

# 고차 지그재그 이론을 이용한 열\_전기\_기계 하중하의 스마트 복합재 쉘 구조물의 해석

오 진 호\* · 조 맹 효\*\*

## HIGHER ORDER ZIG-ZAG SHELL THEORY FOR SMART COMPOSITE STRUCTURES UNDER THERMO-ELECTRIC-MECHANICAL LOADING

Jinho Oh, Maenghyo Cho

KEY WORDS : Zig-Zag theory, Uncoupled theory, Mechanical, Thermal, Piezoelectric(압전 하중)

### ABSTRACT

A higher order zig-zag shell theory is developed to refine accurately predict deformation and stress of smart shell structures under the mechanical, thermal, and electric loading. The displacement fields through the thickness are constructed by superimposing linear zig-zag field to the smooth globally cubic varying field. Smooth parabolic distribution through the thickness is assumed in the transverse deflection in order to consider transverse normal deformation. The mechanical, thermal, and electric loading is applied in the sinusoidal distribution function in the in-surface direction. Thermal and electric loading is given in the linear variation through the thickness. Especially, in electric loading case, voltage is only applied in piezo-layer. The layer-dependent degrees of freedom of displacement fields are expressed in terms of reference primary degrees of freedom by applying interface continuity conditions as well as bounding surface conditions of transverse shear stresses. In order to obtain accurate transverse shear and normal stresses, integration of equilibrium equation approach is used. The numerical examples of present theory demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed theory. The present theory is suitable for the predictions of behaviors of thick smart composite shell under mechanical, thermal, and electric loadings combined.

### 1. 서 론

복합재료와 압전재료로 적층된 스마트 판/쉘 구조물의 대한 연구는 지금까지 꾸준히 지속되고 있다. 특히, 비행체와 같은 시스템에 지능 구조물을 적용하게 되면 기계, 열, 전기등의 복합 하중 환경 하에 있을 경우가 빈번하기 때문에, 일반 기계 하중 뿐만 아니라, 다물리계의 환경 하의 해석이 요구된다. 요즘 많은 연구자들이 이러한 복합 하중 하에 구조물이 놓이게 되었을 때, 해석과 설계 방안에 대해 관심을 가지고 있다.

현재까지 쉘 복합재 적층 구조물의 해석에 대한 연구는 매우 폭넓게 보고되고 있다[1,2]. 복합재료 쉘의 거동을 보다 정확히 해석하기 위해서 세 가지 형태의 고차 이론이 개발 되었다. 첫 번째로 제안된 근사단층 이론[3,4]은 복합재 구조물의 두께방향으로 횡전단응력의 연속조건을 만족하지 못하기 때문에 이 이론에 기초하여 해석을 수행하면 해석의 정확도를 보장할 수가 없다. 두 번째로, 두께방향으로 층마다 자유도를 부과하는 층별 이론[5]이 있다. 이 이론은 자유도가 층의 수에 의존하기 때문에, 계산량과 주자유도의 수가 적층 수의 증가에 따라 급격히 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위한 방법으로 전체/국소 지그재그 방법[6-8]이 제안되었다. 마지막으로 단순화된 지그재그 이론[9-11]이 있다.

\* 서울대학교 기계공학부

\*\* 서울대학교 기계항공공학부 부교수

세 가지 해석방법 중 단순화된 지그재그 이론은 정확성과 효율성으로 인해 가장 주목을 받고 있는 이론이다. 본 연구에서 사용된 지그재그 이론[12]은 변위의 횡전단 응력연속조건을 충 경계면마다 만족하고 또한, 변위장을 모사하기 위해 층의 수와 상관없이 7 개 변수만 필요하게 된다. 그 결과 계산상에서 많은 장점을 갖게 된다.

