찰력을 보상하는 방법[2]은 시스템의 정확한 모델의 계수를 알아야 하는 단점이 있다. 본 논문에서 제시된 역진자 모터 전압과 수레 속도의 회귀식[3]으로부터 역진자 시스템에 존재 하는 마찰력(friction)을 측정하여 LQR 제어기에 보상함으로써 역진자 시스템의 수레 위치에 대한 응답 성능을 개선하는 방법은 시스템의 모델의 계수를 모르는 경우 유용하며, 구성이 쉽다는 장점이 있다. 반면, 마찰력 측정을 하는 행위는 불확실성(uncertainty)이 내포된 자료(data)의 수집, 분석, 추정 및 검정을 통하여 의사 결정에 필요한 정보의 획득과 처리 방법을 취하므로 오차를 포함한다. 과학적인 조사에서 얻어지는 자료로부터 더 유용한 결론을 도출하기 위해서 본 논문에서 역진자 시스템의 모터 전압과 수레 위치의 관계식 도출시 통계적인(statistical) 방법론[3]-[5]을 사용한다.

2. 본 론

2.1 마찰력 모형

이 논문에서는 그림 1의 쿨롱 마찰력 모형을 사용한다. 여기서 정지 마찰력과 운동 마찰력에 대해 구분하지 않는다.



〈그림 1〉 쿨롱 마찰력과 속도의 관계

일반적인 질량 m 의 운동 방정식을 표현 한다면 쿨롱 마찰력 $f(v)$ 의 영향은 식(1)과 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$m\dot{v} = u - f(v) \tag{1}$$

$$f(v) = a \operatorname{sgn}(v) \tag{2}$$

여기서 u 는 마찰력을 제외한 나머지 힘들의 합이고, $a > 0$ 이다.

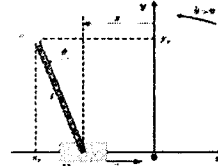
2.2 역진자 모델 동역학 방정식

실제 역진자 시스템에서 진자(pole)의 기울어진 각도와 그 각속도, 그리고 수레(cart)의 위치와 그 속도에 대해 수레와 미끄러짐 면에서 무시하지 못할 정도의 쿨롱 마찰력이 존재한다고 가정한다면, 비선형 동역학 방정식은 식(3)과 식(4)와 같이 표현된다.

$$u - f = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml \sin \theta \cdot \ddot{\theta} - ml \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \tag{3}$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + ml \cos \theta \cdot \ddot{x} - b_p \dot{\theta} \tag{4}$$

여기서 I 는 진자의 회전 관성 모멘트이고, b 와 b_p 는 각각 수레와 진자의 점성 마찰 계수(viscous friction coefficient)이다.



〈그림 2〉 역진자 시스템의 모형도

위의 동역학 방정식으로 표현된 역진자 시스템을 $\theta = 0^\circ$ 근처에서 선형화한 선형 모델을 이용하여 $x = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]$ 로 정의된 상태변수를 원하는 값으로 추종하도록 상태 궤환(state feedback) 안정화 제어기를 구성할 수 있다. 원하는 성능 지수를 만족하도록 하는 궤환 이득을 $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$ 라 하면, 우리가 알고 있는 쿨롱 마찰력이 \hat{f} 라 할 때, 이를 선형 제어기의 입력에 보상하면 제어 입력은

$$u = -Kx + \hat{f} \tag{5}$$

이 된다. 식(5)의 쿨롱 마찰력이 보상된 선형 제어 입력에 의한 새로운 평형점은

$$-K_1 x - K_2 \theta - f + \hat{f} = 0 \tag{6}$$

$$\sin \theta = 0 \tag{7}$$

로 바뀌게 된다. 선형 제어기에 정확히 알고 있는 마찰력을 보상해 준다면 $-f + \hat{f} = 0$ 이 되어 평형점은 $x = [0 \ m], \theta = 0^\circ$ 가 된다.

2.3 역진자 시스템의 모터 전압과 수레 속도의 관계식

정상상태(Steady state)에서 모터에 인가된 전압 V_m 과 수레의 속도 v 의 전달함수는 식(8)과 같이 표현된다.

$$\frac{v}{V_m} = \frac{K_v}{1 + s\tau} \tag{8}$$

여기서 K_v 는 속도 이득(velocity gain)이고, τ 는 시상수(time constant)이다. 모터에 일정한 전압이 가해 질 때, 식(8)에 대한 시 영역 응답은 식(9)와 같다.

