창의력의 밑거름 — 개념의 정립

순천대학교 사범대학 과학교육과　고 중 숙

영재교육에서 창의성의 개발이 중요하다는 점은 어제오늘 강조되어 온 일이 아니다. 실로 창의성은 영재교육을 넘어 사회 전반에서 새롭게 인식되고 있으며, 오늘날 개인과 단체 그리고 사회와 국가에 이르기까지 장래의 발전을 좌우할 핵심적 요소로 떠오르고 있다. 이에 따라 특히 영재교육 분야에서 창의성의 개발은 매우 심도 있게 연구되고 있고, 앞으로도 이런 경향은 계속되리라고 본다. 그런데 창의성을 흔히 기존 관념에서의 해방, 도약, 탈피 등으로 보는 선입관이 널리 스며 있다. 그리하여 창의성을 일종의 '뿌리 없는 나무'로 여기는 보는 사람들도 많다. 하지만 인간의 모든 활동은 어떤 바탕 위에서 이루어지고 그 바탕이 얼마나 풍요로운 곳인지에 따라 성과가 크게 좌우된다. 창의성의 경우 그 바탕의 하나로 여러 가지 개념들의 올바른 정립을 들 수 있다. 인간의 지식 구조는 정교한 건물과 같아서 처음의 체계가 잘 잡혀야 제대로 짜 맞추어 올라갈 수 있다는 점에서 볼 때 이 바탕이 소중하다는 점은 쉽게 이해된다. 그러나 현행 영재교육의 주요 부분인 중등과정의 여러 교재들에서 심상찮은 오류들이 발견된다. 이런 오류들을 바로잡는 일은 영재들의 창의성을 올바로 이끄는 데에 중요할 뿐 아니라 이를 통하여 근본원리에 대한 이해를 높인다는 점에서도 의의가 크다. 이에 따라 여기서는 수학과 과학 분야에서 나타나는 몇 가지의 오류를 바로잡아 관련 개념들을 올바로 정립해보고자 한다.

1. 방정식의 해집합

첫 주제로 방정식의 해를 생각해보기로 한다. 그런데 이는 집합론에 그 근거를 두고 있으므로 우선 집합론의 기본 개념부터 간략히 살펴보고 본 주제로 들어간다.

나열의 의미

집합의 원소를 나타내는 데에 '조건제시법'과 '원소나열법'이 있는데, 원소나열법의 의의를 좀 자세히 짚고 넘어간다.

오늘날 **집합**(set)은 대개 **"잘 규정된 대상들의 모임**(a collection of well-defined objects)**"**이라고 말한다.[1] 이는 집합론의 실질적 창시자라고 할 수 있는 독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845-1918)가 1895년에 펴낸 논문에서 처음 제시한 표현을 간명하게 가다듬은 것이다. 그런데 이를 읽고 나서 우선적으로 떠오르는 느낌은 '가장 엄밀한 학문'

1) 여기서의 집합론은 엄밀한 수준의 'axiomatic set theory'가 아니라 통상적 수준의 'naive set theory'를 말한다.

이라는 수학적 관점에서 볼 때 '상당히 엉성한 표현'으로 여겨진다는 것이다. 그래서 이로부터 곧 **"어떻게 규정된 것이 '잘 규정된(well-defined)' 것인가?"**라는 의문이 뒤따르는 바, 이에 대해서는 다음 2가지로 이해하는 것이 보통이다.

㉮ **소속성**: 어떤 대상을 주어진 집합에 넣을 것인가 뺄 것인가, 즉 '소속 여부'의 판가름을 명확히 할 수 있을 정도로 규정된 것을 가리킨다.

㉯ **유일성**: 집합에 속한 임의의 대상 2개를 비교할 때 서로 같은가 다른가, 즉 '중복 여부'의 판가름을 명확히 할 수 있을 정도로 규정된 것을 가리킨다.

㉮와 ㉯를 한 문장으로 엮는다면 "집합에는 조건에 맞는 대상을 넣되 한 번씩만 넣는다"라고 간추려진다. 그리고 원소나열법에서의 **'나열'은 '넣되 한 번씩만 넣는 조작'**이라고 규정할 수 있다. 이 표현은 수학의 저변에 깔린 몇 가지의 근본 관념들과 상통하는 구조를 갖고 있으며,[2] 그 자체적 의의도 중요하므로 처음부터 이처럼 명확히 해두는 게 바람직한데, 대부분의 교재들은 이를 소홀히 하고 있다. 아래의 예제는 이와 같은 나열의 개념을 올바로 이해하는 데에 도움을 주기 위하여 꾸민 것이다.

(예제) 어떤 반에서 하나의 분단을 만들다보니 김영희, 김철수, 김철수, 이경애, 박소희, 송혜인, 오현철, 한승현의 8명으로 짜여져 김철수라는 이름의 학생이 두 사람 들어가게 되었다.