그러나 복합재료 적층 구조물은 기계하중 하에서만 운용되는 것이 아니라 가혹한 열 환경 하에 놓여 있는 경우가 빈번하다. 또한 압전재료가 부착된 복합재료의 경우, 전압이 부과됨에 따라, 전기 하중 하에 놓이게 된다. 특히, 엔진의 주변 구조물이나 항공기의 날개, 스마트 우주 구조물 등은 가혹한 열, 기계 하중에 노출되는 중요한 예들이다. 열 하중과 기계 하중이 동시에 작용하는 복합재료 적층 구조물의 응력, 변형 및 강도의 예측은, 적층 구조물의 설계 시 고려해야 할 중요한 문제가 되고 있다[13]. 최근까지도 열과 기계, 전기 하중의 복합 하중 하에서 정확도와 효율성을 동시에 적층 셀의 이론 개발은 아직 미흡하다고 판단된다. 특히 반복 인자 연구를 수행해야 되는 초기 설계 단계에서는 적은 수의 종속 변수를 가지는 효율적인 이론이 바람직하다.

두꺼운 적층 복합재 셀의 경우, 기계하중 하에서는 횡 전단 변형 효과를 고려하는 것이 셀의 두께 방향 응력과 변위의 정확도를 높이는데 중요한 요인으로 있지만 열, 전기 하중을 받는 경우에는 같은 정도의 두께비를 가진다면 횡 수직 변형의 효과를 무시할 수 없다. 이 효과는 기계하중이 가해지는 경우에는 내부 변형 에너지에 기여하는 바가 미미하지만 열, 전기 하중 하에서는 그 효과가 두드러지게 나타나므로 횡 전단 변형 에너지와 함께 동일한 정도의 중요도를 가지고 동시에 고려되어야 한다.

본 연구에서는 이전에 본 연구자들에 의해 수행된 복합재료 적층 지능 평판이론을 확장하여 셀 구조물에 적용한다. 복합재료 적층 셀 구조물에 기계, 열, 전기 하중을 받을 때 정상상태의 두께 방향 거동을 정확히 묘사하는 효율적인 셀 이론을 개발하는 것을 연구 목적으로 한다. 이를 위하여 고차이론의 변위장을 단순화하였으며 횡 전단 변형 효과뿐만 아니라 수직 방향의 변형 효과를 고려하였다. 개발된 이론은 3 차원 탄성해[14]와 최근 개발된 고차이론[15]을 통해서 확인 하였다.

## 2. 정식화

### 2.1 전체 자유 에너지와 구성방정식

자유에너지는 다음과 같다.

$$F(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) = \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e^{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} b^j E_i E_j - k^{ij} \theta \varepsilon_{ij} - d^i E_i \theta - \frac{1}{2} a_r \theta^2 \quad (0.1)$$

여기서,  $C_{ijkl}$  와  $e_{ijk}$  는 탄성계수와 압전소자상수이다.  $a_r$  는  $C_E / T_0$ 로 정의 된다.

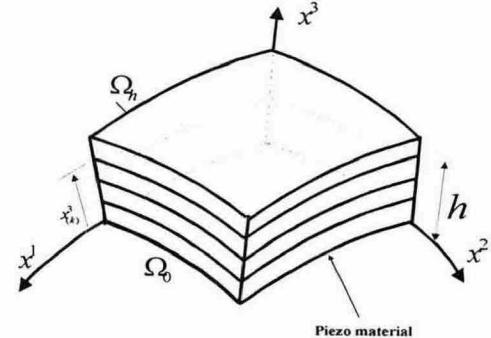


그림 1. 압전재료가 부착된 복합재 셀 구조물 형상 위의 (2.1)식으로부터, 다음과 같은 구성 방정식들이 유도 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - e^{ijk} E_k - k^{ij} \theta \\ D^i &= -\frac{\partial F}{\partial E_i} = e^{ijk} \varepsilon_{jk} + b^{ij} E_j + d^i \theta \\ S &= -\frac{\partial F}{\partial \theta} = k^{ij} \varepsilon_{ij} + d^i E_i + a_r \theta \end{aligned} \quad (0.2)$$

$D_i$  와  $\sigma_{ij}$  는 응력텐서 구성성분이다.

$S$  는 엔트로피이고,  $\theta = T - T_0$  는 초기온도  $T_0$  로 부터의 온도변화이다.  $E_i$  는 전기장 벡터의 구성성분이다.  $b_{ij}$  는 유전율이고,  $k_{ij}$  와  $d_i$  는 열-기계 와 열-전기장의 연계 상수이다.

