신호 해석을 위한 웨이브렛 응용에 관한 연구

배 상 범*, 류 지 구**, 김 남 호*
*부경대학교 공과대학 제어계측공학과, **부경대학교 공과대학 전자공학과

A Study on Wavelet Application for Signal Analysis

Sang-Bum Bae*, Ji-Goo Ryu**, Nam-Ho Kim*
*Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.
**Dept. of Electronics Eng., Pukyong National Univ.

Abstract

Recently, many methods to analyze signal have been proposed and representative methods are the Fourier transform and wavelet transform. In these methods, the Fourier transform represents signal with combination cosine and sine at all locations in the frequency domain. However, it doesn't provide time information that particular frequency occurs in signal and denpends on only the global feature of the signal. So, to improve these points the wavelet transform which is capable of multiresolution analysis has been applied to many fields such as speech processing, image processing and computer vision. And the wavelet transform, which uses changing window according to scale parameter, presents time-frequency localization. In this paper, we proposed a new approach using a wavelet of cosine and sine type and analyzed features of signal in a limited point of frequency-time plane.

Ⅰ. 서 론

사회는 고도의 디지털 정보화 시대로 발전함에 따라, 획득된 신호를 처리하여 유용한 정보를 추출하기 위한 다양한 처리 방법들이 제시되고 있다.

이러한 방법들 중에서, 여러 가지 형태의 신호 및 시스템을 분석하기 위한 중요한 도구로서 사용되고 있는 퓨리에 변환은 주기와 비주기 신호로 분류되는 정재적(stationary) 신호를 연구하기 위해 광범위하게 응용되고 있다. 이때 퓨리에 변환은 임의의 신호를 표현하기 위해 무한 또는 유한개의 cosine과 sine 파형의 조합을 사용한다. 그러나 퓨리에 변환은 시간 해상도를 고려하지 않은 변환으로써, 신호내의 특정 주파수 성분에 대한 시간 정보를 제공하지 않으며, 주파수 영역의 각 성분들은 신호의 전체적인 동작에만 의존한다. 따라서 이러한 퓨리에 변환의 한계성을 극복하기 위해, Gabor에 의해 제시된 STFT(short time fourier transform)는 시간 전이와 주파수 스케일링을 갖는 기저함수를 사용하였다[1],[2]. 즉, 일정한 간격으로 시간축을 따라 이동하는 윈도우를 사용하고, 각 위치에서의 퓨리에 변환을 적용하여 시간과 주파수 특성을 동시에 표현하였다. 그러나 STFT가 모든 주파수 영역에 대해서 고정된 길이의 윈도우를 사용함에 따라, 시간-주파수 국부성이 상충관계를 가진다.

그러나 웨이브렛 변환은 비정재적(non-stationary), 광대역(wideband), 멀티스케일(multi-scale) 신호를 해석하기 위해 사용될 수 있으며, 신호의 시간 정보와 스케일 정보 사이의 상관관계를 표현하는 시간-스케일 공간을 제시한다[3],[4]. 즉, 짧은 지속시간을 갖는 고주파 신호에 대해서는 짧은 길이의 윈도우를 사용하고, 긴 지속시간을 갖는 저주파 신호에 대해서는 긴 길이의 윈도우를 사용하여, 신호의 모든 위치에서 변환을 수행함에 따라, 시간-주파수 국부성을 나타낸다.

본 논문에서는 퓨리에 변환의 기저함수로 사용되는 cosine과 sine 함수를 사용하여 신호를 분석하였다. 이러한 정현함수를 이용한 신호의 분석은 연속 웨이브렛 변환과 달리, 주파수에 의존하는 특정한 유한개의 윈도우 전이 지점을 사용한다. 그러나 주파수 영역의 모든 지점에 대해서 변환이 수행됨에 따라, 다중해상도 해석이 가능하다.

Ⅱ. 웨이브렛 변환

어떤 함수 $\psi(t)$에 대한 퓨리에 변환을 다음의 식 (1)과 같이 정의한다. 이때, $\Psi(\omega)$가 식 (2)의 허용조건을 만족하면, 함수 $\psi(t)$를 mother 웨이브렛으로 정의한다.