(1) 이 분단에서 '김씨 성을 가진 이름들'이란 집합을 만들어라.

(2) 이 분단에서 '김씨 성을 가진 학생들'이란 집합을 만들어라.

(풀이) (1)과 (2) 모두 '소속성'은 충족한다. 그런데 (1)에 들어갈(소속될) 대상은 '이름'이므로 '김철수'라는 이름이 두 번 들어가면 '유일성'에 위배되고, 따라서 한 번만 들어가야 한다. 반면 (2)에 들어갈 대상은 '이름'이 아니라 '사람'이다. 그러므로 '사람으로서의 김철수'는 두 번, 즉 김철수란 이름을 가진 두 학생이 모두 들어가야 한다. 이상의 검토에

---

2) 필자가 즐겨 쓰는 표현 가운데 **"집합은 수학의 무대이고 함수는 수학의 주인공"**이라는 게 있다. 그런데 이처럼 수학의 가장 중요한 두 관념의 배경에 한 가지 중요한 공통점이 자리 잡고 있다는 점은 사뭇 흥미롭다. 즉, 위에서 보듯 집합론의 핵심적 연산인 나열은 "원소를 넣되 한 번씩만 넣는 조작"임에 비하여, 함수라는 관념의 핵심은 '단가대응(單價對應)'으로서 "함수값은 존재하되 단 하나 존재해야 한다"는 것이다. 한편 유클리드 기하에는 "직선 밖의 한 점을 지나는 평행선은 존재하되 단 하나 존재한다"는 '평행선 공리'가 있으며, 이 표현도 위 두 관념의 표현과 어딘지 상통한다. 그런데 이 평행선 공리를 변형함으로써 수학사상 가장 큰 혁명적 결과 가운데 하나인 '비유클리드 기하학'이 탄생했다. 반면에 나열이나 함수의 관념을 변형할 중대한 필요성은 아직 제기되지 않은 것 같다. 하지만 어쨌든 이처럼 서로 다른 분야에 흐르는 공통적 맥락을 함께 통찰해 보는 것만으로도 전반적 이해에 큰 도움을 얻는다고 하겠다.

따라 ‘원소나열법’을 이용해서 답을 써보면 (1)은 {김영희, 김철수}, (2)는 {김영희, 김철수, 김철수}가 된다.

and와 or의 구별

집합론과 명제론은 물론 수학 전반에 걸쳐 and와 or의 구별은 가장 기초적인 주제 가운데 하나라고 말할 수 있다. 따라서 그 내용도 쉬운 편에 속하지만 구체적인 사례들에서 뜻하지 않은 오류가 나오지 않도록 주의할 필요가 있다.
우선 예를 들어 집합론의 경우 and와 or는 교집합과 합집합, 명제론의 경우 논리곱과 논리합에 쓰인다.

집합론: $A \text{ and } B = A \cap B$(교집합), $A\, or\, B = A \cup B$(합집합).

명제론: $p \text{ and } q = p \wedge q$(논리곱), $p\, or\, q = p \vee q$(논리합).

그리고 다른 분야의 한 예로는 ‘합의 and 성격’과 ‘곱의 or 성격’을 들 수 있다. 즉 아래 식에서 보듯, 두 수의 합이 0이면 둘 다 0이어야 함에 비하여, 두 수의 곱이 0이면 둘 중 하나만 0이면 된다[3)]

$$a+b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ and } b = 0$$
$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$$

방정식의 해집합

이와 같은 예비사항을 염두에 두면서 어느 중학 교과서에 나오는 다음 문제와 그 풀이를 보자.

(예제) 다음 이차방정식을 풀어라.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

(풀이) 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x-6) = 0 \text{ --- ①}$$

이며, 따라서

3) 참고적으로 ‘교집합’과 ‘논리곱’은 ‘and’, ‘합집합’과 ‘논리합’은 ‘or’와 관련된다는 점이 여기 “‘합’의 ‘and’ 성격”과 “‘곱’의 ‘or’ 성격”과는 반대라는 점을 수업 중에 지적해주면 좋을 것이다. 이는 논리적으로 자명한 것이기는 한데, 가끔씩 논리를 무시하고 무작정 암기하거나 방심을 해서 논리적 검토를 소홀히 할 경우 혼란을 일으킬 수 있기 때문이다.

$(x-1) = 0$ 또는 $(x-6) = 0$ --- ②

이다. 그러므로 구하는 해는

$x = 1$ 또는 $x = 6$ 이다. --- ③

여기에서 ①식은 $(x-1) = a$, $(x-6) = b$로 놓으면 $ab = 0$의 형태이다. 그러므로

$a = 0$ or $b = 0$

에 따라 ②식처럼

$(x-1) = 0$ 또는 $(x-6) = 0$

으로 '또는'이란 말로 연결하는 것까지는 옳다. 하지만 이것을 그대로 이어받아 ③식처럼

"구하는 해는 $x = 1$ '또는' $x = 6$ 이다."