선형에 기초를 둔 전기장  $E_i$  는 스칼라포텐셜 함수  $\phi$  로서 표현된다.

$$E_i = -\phi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (0.3)$$

미소 변위와 변형률 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{ij} + V_{ji} + V_{ik}^k V_{kl}^l) \quad (0.4)$$

압전소자 층이 있는 복합재료 적층구조물의 형상은 그림 1에 도시되어 있다.

### 2.2 변위장

변위장은 고차지그재그이론을 사용하여 모델링 하였다. 면내 변위장은 두께방향으로 매끈하게 변하는 3 차 변위장에 1 차 지그재그 변위장을 중첩하여 얻는다. 열, 전기 하중 하에서 중요한 횡 수

직 변형 효과를 포함하기 위해, 면내수직 변위를 두께를 통하여 포물선으로 가정하였다.

이를 수식으로 표현하면, 아래와 같다.

$$U_\alpha(x^i) = u_\alpha(x^\beta, x^3) + \psi_\alpha(x^\beta, x^3)x^3 + \xi_\alpha(x^\beta, x^3)(x^3)^2 + \phi_\alpha(x^\beta, x^3)(x^3)^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)}(x^3 - x_{(k)}^3)H(x^3 - x_{(k)}^3) \quad (0.5)$$

$$U_3(x^i) = u_3(x^\beta, x^3) + r_1(x^\beta, x^3)x^3 + r_2(x^\beta, x^3)(x^3)^2$$

여기서,  $H(z - z_k)$ 은 단위 계단함수이다.

두께방향으로 면내 변위장의 개형은 그림 2에 도시하였다.

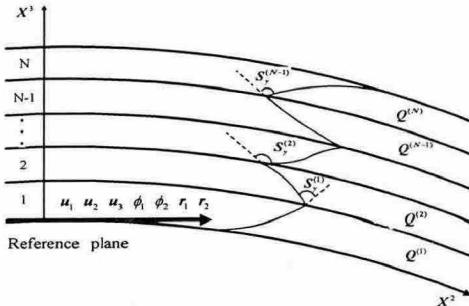


그림 2. 면내 변위장의 일반적인 형상

위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속조건을 대입한다. 즉,

$$\varepsilon_{\alpha 3} \Big|_{x^3=0} = \psi_\alpha + u_{3\parallel\alpha} + b_\alpha^\beta u_\beta = 0 \quad (0.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 3} \Big|_{x^3=h} &= 2h(\mu_1)_\alpha^\beta \xi_\beta + 3h^2(\mu_2)_\alpha^\beta \phi_\beta + r_{1\parallel\alpha} h \\ &+ r_{2\parallel\alpha}(h)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\alpha^\beta S_\beta^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (0.7)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화  $S_\alpha^k$ 는

$$S_\gamma^{(k)} = (a^{(k)})_\gamma^\omega \phi_\alpha + (b^{(k)})_\gamma^\omega r_{1,\omega} + (c^{(k)})_\gamma^\omega r_{2,\omega} \quad (0.8)$$

여기서  $a_{\gamma\gamma}^{(k)\omega}, b_{\gamma\gamma}^{(k)\omega}, c_{\gamma\gamma}^{(k)\omega}$ 의 자세한 표현식은 생략한다.

결국, 식(2.6), (2.7), (2.8)을 식(2.5)에 대입하여, 다음과 같은 변위장을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_\alpha &= \mu_\alpha^\beta u_\beta - u_{3\parallel\alpha} x^3 \\ &- \frac{(\mu_1)_\alpha^\lambda}{2h} \{r_{1\parallel\lambda} h + r_{2\parallel\lambda}(h)^2\}(x^3)^2 + f_\alpha^\beta \phi_\beta \\ &- \frac{(\mu_1)_\alpha^\lambda}{2h} (x^3)^2 \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_{(k)})_\lambda^\gamma ((b^{(k)})_\gamma^\omega r_{1,\omega} + (c^{(k)})_\gamma^\omega r_{2,\omega}) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} ((b^{(k)})_\alpha^\omega r_{1,\omega} + (c^{(k)})_\alpha^\omega r_{2,\omega})(x^3 - x_{(k)}^3)H(x^3 - x_{(k)}^3) \end{aligned} \quad (0.9)$$

$$U_3 = u_3 + r_1 x^3 + r_2 (x^3)^2 \quad (0.10)$$

변위장의 변수는 기준면의 변수만으로 정의된다. 주요 변수는  $u_\alpha, u_3, \phi_\alpha, r_1, r_2$ 이다. 그 결과, 주요 변수의 수는 층의 수에 관계없이 7개로 일정하

다.