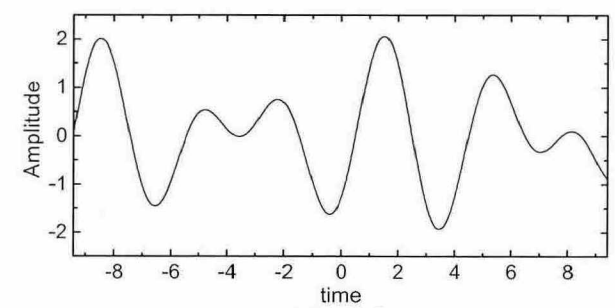
$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (1)$$

$$C \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{2}$$

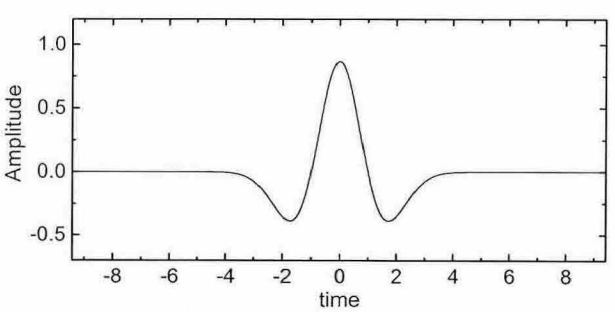
식으로부터 $\omega = 0$ 일 때, C가 무한한 값을 갖지 않기 위해서는 $\Psi(0) = 0$가 성립되어야 한다. 따라서 식 (2)는 다음의 식 (3)을 내포한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0 \tag{3}$$

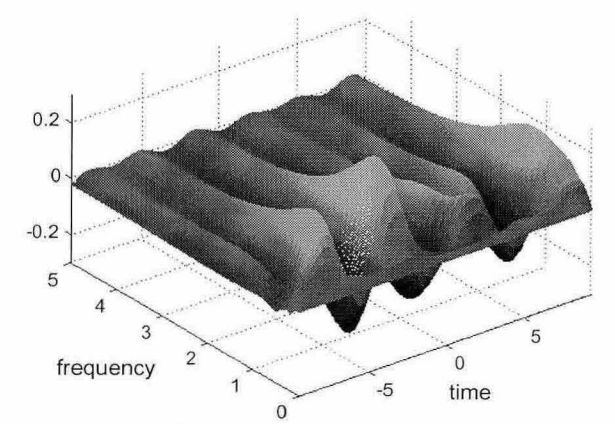
또한, $\psi(t)$의 이동과 확장에 의해 식 (4)의 baby 웨이브렛을 얻을 수 있으며, a는 scale 변수이고 b는 translation 변수이다.



(a) $f(t)$



(b) Wavelet function $\psi(t)$



(c) Result of wavelet transform

Fig. 1. Wavelet transform of signal.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{4}$$

식으로부터, scale 변수 a가 변화함에 따라 연산을 위한 웨이브렛 윈도우의 넓이가 확대 또는 축소되어, 주파수 영역에 따른 다중 해상도 해석을 가능하게 한다.

이에 따라, 신호 $f(t) \in L^2(R)$이면, 연속 웨이브렛 변환(continuous wavelet transform)은 식 (5)와 같이 정의되며, $*$는 켤레 복소를 의미한다.

$$Wf(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \psi^*_{a,b}(t)\, dt \tag{5}$$

그리고 그림 1은 식 (6)으로 표현되는 2차 미분 가우스 웨이브렛을 사용하였을 경우의 신호 $f(t)$에 대한 surface plot을 나타내고 있으며, 여기서 웨이브렛은 그 형상으로 인해 Mexican Hat 함수로 불려지고 있다.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{6}$$

Ⅲ. 주파수-시간 평면 해석

퓨리에 분석으로부터 임의의 신호에 대한 정보를 획득하기 위해, 다음의 식들과 같은 함수를 정의한다.

$$\psi^c(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi^s(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

즉, 위의 두 식은 구간 $[-\pi, \pi)$에서는 퓨리에 변환의 기저함수와 동일하게 된다. 또한, 위의 두 식은 각주파수 ω에서 시간스케일과 이동에 의해, 각각 $\psi^c_{\omega,b_n}(t)$와 $\psi^s_{\omega,b_n}(t)$로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} \psi^c_{\omega,b_n}(t) = \psi^c(\omega[t - b_n]) \\ \psi^s_{\omega,b_n}(t) = \psi^s(\omega[t - b_n]) \end{cases} \tag{9}$$

일반적으로, 임의의 신호 $f(t)$에 대한 퓨리에 변환은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\} dt \tag{10}$$

그리고 연속되는 cosine과 sine은 각각 $2\pi/\omega$ 의 간격으로 시간축 상에서 $\cdots, I_{-1}, I_0, I_1, \cdots$ 와 같이 분할할 수 있으며, 이때 I_n은 다음과 같다.

$$I_n = \left[-\frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}, \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega} \right) \tag{11}$$

따라서 위의 식 (10)으로 표현된 퓨리에 변환은 아래의 식 (12)와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} f(t)\cos(\omega t) dt \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} f(t)\sin(\omega t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{c}\left(\omega\left[t - \frac{2\pi n}{\omega}\right]\right) dt \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{s}\left(\omega\left[t - \frac{2\pi n}{\omega}\right]\right) dt \end{aligned} \tag{12}$$