라고 쓰는 것은 오류이다. 왜냐하면 **"다음 방정식을 풀어라"는 말의 정확한 수학적 의미는 "다음 방정식의 '해집합(solution set)'을 구하라"는 것**이기 때문이다. 따라서 이 경우 올바르게 쓰자면

"구하는 해는 $x = 1$'과' $x = 6$ 이다."

로 해야 한다.

한편 한 걸음 더 나아가, 가장 **원칙적으로 말하자면 "{ x} = {1, 6}"으로 써야 한다**는 점도 지적해주면 좋을 것이다. 그리고 이어서 보통의 경우 이렇게까지 엄격하게 할 필요는 없으므로 "x = 1, 6" 또는 "x = 1과 6" 정도로 쓰는 게 무난하다고 설명해주면 된다. 그러나 **이때도 그 배경에는 집합론적인 '나열'의 의미가 깔려 있다**는 점을 명확히 해두어야 한다. 다시 말해서 **"x = 1과 6"에서의 '과'는 집합론 및 명제론적인 'and'의 의미가 아니라, 원소나열법에 따라 집합의 원소를 나열할 때 나타나는 '콤마(comma)', 즉 ','의 의미로** 쓰이는 것이다.[4)]

다음으로 어느 고교 교과서에 나오는 연립방정식의 풀이도 검토해보자.

(문제) 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

---

4) 방정식의 해가 아주 많거나 특별히 조건으로 나타내는 게 좋은 경우에는 해집합을 조건제시법으로 쓰거나 그 조건만 써도 되겠지만 중고교에서는 일차에서 삼, 사차방정식 정도밖에 다루지 않으므로 원소나열법으로 쓰는 것이 편하다. 그러나 부등식의 경우에는 답이 조건의 형태로 나오는 게 일반적이며, 따라서 이때는 조건제시법으로 쓰거나 현재 대부분의 교재가 그렇듯 그 조건만을 써도 될 것이다.

(풀이) 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 생각해보면 구하는 x와 y의 값을 근으로 하는 이차방정식은

$$t^2-4t+3 = 0 \quad \text{---} \ ①$$

이고 이를 인수분해하면

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \text{---} \ ②$$

이므로

$$t = 1 \ \text{또는} \ t = 3 \quad \text{---} \ ③$$

이다. 다시 말해서 문제의 연립방정식의 근은 1, 3이므로 답은 아래와 같다.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{---} \ ④$$

이 연립방정식의 풀이에서도 ③식은

t = 1, 3

또는

t = 1과 3

으로 써야 하며, ④식은

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

또는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{과} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{---} \ ④'$$

으로 써야 한다.5)

2. 근사값과 어림값

현재 우리 교재들은 '참값'의 반대말로 '근사값'이란 용어를 쓰고 있다. 그런데 국어사전에 보면 '근사값'은 없고 '근삿값'이 옳은 말이라고 한다. 나아가 '근사'는 한자어인데 '값'은 우리말이란 점에서도 '근사값'은 어딘지 부자연스럽다. 하지만 그렇다고 해서 '근삿값'이 좋다고 보기도 어렵다. 한글 맞춤법에서 가장 말썽 많은 것 가운데 하나가 '사이시옷'에 관한 규정인데, 이를 따르다 보면 '꼭짓점', '최댓값', '최솟값' 등의 어색한 수학용어들이 나오며, '근삿값'도 이 가운데 하나이다. 한편 근사값의 반대말인 '참값'은 순우리말로서

5) 한편 ④'의 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$과 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$에서의 '과'는 '나열'의 의미이지만, 이 각각의 해 안에서의 x와 y 사이의 관계는 명제론적인 and 관계라는 점도 부수적으로 특기해둘 만하다. 즉, 예를 들어 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$에서는 $\{$ 라는 중괄호가 'and'의 역할을 하는 셈이다.

아주 좋은 용어라고 여겨진다. 따라서 기왕이면 근사값도 참값이라는 순우리말에 대응하는 '어림값'으로 쓰는 게 자연스럽다. 나아가 '어림값'은 국어사전에도 나와 있는 정식 우리말이란 점을 고려하면 이를 물리칠 이유는 찾기 어렵다.

기왕 맞춤법 이야기가 나왔으니 사이시옷에 관한 부분이라도 잠시 알아두고 넘어가기로 하자. 우리 사회에 자연과학 분야에서는 맞춤법을 소홀히 하지 않을까 하는 부정적 선입관이 없지는 않은 것으로 보이며, 이를 불식하려면 자연과학 종사자들도 맞춤법에 소홀히 하지 않도록 항상 노력해야 한다는 생각이 들기 때문이다.

