2006년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2006. 7. 12 - 14

불확정성 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연 종속 안정화 조건

이연규, 배진호, 김진훈
충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 제어계측공학과

New delay-dependent stability criterion for uncertain time-delayed systems

Yearn-Gui Yi, Jin-Ho Bae, Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Eng. Chung-buk National University

Abstract - 이 논문에서는 불확적성을 지닌 시간지연 선형시스템에 대한 새로운 안정화 조건을 유도한다. 기존의 안정화 조건보다 향상된 안정화 조건은 이전의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 보다 일반화 한 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수와 LMI 변수들간의 관계성을 표현해주는 자유행렬 변수의 개념을 이용한 개선된 형태의 벡터-행렬 등식에 의하여 유도되어진다. 새로운 안정화 조건은 LMI 형태로 제시되었기 때문에 제시된 안정화 조건의 유용성을 쉽게 검증 가능할 뿐만 아니라 주어진 예제를 통한 기존의 결과들과의 비교를 통해 이전의 결과들보다 보다 더 큰 시간지연 값 및 불확정량에 대하여도 안정성을 보장해 줌을 확인할 수 있다.

1. 서 론

시스템의 상태방정식에 불확정량을 포함하고 있는 시간 지연 선형시스템에 대한 안정화 조건을 구하는 문제는 시스템의 불확정량 및 시간 지연 항이 시스템의 안정성이나 성능에 대한 저해요인으로서 작용하기 때문에 오랫동안 흥미로운 연구의 대상이 되어 왔다 [2]-[11]. 우선 시간지연 선형시스템의 안정화 조건을 구하는 문제는 크게 시간지연 독립 안정화 조건 및 시간지연 종속 안정화 조건을 구하는 두 가지로 유형으로 분류할 수 있는 데 전자는 비교적 간단한 형태로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수와 시스템 상태 방정식 내에 정의된 상태변수의 대입을 적용하여 비교적 간단한 LMI 형태의 안정화 조건을 구하는 것이 가능하다. 시간지연 종속 안정화 조건의 경우에는 안정 조건 유도 시에 필요한 다양한 교차항들을 표현하기 위해 시간지연 독립의 경우에 비해 상당히 복잡한 형태의 Lyapunov-Krasoviskii 후보 함수를 정의한 후, 시스템의 상태 변수, Newton-Leibnitz 방정식, 교차항에 대한 벡터-행렬 부등식 등의 대입을 통하여 시간지연 종속 안정화 조건을 제시할 수 있다. 그러나 이러한 시간지연 종속 안정 조건은 비교적 보수적인 결과를 나타내기 때문에 보수적 결과의 주요한 원인이 되는 벡터-행렬 부등식 대입이 없이 LMI 변수들 간의 관계성을 적절히 표현할 수 있는 자유 행렬 변수를 포함하는 관계식의 대입을 통하여 안정성을 유지하면서도 보다 큰 시간지연을 허용할 수 있는 LMI 표현을 구하는 것이 중요한 문제의 해결 방안으로 제시되어 왔다. 따라서 이 논문에서는 이전의 보수적 결과의 원인을 해결하기 위해 안정 조건의 유도 시에 나타날 수 있는 다양한 항들 사이의 관계성을 표현해 줄 수 있는 보다 확장된 형태의 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 제시한 후, 이 결과를 바탕으로 시스템의 상태방정식 내에 불확정량을 포함하고 있는 시간지연 선형 시스템에 대한 안정 조건을 LMI 형태로 유도한다 이 논문은 다음과 같은 순서로 구성된다. 2장에서는 대상이 되는 불확정 시간지연 시스템과 예비결과를 제시한 후 3장에서는 새로운 Lyapunov- Krasovskii 후보 함수를 이용하여 유도되는 주요결과를 제시한다. 4장에서는 잘 알려진 수치 예제를 통하여 결과로 제시된 안정 조건의 유용성 및 효율성을 예시한 후, 5장에서 결론을 맺는다.