가정된 변위장을 가상일의 원리에 적용하여 변분적으로 일치하는 평형 방정식과 경계 조건을 도출하였다. 그 표현식들은 지면 관계 상 생략한다.

### 3. 수치해와 결과

개발된 이론의 성능을 검증하기 위해서 정상상태의 응력과 변위를 해석하였다. 기계하중, 온도하중, 전기하중을 각각 고려하였고 완전 연계된 전기\_기계\_온도 하중을 고려하지 않고 decouple 된 이론에 바탕을 두고 해석을 수행하였다. 온도\_기계\_전기 하중의 연성 효과는 단지 구성방정식에서만 고려된다. 해석을 위하여 [90/0/90] 직교 적층 배열과, [90/0/90/0/90/0/90/Piezo] 적층배열등 2 가지 적층 배열을 고려하였다. 삼차원 해석 결과와 물성치는 참고 문헌[14-16]에서 얻었다.

#### 기계하중

정현파 하중이 실린더 바깥면에 가해졌을 때의 결과는 그림 3에 도시된다. 그림 3에서 보여지듯이 면내 응력이 3 차원 탄성해와 비교해서 매우 정확히 얻어지는 점을 알 수 있다.

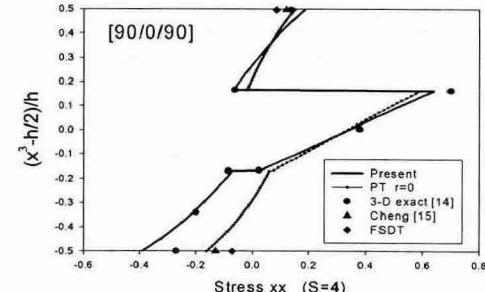


그림 3. 면내 수직응력  $\sigma^{<xx>}$   
온도하중

두께 방향으로 선형으로 변하는 온도하중을 가했을 때의 응력과 처짐 결과를 그림 4에 도시하였다. 그림 4는 두께 방향 변형을 고려한 결과와 고려하지 않은 결과가 복합재 층의 중심 부분에서 차이가 발생함을 보여준다.

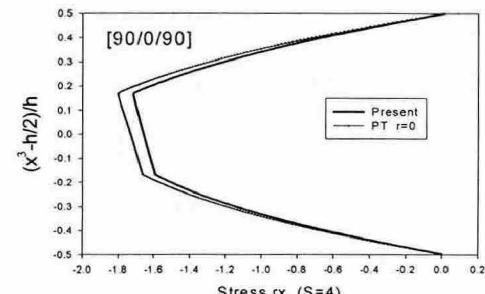


그림 4. 횡 방향 전단응력  $\sigma^{<\theta>}$

### 전기하중

실린더의 바깥면에 피에조(PZT-5A)층을 부착하고 나서 전압을 부과 했을 때의 응력을 살펴 보았다. 그림 5에서 보여지듯이 횡 방향 전단응력이 전압의 수치에 따라 심하게 변한다는 것을 알 수 있다.