한글맞춤법의 역사는 사뭇 단순하다. 1933년에 조선어학회에서 처음으로 '한글맞춤법통일안'을 내놓았는데, 근 반세기가 지난 1980년에야 '한글맞춤법'이 나와 겨우 개편되었고, 1988년에는 이를 극히 일부 수정 보완했다. 따라서 격동의 한 세기를 거치며 많은 변화를 겪은 우리의 언어 상황이 제대로 반영되었다고 보기는 어렵다.[6]

이러한 현행 맞춤법의 사이시옷 규정에 따르면, 앞말이 모음으로 끝나는 우리말끼리 또는 우리말과 한자어의 합성어 중에서, ①뒷말의 첫소리가 된소리로 나거나(귓밥, 귓병 등), ②뒷말의 첫소리 'ㄴ, ㅁ' 앞에서 'ㄴ' 소리가 덧나거나(잇몸, 훗날 등), ③뒷말의 첫소리 모음 앞에서 'ㄴㄴ' 소리가 덧나면(깻잎, 훗일 등) 사이시옷을 넣고, ④한자어끼리의 합성어로는 곳간(庫間), 셋방(貰房), 숫자(數字), 찻간(車間), 툇간(退間), 횟수(回數)의 6가지에 대해서만 사이시옷을 인정한다.

여기에서 예외로 인정하는 6개의 한자어 가운데 2개가 수학과 관련된다는 점이 눈에 띈다. 그런데 횟수는 인정하면서 갯수(個數)는 인정하지 않는 것은 어딘지 불합리해 보인다. 그리고 '근삿값', '꼭짓점', '최댓값', '최솟값' 등의 어색한 수학용어는 ① 때문에 나온다. 즉 '공'을 '꽁', '작은'을 '짝은', '효과'를 '효꽈' 등으로 발음하는 경음화현상을 누구나 그다지 반기지 않는다는 점에서 볼 때. 이것들도 순화된 발음을 택해서 '근사값', '꼭지점', '최대값', '최소값'으로 씀이 바람직하다. 이는 예전에 '솟수'와 '돗수'로 잠시 썼던 것을 다시 '소수'와 '도수'로 바꾼 것, 그리고 오래도록 쓰여 왔던 '짜장면'이란 말을 '자장면'으로 바꾼 취지와도 통한다. 또한 '자릿수'의 경우도 이에 맞추어 '자리수'로 쓰는 게 좋지 않을까 생각된다.

어쨌든 이런 점들을 종합해보면 현행의 한글맞춤법 가운데 적어도 사이시옷에 대한 규정은 하루빨리 재정비해야 할 것으로 보인다. 그리고 앞으로 그런 기회를 가진다면 어문학자뿐 아니라 여러 전공분야의 사람들, 학생들, 일상적 언어감각을 굴절 없이 반영할 수 있는 건전한 소양을 가진 일반인 등이 함께 참여해야 할 것이다.

---

6) 한글맞춤법의 변화와 내용은 http://www.hangeul.or.kr/을 참조.

3. 속도와 속력

수학과 물리학에서 ‘스칼라(scalar) → 벡터(vector) → 행렬(matrix)’로 이어지는 연산 체계는 매우 광범위하게 응용된다. 그리고 중고교 과정에서는 특히 스칼라와 벡터의 구별과 응용이 중요하다. 그런데 이 중에서도 가장 기본적이라고 할 ‘속도’와 ‘속력’의 소속이 서로 뒤바뀐 채 쓰이고 있는바, 하루빨리 바로잡아야 할 것으로 여겨진다.

우선 상식이지만, 스칼라는 ‘scale → scalar’로 변형된 것에서 보듯 ‘크기’만 가지는 물리량이다. 그리고 벡터는 ‘나르다(carry)’는 뜻을 가진 라틴어 ‘vehere’에서 유래했고, 일반적으로 모든 ‘탈 것’을 가리키는 ‘vehicle’이란 단어를 통해 이 어원의 뜻을 쉽게 이해할 수 있다. 그런데 뭔가를 나르려면 “어디로?”라는 의문이 필연적으로 동반된다. 따라서 이 점을 고려하면 벡터는 ‘크기’와 함께 ‘방향’도 가지는 물리량임을 자연스럽게 이해할 수 있다. 이때 그 크기는 화살의 길이, 방향은 화살이 가리키는 방향으로 보면 편하다. 그래서 벡터는 보통 화살표로 나타낸다.