표기법 : I_n 및 0는 각각 적절한 차원을 갖는 $n\times n$ 항등행렬 및 영행렬을 나타내며 $X<Y$ (혹은 $X\le Y$)는 행렬 $X-Y$ 가 음확정 (혹은 준음확정)임을 나타낸다. 또한, 행렬 내의 ($\star$)는 전치된 항을 나타내며 $x_t=x(t+\theta),-h\le\theta\le 0$이다. 마지막으로, 행렬 $U_1, U_2, U_3 \in R^{n\times 3n}$는 다음과 같이 정의된다.

$$U_1=[I_n:0:0],\ U_2=[0:I_n:0],\ U_3=[0:0:I_n] \qquad (1)$$

2. 문제 기술 및 예비 결과

우선 불확정량을 포함하고 있는 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연 종속 안정 조건을 유도하기 위하여 안정 조건 유도의 대상이 되는 불확정 시간지연 선형시스템을 다음과 같이 제시한다.

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_d+\Delta A_d(t)]x[t-d(t)]$$

$$x(t)=\phi(t),\quad \forall t\in[-h,0] \qquad (2)$$

여기서 $x\in R^n$은 시스템의 상태, $\phi(t)\in R^n$은 초기 상태값, $A,A_d\in R^n$는 값이 알려진 상수 행렬이며 시간지연 값 $d(t)$는 아래의 조건을 만족하는 스칼라 변수이다.

$$0\le d(t)\le h,\quad \dot{d}(t)\le\mu\le 1 \qquad (3)$$

다음으로 시간에 따라 변화하는 시스템의 불확정량 $\Delta A(t),\Delta A_d(t)$는 아래의 조건을 만족 한다 .

$$[\Delta A(t)\ \ \Delta A_d(t)]=DF(t)[\,E(t)\ \ E_d\,] \qquad (4)$$

여기서 D,E,E_d는 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이며 $F(t)$는 다음의 조건을 만족하는 Labesque 측정가능 한 실변수 행렬이다.

$$F^T(t)F(t)\le I,\quad \forall t.$$

불확정 시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 문제는 (2)로 정의된 시간지연 선형시스템에 대하여 (3)과 (4)의 조건을 만족하는 시간지연 값과 불확정량에 대하여 안정함을 보장하는 LMI 조건을 구하는 것이다. 아래의 보조정리는 다음에 제시되는 주요결과를 유도하는데 중요하게 사용된다.

보조정리 1 : 행렬 $\Phi<0$와 실수 $0\le d(t)\le h$에 대하여 다음을 만족하면

$$\begin{bmatrix}\Phi & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+h\Psi<0$$

항상 다음이 성립한다.

$$V(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^T(t)\Phi\xi_1(t)+\int_{t-d(t)}^{t}\left\{[\xi_1^T(t):\xi_2^T(s)]\Psi\begin{bmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{bmatrix}\right\}ds<0$$

3. 주요 결과

아래의 정리는 (2)로 정의된 시스템에 대한 시간지연 종속 강인 안정성에 대한 결과이다.

정리 1 : 다음의 LMI를 동시에 만족하는 임의의 행렬 $P\in R^{n\times n}>0, S\in R^{n\times n}\ge 0, R\in R^{n\times n}\ge 0,\ Z\in R^{3n\times 3n}\ge 0, N\in R^{3n\times n}$, $L_1\in R^{3n\times n},L_2\in R^{3n\times n},M\in R^{3n\times n}$과 임의의 실수 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in R>0$ 가 존재하면 (2)로 정의된 불확정 시간지연 선형시스템은 (3)의 조건을 만족하는 모든 시간지연 값과 (4)로 정의된 불확정량에 대하여 점근적으로 안정하다.