위의 식으로부터 실수부와 허수부의 적분 항을 다음의 두 식과 같이 나타낸다.

$$W_c(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{c}_{\omega, b_n}(t) dt \tag{13}$$

$$W_s(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{s}_{\omega, b_n}(t) dt \tag{14}$$

여기서, $b_n = (2\pi/\omega) n$ 이며 주파수 ω 에 의존하고, 신호 $f(t)$를 따라 이동한다. 이에 따라, 주파수-시간 평면에서 전이될 수 있는 지점들은 다음과 같다.

$$S = \left\{ (\omega, b_n); \omega \in (-\infty, +\infty), \; b_n = \frac{2\pi n}{\omega}, \; n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N(\omega) \right\} \tag{15}$$

여기서 $N(\omega)$는 구간 $[-k\pi, k\pi)$ 에서 분석되는 신호에 대해서 다음과 같다.

$$N(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega < \frac{1}{3} \\ \left\lfloor \frac{k\omega - 1}{2} \right\rfloor, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

만약, $k = 3$으로 주어지는 구간에서 신호 $f(t)$가 정의된다면, 신호를 분석하기 위해 요구되는 전이의 수는 식 (17)과 같다.

$$M = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \\ 2n+1, & \text{if } \omega \in \left(\frac{2n+1}{3}, \frac{2n+3}{3}\right) \end{cases} \tag{17}$$

그리고 이때 Ψ^{c}를 사용하였을 경우, 그림 1(a)와 같이 표현되는 신호 $f(t)$에 대한 웨이브렛 변환은 그림 2와 같다.

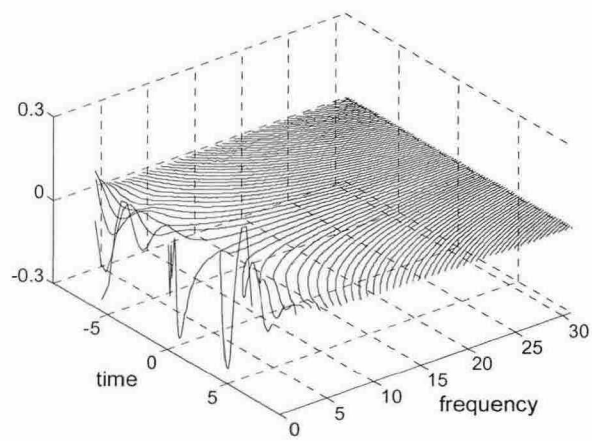


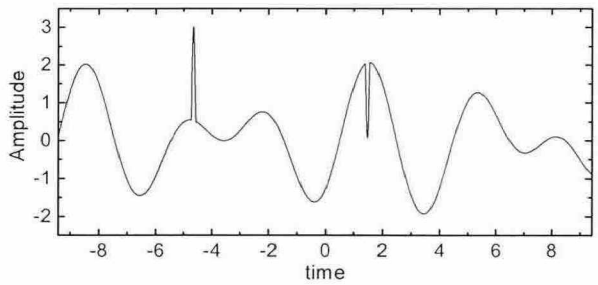
Fig. 2. Wavelet transform $W_c(\omega, b_n)$ for $f(t)$.

Ⅳ. 시뮬레이션 및 결과

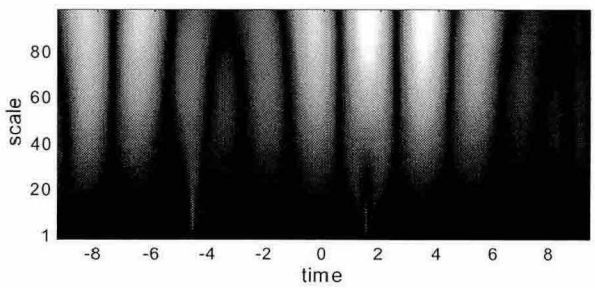
본 논문에서는 신호를 분석하기 위해, 한 주기로 제한된 cosine과 sine 함수를 분석 웨이브렛으로 사용하였다. 그리고 주파수-시간 평면상에서, 웨이브렛을 이용한 신호의 분석 특성을 살펴보기 위해, 테스트 신호로서 그림 1(a)에서 제시된 신호에 임펄스성 잡음을 중첩하여 사용하였다.

그림 3은 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과를 나타내고 있다. 그림으로부터 (a)는 시간 영역에서의 테스트 신호이며, (b)는 Mexican Hat 웨이브렛을 이용한 변환결과이고, (c)는 본 논문에서 제시한 cosine 웨이브렛 변환에 의한 contour를 나타내고 있다. 그리고 (d)는 주파수에 의존하는 이산 전이 지점에서의 cosine 웨이브렛 변환 결과이며, (e)는 sine 웨이브렛 변환 결과를 나타낸다.