스칼라의 예로는 길이·넓이·부피·질량·에너지 등이 있고 벡터의 예로는 힘·운동량·전기장·자기장 등이 있다. 한편 이밖에 스칼라의 예로 ‘도(度)’가 들어가는 한 무리의 것들이 있다. 즉 온도·밀도·농도·고도·각도·경도(硬度)·경도(經度)·위도(緯度) 등인데, 이것들은 모두 ‘얼마만한 정도’를 나타낼 뿐 방향이라는 관념이 개재될 이유가 없으므로 모두 스칼라이다. 또 하나의 단적인 예로 주류에 들어 있는 알코올의 양을 ‘도’로 나타내는 게 있다. 이것은 주류와 알코올의 ‘양’적인 비율을 말하므로 역시 방향이란 개념과 전혀 무관하다. 그런데 현재 우리는 ‘도’로 나타내는 물리량의 가운데 오직 ‘속도’ 하나만 벡터로 분류하고 있다. 하지만 이는 ‘빠른 정도’를 뜻할 뿐이므로 ‘도’자 돌림의 다른 식구들과 함께 당연히 스칼라에 포함시켜야 한다.

반대로 ‘속력’을 검토해보자. 먼저 ‘력(力)’, 즉 ‘힘'은 크기와 방향을 함께 가진 물리량으로 가장 기본적인 벡터이다. 그리고 ’력‘이 들어간 한 무리의 물리량들, 원심력·구심력·중력·전기력·자기력·마찰력·표면장력 등이 또한 모두 벡터이다. 그런데 유독 속력 하나만 스칼라로 잘못 분류되고 있으며, 따라서 이것도 마땅히 벡터에 포함시켜야 한다.

이상의 논의가 타당하다는 점은 ‘속도위반’이라는 일상용어를 봐도 알 수 있다. 우리가 속도위반에 걸리는지의 여부는 “시속 얼마인가?”라는 ‘빠르기’가 문제되지 “어디로 가는가?”라는 ‘방향’이 문제되는 것은 아니다. 그런데 ‘속도위반’이란 게 일상용어뿐 아니라 정식의 법률용어로도 쓰인다는 점을 고려하면 문제는 좀 더 미묘해진다. 속도는 수학에서만 벡터로 쓸 뿐 일상적으로나 법률적으로나 스칼라로 인정하고 있다는 뜻이기 때문이다. 어떤 교사용지도서는 “우리가 ‘속도계’라고 부르는 것은 ‘속력계’라고 불러야 옳다”라고 이야기하고 있지만 이는 본말이 전도된 것으로서 적어도 여기서는 수학이 양보해야 옳다.

마지막으로 영어와 비교해보자. 영어에는 speed와 velocity란 단어가 있는데, 우리와 같은 비영어권 사람은 물론 영어권 사람들도 어감상 speed는 친밀한 일상용어로 여기며

velocity는 어딘지 딱딱한 전문용어로 여긴다. 그리고 이런 용법으로부터 자연스럽게 speed는 스칼라, velocity는 벡터를 가리키는 용어로 삼았다. 우리의 경우도 굳이 조사할 필요도 없이 거의 모든 사람들이 '속도'보다 '속력'을 더 딱딱한 단어로 받아들일 것이며, 따라서 이 점에서 보더라도 서로의 소속을 바꾸는 게 타당하다.

4. 유리화와 실수화의 필요성

현행 교육과정에서 무리수나 허수가 분수의 분모에 있을 때 행하는 '분모의 유리화'와 '분모의 실수화'는 각각 중학교와 고등학교에서 배운다. 그런데 이 두 주제가 논리적으로 긴밀한 연관성이 있는데도 불구하고 이런 점은 전혀 도외시한 채 단순히 계산 요령만 가르치고 있다.

먼저 분모의 유리화부터 살펴보자. 분모의 유리화는 무리수의 나눗셈과 관련된 계산이다. 그런데 무리수도 수이므로 자연수·정수·유리수와 마찬가지로 사칙연산을 해야 한다. 기본적으로 수라는 것은 계산을 하기 위해서 만든 것이므로 가장 기본적인 사칙연산부터 되지 않는 한 사실상 아무런 쓸모도 없을 것이다. 그런데 무리수의 덧셈·뺄셈·곱셈에서는 별 문제가 없다. 예를 들어

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1.414\cdots + 1.732\cdots = 3.146\cdots$$
$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = 1.414\cdots - 1.732\cdots = -0.318\cdots$$
$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} = 2.449\cdots$$

로 하면 되기 때문이다. 또한 나눗셈 가운데서도 무리수가 분자에 있을 때는 별 문제가 없다.