$$\dot{v}(t) = \frac{K_v}{\tau} V_m(t) - \frac{1}{\tau} v(t) \tag{9}$$

만일 수레의 움직임에 마찰력이 영향을 준다면 수레에 대한 운동 방정식은

$$M\dot{v}(t) = \sum F - f \tag{10}$$

로 주어진다. 여기서 f 는 식(2)로 표현된 쿨롱마찰력이며, $\sum F$ 는 마찰력을 제외한 모든 힘의 합이다. 식(9)와 식(10)에 의하여 마찰력이 추가된 수레의 운동 방정식은 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\dot{v}(t) = M \frac{K_v}{\tau} V_m(t) - \frac{M}{\tau} v(t) - f \tag{11}$$

만일 수레의 일정한 전압이 가해진다면, 식(11)의 미분방정식의 해는 식(12)로 주어진다.

$$v(t) = K_v V_m - \frac{\tau}{M} f - C e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{12}$$

수레의 모터에 인가된 전압이 일정하게 유지된다면 식(12)의 우항에서 $C e^{-\frac{t}{\tau}}$ 는 결국 0으로 수렴하게 되므로 정상상태에 접어든 수레의 속도는 식(13)으로 결정된다.

$$v(t) = K_v V_m - \frac{\tau}{M} f \tag{13}$$

2.4 마찰력 보상 제어기

식(3)과 식(4)로 표현된 비선형 동역학식을 $\theta = 0^\circ$ 에서 선형화하여

식(14)와 식(15)와 같이 마찰력을 포함하는 선형 모델을 완성할 수 있다.

$$\ddot{x} = \frac{-(I+ml^2)bx - mlb_p\dot{\theta} + m^2l^2g\theta + (I+ml^2)u - (I+ml^2)f}{(M+m)I + Mml^2} \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)mgI\theta - (M+m)b_p\dot{\theta} - mlbx + mlu - mlf}{(M+m)I + Mml^2} \quad (15)$$

식(14)와 식(15)로 새롭게 정의된 시스템에서 마찰력을 고려하지 않고 설계된 선형 제어기에 측정된 마찰력을 보상한 상태 제환 제어 입력은 식 (16)의 형태로 결론을 내릴 수 있다.

$$u = -Kx - \dot{f} \quad (16)$$

만일 수레를 특정 위치에서 안정화하고자 한다면 제어 입력은 원하는 수레의 위치 x_d 에 대해

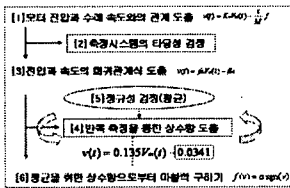
$$u = -K[x - x_d \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}]^T + \dot{f} \quad (17)$$

로 수레가 원하는 위치를 추종하도록 설계할 수 있다.

2.5 실험 및 결과

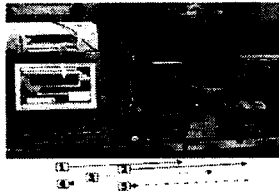
2.5.1 마찰력 측정

마찰력 측정 과정을 살펴보면 그림 3과 같다.



<그림 3> 마찰력 측정 과정

수레 속도와 모터 전압과의 관계식 도출을 위한 측정에 앞서 측정 시스템의 타당성(Gage R&R Study)[5] 확인을 실시한다.



<그림 4> Gage R&R Study 실험 환경

그림 4와 같이 수레 레일을 구간별로 방향에 따라 구분하여 2명의 측정자가 반복하여 모터 전압과 수레 속도와의 관계식의 상수항을 도출하여 시스템의 타당성을 MINITAB 통계 소프트웨어[5]를 이용하여 분석한 결과 그림 5와 같이 %Study Var = 5.98, NDC = 23으로 본 시스템이 적합함을 알 수 있다.

<그림 5> Gage R&R Study 결과

역진자 시스템 모터에 인가된 전압 V_m 과 수레의 속도 v 의 150개 쌍의 측정 데이터로부터 최소 제곱 추정(least squares estimation) 방법을 이용하여 회귀식 도출한다. 이와 같은 회귀관계식 도출을 위한 측정을 중심 극한 정리[4] 이론에 근거하여 전 구간에서 30회 반복한다. 그리고, 상수항의 정규성 검정을 하고자 H_0 “정규분포를 따른다”와 H_1 “정규분포를 따르지 않는다”라는 가설을 설정을 한다. 정규성검정 결과는 P-value(=0.157) > α (=0.05)므로, H_0 가 채택된다. 이로써, 상수항이 정규 분포함을 확인할 수 있으며 마찰력을 포함한 상수항의 평균은 0.034로 의미가 있음을 알 수 있다. 측정된 상수항 0.034는 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$0.034 = \frac{\tau}{M} \dot{f} \quad (18)$$

여기서 $\tau = 0.053s$, $M = 0.94 \text{ Kg}$ 이다. 식(18)에 τ 와 M 값을 대입하여 $\dot{f}(v) = a \text{sgn}(v)$ 의 마찰력 상수 a 를 구하면 $0.063 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ 이다.