$$\Phi_1=\begin{bmatrix}\Gamma_1+\varepsilon_1\Xi^T\Xi & L_1D\\ \star & -\varepsilon_1\end{bmatrix}<0 \qquad (5)$$

$$\Phi_2=\begin{bmatrix}\Gamma_1+\varepsilon_1\Xi^T\Xi & 0 & L_1D & 0\\ \star & 0 & 0 & 0\\ \star & \star & -\varepsilon_1 & 0\\ \star & \star & \star & 0\end{bmatrix}$$

$$+h\begin{bmatrix}\Gamma_2+\Phi_R+\varepsilon_2\Xi^T\Xi & \Gamma_3-NU_3-\Phi_R & 0 & L_2D\\ \star & -Z+\Phi_R & 0 & MD\\ \star & \star & 0 & 0\\ \star & \star & \star & -\varepsilon_2\end{bmatrix}<0 \qquad (6)$$

여기서 U_1,U_2,U_3는 (1)에 정의 되었고, 나머지 변수들에 대한 정의는 아

래와 같다.

$$\Gamma_1 = U_1^T P U_3 + U_3^T P U_1 + L_1 [A : A_d : -I] + [A : A_d : -I]^T L_1^T + N(U_1 - U_2) + hZ + (U_1 - U_2)^T N^T + U_1^T S U_1 - (1-\mu) U_2^T S U_2 + \mu (U_1 - U_2)^T R (U_1 - U_2)$$

$$\Gamma_2 = L_2 [A : A_d : -I_n] + [A : A_d : -I_n]^T L_2^T$$

$$\Gamma_3 = [A : A_d : -I_n]^T M^T, \qquad \Phi_R = U_1^T R U_3 + U_3^T R U_1$$

$$\Xi = [E : E_d : 0]$$

증명) 우선, (5)와 (6)에 Schur complement를 적용하여 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\Psi_1 = \Gamma_1 + \varepsilon_1 \Xi^T \Xi + \frac{1}{\varepsilon_1} L_1 D D^T L_1^T < 0 \tag{7}$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \Gamma_2 + \Phi_R + \varepsilon_2 \Xi^T \Xi & \Gamma_3 - NU_3 - \Phi_R \\ \star & -Z + \Phi_R \end{bmatrix} + \frac{h}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} L_2 D \\ MD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T L_2^T : D^T M^T \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

다음으로, Lyapunov-Krasovskii 후보 함수의 각항을 아래와 같이 각각 정의한다.

$$V_1(x_t) = x^T(t) P x(t) \tag{9}$$

$$V_2(x_t) = \int_{t-d(t)}^{t} \{ x^T(s) S x(s) \} ds \tag{10}$$

$$V_3(x_t) = \int_{t-h}^{t} \left\{ \int_{\theta}^{t} \xi_s^T Z \xi_s ds \right\} d\theta \tag{11}$$

$$V_4(x_t) = \int_{0}^{d(t)} \{ [x(t) - x(t-\theta)]^T R [x(t) - x(t-\theta)] \} d\theta \tag{12}$$

여기서 $\xi_s^T = [x^T(s) : x^T(s-d(s)) : \dot{x}^T(s)]$이다.

다음으로 시스템의 상태방정식과 Newton-Leibniz 공식을 적용한 다음의 벡터-행렬 등식을 이용한다.

$$0 = 2\xi_t^T L_1 \cdot [(A + \Delta A(t)) x(t) + (A_d + \Delta A_d(t)) x(t-d(t)) - \dot{x}(t)] = V_5(x_t) \tag{13}$$

$$0 = 2\int_{t-d(t)}^{t} \{ [\xi_t^T L_2 + \xi_s^T M] \cdot [(A + \Delta A(t)) x(t) + (A_d + \Delta A_d(t)) x(t-d(t)) - \dot{x}(t)] \} ds = V_6(x_t) \tag{14}$$

$$0 = 2\xi_t^T N \cdot [x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s) ds] = V_7(x_t) \tag{15}$$

마지막으로 (2)로 정의된 불확정 시간지연 선형시스템에 대하여 아래와 같이 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 정의한 후

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t)$$

(9)-(12)의 각 항에 대한 시스템의 상태 궤적에 따른 시간 미분 함수를 구한 후 (13)-(15)식의 결과를 아래의 식에 대입하여 정리한다.