$$\sqrt{2} \div 3 = 1.414\cdots \div 3 = 0.471\cdots$$

과 같이 자릿수를 옮겨가면서 무한히 계속할 수 있기 때문이다. 하지만 무리수가 분모에 있을 때는 상황이 다르다. 아래 예의 경우

$$2 \div \sqrt{3} = 2 \div 1.732\cdots$$

처럼 계산해야 하는데, 몫의 맨 처음 숫자가 1인 것은 확실하지만 그 다음 자릿수를 알아내려면 아주 복잡한 계산을 거쳐야 한다(이 과정은 글로 설명하기가 곤란하고 직접 해보면 쉽게 납득할 수 있다). 그렇더라도 복잡한 것을 감수하고 계속하면 아마 몇 자리까지는 구할 수 있을 것이다. 그러나 하면 할수록 오차가 증폭되며 결국 어느 단계에서는 더 이상 진행한다는 게 무의미해져 버린다. 즉 분모에 무리수가 있는 나눗셈은 위의 다른 연산과 비교할 때 현격한 어려움을 안고 있다.

물론 이에 대해서 "컴퓨터로 하면 될 것 아닌가?"라고 반문할 수 있다. 그러나 컴퓨터의 역사는 기껏 몇 십년에 지나지 않으므로 선대의 수학자들은 그 혜택을 볼 수 없었다. 따라서 필산으로 할 때는 다른 방법을 고안해야 하며 그 해결책이 바로 분모의 유리화였다.

이런 점에서 분모의 유리화는 선대의 유물이라고 볼 측면도 있다. 그러나 아무리 계산기나 컴퓨터가 발전해도 필산은 반드시 필요하며, 특히 수가 아닌 수식의 형태를 계산할 때는 더욱 그렇다는 점에서 이런 인식을 불식할 수 있다.
한편 분모의 실수화에 대해서도 일단 계산의 편의성이란 점에서는 마찬가지로 이해할 수 있다. 하지만 여기에는 한 가지의 추가사항이 있다. 무리수의 경우 실수이므로 그에 대한 사칙연산을 따로 정의할 필요가 없다. 그러나 허수는 새로운 수이므로 사칙연산을 따로 정의해야 하며, 이때 분모의 실수화는 사실상 '허수로 나누기'라는 연산의 정의에 해당한다는 점이다. 더 정확히 말하면 '복소수의 나눗셈'은

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

로 정의되며, 따라서 분모의 실수화는 단순한 선택사항이 아니라 필수사항이 되는 셈이다.

5. 소수의 무한성 증명

"소수의 개수는 무한하다"라는 정리에 대하여 <원론(Element)>에 나오는 유클리드(Euclid, BC300년경)의 증명은 이른바 '수학적 우아함의 전형(a model of mathematical elegance)'으로 널리 알려져 있다. 그리고 이렇게 알려진 데에는 유클리드의 증명이 간결하다는 점도 크게 작용했을 것으로 여겨진다. 모름지기 복잡한 것 치고 우아하다고 여겨지는 것은 드물기 때문이다.

하지만 이처럼 간결한 증명에 뜻밖에도 한 가지 흔한 오해가 있어서 이 증명의 우아함을 100% 제대로 음미하지 못한다는 것은 자못 안타까운 일이다. 물론 본래의 증명이 간결한 만큼 이 오해를 푸는 것도 그다지 어려운 것은 아니다. 다만 이 오해가 어떤 교사용 지도서에서도 발견되기에 이 기회를 통해서 다시금 주의를 환기하고자 한다.
우선 유클리드의 증명을 가장 간결하게 쓰면 다음과 같다.

> "소수의 개수가 유한이라 하고 이 모두의 곱에 1을 더한 수를 생각해보면 이는 새로운 소수이므로 소수의 개수는 유한일 수 없다."

그런데 이것만으로는 내용을 파악하기가 좀 까다로우므로 아래와 같이 보충적으로 설명해주면 좋다.[7)]

소수의 개수가 유한이라 하고, 이를 모두 나열하면, 2, 3, 5, ⋯, p로 쓸 수 있다. 이제

7) 유클리드가 제시한 본래 증명의 자세한 내용은 http://aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/java/elements/bookIX/propIX20.html을 참조. 여기서는 지면 관계상 이를 약간 변형해서 썼다.

이 모두를 곱한 것에 1을 더한 수를 p'이라 하면 $p' = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$이다. 그런데 p'은 2부터 p까지의 어느 소수로 나누어도 항상 1이 남는다. 따라서 p'은 1과 자신 이외의 약수를 갖지 않으므로 새로운 소수이다. 이처럼 아무리 많은 소수를 택하더라도 그 개수가 유한하다면 이를 토대로 항상 새로운 소수를 찾을 수 있으므로 결국 소수의 개수는 무한하다.