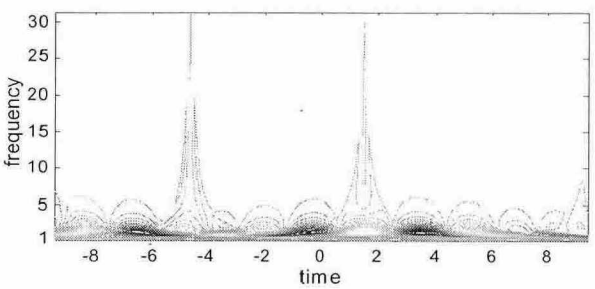
결과로부터, 그림 (b)와 같은 기존의 웨이브렛 변환은 신호를 분석하기 위해, 각 스케일에서 시간축 상의 모든 위치에 대해 변환이 수행된다. 이에 따라, 각 지점에서 윈도우가 서로 중복되며, 매우 많은 양의 데이터와 연산을 수행하게 된다.



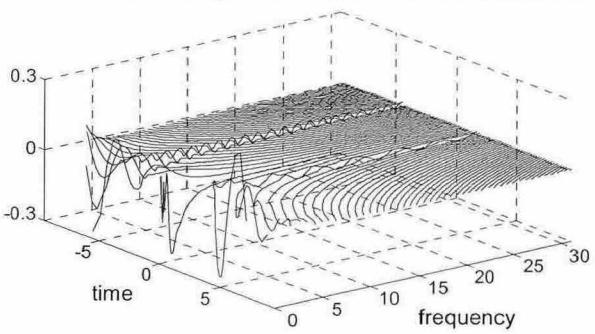
(a) Test signal



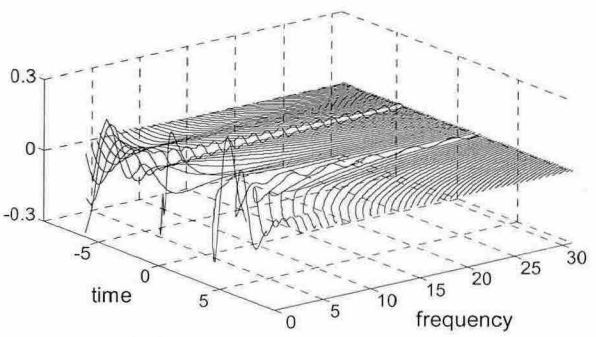
(b) Result of Mexican Hat wavelet



(c) A contour plot of cosine wavelet transform



(d) Cosine wavelet transform in locus



(e) Sine wavelet transform in locus

Fig. 3. Wavelet transform for test signal.

그러나 제안한 방법은 분석 신호에 대해서, 최소 정보만을 획득하기 위해, 주파수에 의존하는 전이 파라메터를 사용하였다. 이에 따라 그림 3의 (d), (e)와 같은 두 형태의 웨이브렛 변환은 많은 양의 변환 데이터를 필요로 하지 않는다. 그리고 변환 결과로부터, 주파수 대역별 신호 구성성분에 대한 profile 정보획득이 용이하였다.

V. 결 론

본 논문에서는 신호를 분석하기 위해, 한 주기로 제한된 cosine과 sine 함수를 분석 웨이브렛으로 사용하였다.

그리고 제안된 웨이브렛은 주파수에 의존하는 전이 파라메터에 의해 신호를 분석함에 따라, 많은 양의 데이터를 필요로 하지 않는다. 즉, 본질적으로 특정 주파수에서의 퓨리에 변환 데이터가 신호 파형과 cosine 및 sine의 적분으로부터 구해지므로, 주파수에 따라 시간축을 주기 간격으로 분할할 수 있다. 따라서 이러한 기저함수의 윈도우는 STFT에서 사용하는 고정된 길이의 윈도우와 달리, 주파수에 따라 그 크기가 변하며, 모든 주파수의 정현파를 사용하므로 다중해상도 신호처리를 제공한다.

임펄스성 잡음이 중첩된 테스트 신호를 이용한 시뮬레이션 결과로부터, 기존의 웨이브렛 변환은 신호를 분석하기 위해 각 지점에서 윈도우가 서로 중복되며, 이에 따라 많은 양의 데이터를 포함하였다. 그러나 제안된 방법은 주파수에 의존하는 전이 궤적 상에서 웨이브렛 변환을 수행하여 최소 정보만을 획득하였으며, 변환 결과로부터 신호에 대한 profile 정보획득이 용이하였다.

참 고 문 헌

[1] J. G. Daugman, "Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 36, no. 7, pp. 1169-1179, July 1988.

[2] O. Ersoy, "Fourier-Related Transform, Fast Algorithms and Applications", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.

[3] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet represen- tation", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.

[4] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets", in Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, 1992.