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) + \dot{V}_4(x_t) + V_5(x_t) + V_6(x_t) + V_7(x_t) \tag{16}$$

끝으로, (16)에서 적분을 포함하지 않는 항들에 대해 음확정 조건을 적용하면 (7)의 결과를 얻을 수 있고, (7)의 결과와 보조정리 1의 결과를 이용하여 적분항과 비적분항 전체에 대하여 음확정 조건을 적용하면 (8)의 결과를 얻을 수 있다. 자세한 증명 과정은 지면 관계상 생략한다. □

4. 수치 예제

잘 알려진 다음의 예제에 대한 이전의 안정 조건 결과들과의 비교를 통해 제시된 안정 조건 LMI의 유용성을 예시한다.

예제 1. 다음의 행렬값을 갖는 불확정 시간지연 선형시스템 (2)를 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & -2.3 \\ 0.8 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.6 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\| \Delta A(t) \| \le \lambda, \ \| \Delta A_d(t) \le \lambda \|.$$

다음의 표 1은 $\mu = 0$인 경우 다양한 λ 값에 대하여 허용될 수 있는 최대 시간지연 값 h를 이전의 안정 조건들과 비교한 결과를 나타내고 있다.

<표 1> $\mu = 0$ 인 경우 최대 허용 시간지연 값 h

λ	0.3	0.4	0.5	0.6
Ref.[7] [13]	0.9288	0.7342	0.4903	0.1027
Ref. [11]	0.9514	0.7950	0.6426	0.2087
정리 (1)	1.1269	0.8786	0.6831	0.2139
개선 (%)	18.44%	10.51%	6.30%	2.49%

표 1의 결과에 의하면 정리(1)을 이용한 시간 지연 종속 안정 조건이 $\mu = 0$ 인 경우 이전의 결과들에 비해 더 큰 시간지연 값에 대해서도 안정성을 보장해주는 덜 보수적인 결과를 나타내 줌을 확인할 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 불확정량을 포함하고 있는 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연 종속 안정 조건을 유도하였다. 새롭게 제시된 LMI 형태의 시간지연 종속 안정 조건은 새롭게 정의된 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수와 Newton-Leibniz 공식 및 시스템의 상태방정식을 이용하여 안정 조건을 나타내는 결과적인 LMI 변수들 간의 관계성을 효율적으로 표현해 줄 수 있는 제로 벡터-행렬 관계식의 결합에 기초하여 유도할 수 있었다. 제시된 수치예제의 결과에 의하면 제안된 새로운 안정 조건이 기존의 결과들에 비해 더 큰 시간지연 값에 대해서도 안정성을 보장해 줌으로서 기존의 안정 조건들이 포함했던 보수성을 상당히 개선시켰음을 확인할 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and ControlTheory*. Philadelphia, PA:SIAM, 1994.

[2] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : A linear matrix inequality approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148, Aug. 1997.

[3] S. I. Niculescue, "H_∞ Memoryless control with an α-stability constraint for time-delay systems : An LMI approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 43, no. 5, pp. 739-743, May. 1998.

[4] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, pp. 1447-1455, 2001.

[5] E. Fridman, "New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems," *Syst. Control Lett*, vol. 43, pp. 309-319, 2001.

[6] E. Fridman and U. Shaked, "A Descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 2, pp. 253-270, Feb. 2002.

[7] M. Wu, Y. He, J. H. She and G. P. Liu "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varing delay systems," *Automatica*, vol. 40, pp. 1435-1439, 2004.

[8] S. Xu and J. Lam, "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 3, pp. 384-387, Mar. 2005.