그런데 이 증명의 내용을 “2부터 이어지는 일련의 소수들을 곱한 다음 1을 더함으로써 실제로 언제나 새로운 소수를 얻을 수 있다"고 풀이하는 경우가 많고 이것이 위에서 말하는 흔한 오해이다. 그러나 가장 간단한 예로

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

에서 보듯 이 방법이 항상 소수를 만들어 내는 것은 아니며, 실제로는 크기가 커질수록 소수가 되는 경우는 드물어져서 결국 오히려 극히 예외적인 현상이 되고 만다. 이 증명이 말하는 바는 “예를 들어 존재하는 모든 소수가 2, 3, 5, 7, 11, 13뿐이라고 가정할 때는 $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$이 새로운 소수가 된다는 모순을 낳는다”는 것이다. 그러나 알다시피 소수는 이밖에도 더 많이 있으며, 따라서 위의 ‘새로운 소수’는 “소수가 2, 3, 5, 7, 11, 13뿐”이라는 ‘가상적 전제’에서 나오는 ‘가상적 결론’일 따름이다.
한 가지 흥미로운 것은 이것을 약간 달리 해서 보다 간단히 증명할 수도 있다는 사실이다. 즉 소수의 개수가 유한이라 하고 그중 최대의 것을 n이라고 할 때 $n!+1$이란 수를 생각해보자. 그러면 이 수는 n이하의 어떤 수로 나누어도 1이 남으므로 새로운 소수이다. 따라서 소수의 개수는 무한이다.
이 증명과 관련하여 끝으로 덧붙일 것은 이 증명이 ‘귀류법’을 설명하는 최적의 것으로 활용될 수 있으리라는 점이다. 우리 교과과정에서는 귀류법의 대표적 적용례로 “$\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하라”는 문제를 사용한다. 그러나 ‘수학적 우아함의 전형’을 통해 귀류법을 설명하는 것이 학생들로 하여금 수학에 매력을 느낄 수 있도록 하는 보다 나은 길이라고 여겨진다.

6. 양극과 음극

전기화학에서 전지(화학에서 배우는 갈바니전지나 볼타전지뿐 아니라, 자동차의 배터리와 가게에서 판매하는 건전지를 모두 포함)의 극성(polarity)을 말할 때, 그 ‘+/−’에 대하여 혼란이 있음을 유의해야 한다. 즉 우리의 일상생활에서는 “+극 = 양극, −극 = 음극”으로 알고 또 쓰고 있지만, 전기 화학에서는 “+극 = 음극, −극 = 양극”으로 정했다는 어

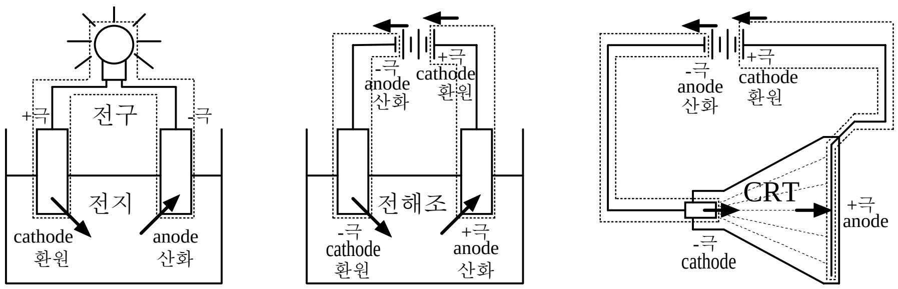
이없는 혼란이 그것이다. 여기서 상식적 측면, 일상어법적 측면, 그리고 수학에서 이보다 먼저 확립된 양수·음수라는 관념적 측면 등의 어느 면에서 보더라도 유지되어야 할 것은 일상용법이고, 고쳐져야 할 것은 전기화학에서의 용법이다.
혼란의 원인은 대한화학회에서 전극의 실제적인 +/−는 상관없이, 무조건 “anode = 양극, cathode = 음극”이라고 번역하기로 정한 데에 있다. 즉, 맨 처음에 이를 번역한 그 누군가의 잘못을 바로 잡지 않고 그냥 그 잘못을 답습한 데에서 유래했다. 이를 해결하는 길은 ① ‘anode·cathode’는 ‘산화극·환원극’으로 번역하고 ② ‘양극·음극’이란 명칭은 (anode·cathode에 대해서가 아니라) ‘+/−’에 대하여 사용하는 것이다. 영어에서도 이렇게 쓰고 있으며 (즉 우리말의 양/음에 해당하는 positive/negative란 말은 +/−에 대해서만 쓰고 있으며, 산화/환원에 대해서는 anode/cathode만을 쓰고 있다), 따라서 외국에서도 전지와 전해에서 +/−극이 바뀌는 것은 마찬가지이다(다시 말해서, 위 ①과 ②에 따르는 것이 본래 이 규칙을 정한 영어에서의 표현 규약에 정확히 부합한다). 아래에는 ‘현재 상황’과 위 ①②에 의한 ‘개선 방안’을 표로 비교했다.