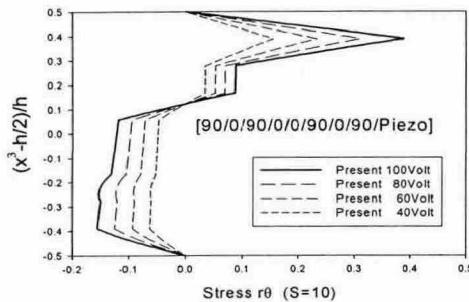


그림 4. 횡 방향 전단응력  $\sigma^{<\theta>}$

## 4. 결 론

본 연구는, 일반 텐서이론에 기초를 둔 고차 지그재그 이론을 사용하여, 열, 전기, 기계 세 가지 하중이 가해 질 때, 스마트 복합재료 적층 웰의 변형과 응력에 대해 해석하였다. 일반 좌표계를 사용하여 임의의 형상의 웰 구조물의 기하학적 정보가 결정되면 그에 따라 해석을 수행할 수 있는 이론을 개발하였으며 두꺼운 웰의 기하학적인 효과를 고려하기 위해서 두께 방향으로 곡면의 변화량과 곡면의 메트릭을 정확히 고려하여 변형을 기술할 때 적용하였다. 특히, 열\_전기 하중이 부과되었을 때, 이러한 기술 방법은 꼭 필요하다는 것을 확인 할 수 있었다.

개발된 고차 지그재그 웰 이론은 웰 구조물이 고온 환경 하에서 기계, 전기, 열 하중의 복합하중을 받을 때 변형 거동을 예측할 수 있는 효율적인 방법을 제공한다는 것을 수치 예를 통하여 평가하였고 추후 본 웰 이론에 기반한 유한요소를 개발할 계획이다.

## 참고문헌

- (1). Noor, A.K., Burton, W.S., 1990, "Assessment of computational models for multilayered composite plates and shells." Applied Mechanics Reviews, Vol.45, No.4, pp.67-97.
- (2). Reddy, J.N., Robbins, Jr., D.H., 1994, "Theories and Computational models for composite laminates." Applied Mechanics Reviews, Vol.47, No.1, pp.147-169.

- (3). Whitney, J.M., Sun, C.T., 1974, "A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells." J. Appl. Mech., Vol.41, pp.471-476.
- (4). Reddy, J.N., Liu, C.F., 1985, "A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells." Int. J. Engng Sci., Vol.23, No.3, pp.319-330.
- (5). Barbero, E.J., Reddy, J.N., 1990, "General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells." AIAA J., Vol.28, No.3, pp.544-553.
- (6). Cho, M., Kim, J. S., 1997, "Bifurcation buckling analysis of delaminated composites using global-local approach." AIAA J., Vol.35, No.10, pp.1673-1676.
- (7). Kim, J.S., Cho, M., 1999, "Postbuckling of delaminated composites under compressive loads using global-local approach." AIAA J., Vol.37, No.6, pp.774-778.
- (8). Cho, M., Lee, S.G., 1998, "Global/local analysis of laminated composites with multiple delaminations of various shapes." Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/ASC 39th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Long Beach, CA, AIAA, Reston, VA, pp. 76-86.
- (9). Di Sciuva, M., 1987, "An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates." J. Appl. Mech., Vol.54, pp.589-596.
- (10). He, L.-H., 1994, "A linear theory of laminated shells accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at layer interfaces." Int. J. Solids Structures, Vol.31, No.5, pp.613-627.
- (11). Ossadzow, C., Touratier, M., and Muller, P., 1999, "Deep doubly curved multilayered shell theory." AIAA J., Vol.37, No.1, pp.100-109.
- (12). Cho, M., Oh, J., 2004, "Higher order zig-zag theory for fully coupled thermo-electric-mechanical smart composite plates," Int. J. of Solids & Structures, Vol.41, No.5-6, pp.1331-1356.
- (13). Thornton, E.A. Thermal structures for Aerospace Applications, AIAA Education Series, AIAA, 1996.
- (14). Varadan, T. K., Bhaskar, K., 1991, "Bending of laminated orthotropic cylindrical shells- an elasticity approach," Composite Structures, Vol.17, pp.141-156.
- (15). Cheng, Z. Q., He, L. H., Kitipornchai, S., 2000, "Influence of imperfect interfaces on bending and vibration of laminated composite shells," Int. J. of Solids & Structures, Vol.37, pp.2127-2150.
- (16). Xu, K., Noor, A. K., Tang, Y.Y., 1995, "Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates," Comp. Meth. in App. Mech and Eng., Vol.126, pp. 355-371.