2.5.2 측정된 마찰력의 보상

마찰력 보상을 위해 사용된 역진자 시스템은 Quanser사에서 제작된 IP02 모델로서 실제 모습과 실험 환경은 그림 4과 같다. 이 논문에서 주로 고려한 클론 마찰력은 수레에 고정된 모터의 회전축에 장착되어 있는 기어와 수레의 레일(rail)에서 발생한다고 가정하였다. 이 실험에서 사용된 역진자의 물리적인 실제 값은 표 1과 같다.

<표 1> 역진자 계수의 실제 값

항목	실제값 (단위)	항목	실제값 (단위)
M	0.94 Kg	b	6.4 Ns / m
m	0.23 Kg	b_p	0.0024 Nms / rad
l	0.33 m	I	$7.8837 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

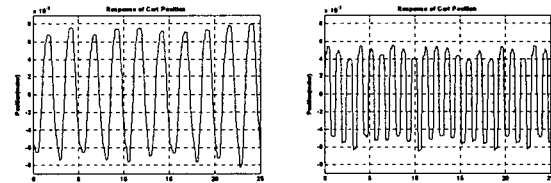
역진자의 안정화를 위한 상태 제환 제어기의 이득 상수 K 는 수레의 위치와 진자의 각도에 대해 원하는 성능 지표를 만족하도록 LQR 기법을 통해 다음과 같이 구하였다.

$$K = [-50 \quad -50.26 \quad 180.163 \quad 28.49] \quad (19)$$

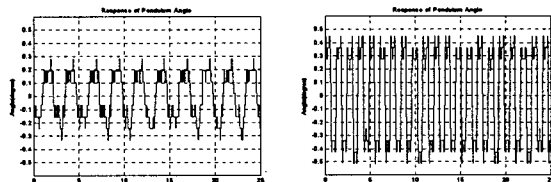
이를 통해 2.4절에서의 제어기를 역진자 시스템에 적용하였다.

2.5.3 실험 결과 및 고찰

측정된 마찰력을 LQR제어기에 보상한 결과를 보면, 먼저 그림 6에서 보는 바와 같이 수레의 위치에 대한 응답 특성은 그 진동폭이 15mm에서 10mm로 5mm 개선 됨을 알 수 있다. 반면, 그림 7에서 진자 각도의 응답특성은 진동폭이 0.6degree에서 0.9degree로 약간의 증가된 현상을 볼 수 있다.



<그림 6> 마찰력 보상 전(좌측)후(우측) 수레의 위치 응답 특성



<그림 7> 마찰력 보상 전(좌측)후(우측) 진자의 각도 응답 특성

3. 결 론

본 논문에서 제시된 역진자 시스템에 존재하는 마찰력을 측정하는 방법은 표본을 취함으로써 발생하는 표본오차와 측정시 발생하는 측정 오차가 포함된다. 이런 이유로 먼저 측정 오차를 최소화하고자 측정시스템의 정밀도 분석을 실시한 후 역진자 시스템의 모터 전압과 수레 속도 데이터를 측정하였다. 측정된 데이터로부터 최소 제곱추정 방법을 통해 회귀식을 도출하는 과정을 30회 반복하여 얻어진 회귀식의 상수항의 평균이 유의함을 정규성 검정을 통해 확보하였다. 상수항으로부터 마찰력 상수 a 를 구하여 LQR 제어기에 보상한 결과 역진자 시스템의 수레 위치에 대한 응답 성능이 개선되는 효과를 확인하였으나, 마찰력 측정과정에서 발생한 오차, 실제 확보 되지 못한 마찰력의 시변성, 그 외 진자 회전운동이 수레에 미치는 수직력등이 포함되어 있기 때문에 진동 성분이 완전히 제거되지 않는다. 마찰력의 시변성을 고려한 마찰력 모형을 이용하여 보다 정확한 측정이 이뤄지고, 이를 시스템에 반영한다면 시스템 성능은 보다 향상될 것으로 보인다.

[참 고 문 헌]

- [1]Henrick Olsson and Karl Johan Astrom, "Friction Generated Limit Cycles", IEEE Trans. Control Systems Technology. vol. 9, (4), pp. 629-636, 2001.
- [2]박덕기, 좌동경, 홍석교, "마찰력 추정과 보상을 통한 역진자 시스템의 제어 성능 개선", 제어자동화시스템공학회(투고), 2006
- [3]강근석, 김충락, 회귀분석, 교우사, 서울, pp.31-82, 2005.
- [4]고승곤, 양완연, 오현숙, 일반통계학, 교우사, 서울, pp.232-439, 2005.
- [5]이승훈, MINITAB 측정시스템 분석, 이레테크, 경기, pp.11-127, 2002.