구 분	극 성	전 지	전 해
현재 상황	+극(positive)	cathode(음극) : 환원	anode(양극) : 산화
	−극(negative)	anode(양극) : 산화	cathode(음극) : 환원
개선 방안	+극(positive 양극)	cathode(환원극) : 환원	anode(산화극) : 산화
	−극(negative 음극)	anode(산화극) : 산화	cathode(환원극) : 환원

이상의 내용은 전기 화학과 연관해서 한 이야기이고 실제로 anode와 cathode를 가장 쉽게 구분하는 방법은 ‘CRT’란 약어를 상기하는 것이다. CRT는 cathode ray tube의 약어이며, 흔히 컴퓨터의 모니터를 이렇게 부른다(모니터는 CRT의 일종이다). 모니터의 내부를 보면 화면의 반대쪽에 ‘전자총’이 있는데, 전자총은 전자를 발사하는 극으로서 cathode이고, cathode에서 나오는 것, 즉 ‘전자’가 바로 ‘cathode ray’이며 우리 교과 과정에서는 이를 ‘음극선’이라고 부른다. 그리고 화면 부근에 그물처럼 자리잡은 것이 anode에 해당한다. 요컨대, 아래 그림에서 알 수 있듯이, 전지·전해·CRT 등에서 “cathode는 항상 ‘전기선로(線路)’에서 ‘비선로(非線路)’로 전자를 방출하는 극이며, anode는 그 반대 극”이다. 여기에서 “전기선로라 함은 전기회로 가운데 전선과 전극으로 구성된 부분”을 말하며, 일반적으로 잘 알고 있다시피 “전기회로는 전류가 흐르는 폐쇄된 길”을 뜻한다. 즉 anode와 cathode의 구분에 있어서 “기준은 선로”이고, 아래의 그림에서 “점선으로 에워싼 부분이 선로”이며, “전지·전해조·CRT는 (회로의 일부이되 선로가 아닌)비선로”이다. 그리고 “한 선로에서 전자를 방출하는 극은 cathode, 전자를 거둬들이는 극은 anode”이다. 따라서 가장 일반적으로는, “cathode는 방전극(放電極), anode는 집전극(集電極)”이라고 부르는 것이 좋을 것으로

생각된다. 이에 의하면, 전자를 내주는 방전극으로서의 cathode 주위에서 물질의 환원반응이 일어나고, 전자를 거둬들이는 집전극으로서의 anode 주위에서 물질의 산화반응이 일어날 것은 당연하여, 이해와 암기에 아무런 어려움이 없다. 그리고 극성은 위 개선 방안에서 제시한 대로 "+극 = 양극, −극 = 음극"으로 정하여 부르면, 이 또한 영어 관습과 일치하여 아무 문제가 없다.

(그림) 전지·전해조·CRT의 비교. 화살표는 '극(선로의 끝)과 반응계 사이'에서 전자의 진행 방향이다. "전지는 회로에 전기를 흐르게 하는 산화·환원이라는 화학반응을 하는 계"이고, "전해조는 전지가 공급하는 전류를 이용하여 전기분해라는 화학반응을 하는 계"이며, "CRT는 전지가 공급하는 전류를 이용하여 화면에서의 발광이라는 물리반응을 하는 계"이다. 여기에서 "극은 선로와 반응계의 연결 요소"이며, 선로와 반응계가 합하여 회로를 이룬다. 즉 선로에 있는 전자의 입장에서 볼 때, 출구는 cathode이고 입구는 anode이다. 첫 그림의 전구를 형광등으로 하면, 이는 사실상 CRT의 경우와 같음을 특기할 것.



7. 맺음말

첫 머리에서 말했듯 창의성은 기존의 굴레를 뛰어넘는 데에서 나온다. 그러나 이 말을 창의성은 기존의 지식과 아무런 연결 고리도 없는 것이라는 식으로 받아들여서는 안 된다. 오히려 창의성은 어떤 근본원리를 가장 철저히 꿰뚫고 있을 때 언뜻 아무 상관없는 것처럼 보이는 다른 현상에서도 같은 원리가 운행됨을 발견하는 능력, 또는 이와 다른 새로운 원리가 작용하고 있음을 간파하는 능력을 가리킨다고 봄이 옳다. 이런 점에서 창의성을 최선의 수준으로 구현하려면 기존 지식들에 나오는 여러 개념들을 올바로 정립하는 것이 선결과제임을 잘 알 수 있다. 이 글에서는 영재교육에서 접할 수 있는 몇 가지 사례를 통하여 이 과정을 구체적으로 살펴보았는바, 앞으로 이런 지식들이 축적되어 보다 나은 영재교육에 기여할 수 있기를 기대한다.