2005 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회
2005 년 5 월 13 일~14 일, 충북대학교

점진적 정수 중단 하에서의 와이블분포에 대한 계량형 샘플링검사
Variables Sampling Plans for the Weibull Distribution under Progressive Failure Censoring

이 상 호 전 치 혁 S.Balamurali
{samo35, chjun, sbm}@postech.ac.kr
포항공과대학교 기계산업공학부
경상북도 포항시 남구 효자동 산31

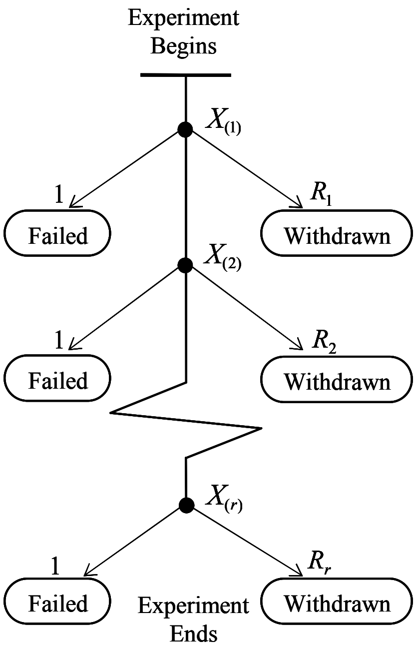
Abstract

Progressively censored variables sampling plans are proposed for the lot acceptance of parts whose life follows Weibull distribution with known shape parameter. Progressive type-II censoring gives us not only time to failure but also degradation information. So, one can construct more flexible and more cost effective sampling plans. Design parameters of our sampling plan are determined by using the usual two-point approach.

1. Introduction

소비자에게 만족스러운 품질의 제품을 제공하기 위하여 생산자는 여러 단계에서 품질 검사를 하게 되고, 샘플링 검사는 이러한 품질 검사의 일종이다. 샘플링 검사는 로트에서 일부분의 표본을 추출하여 검사를 하게 되는데 이러한 검사는 전수검사에 비해 검사 시간이 많이 절약된다. 또한 요즘과 같이 제품들이 높은 신뢰도 (high-reliability) 를 보일 때에는 샘플링 검사에서 모든 제품이 고장 날 때까지 검사하는 것은 시간낭비이며 많은 비용이 든다. 그래서 이를 해결하기 위해 정수중단 (또는 type-II) 방법이나 정시중단 (또는 type-I) 방법을 사용하고 있다. 그리고 여러 가지 이유에 의해 주기적으로 작동하는 제품을 제거할 필요가 있을 수 있다. [2]

정수 중단 샘플링 검사는 로트에서 n 개의 샘플을 임의로 추출한 후 제품이 사용될 환경 하에서 동시에 검사를 시작한다. 그리고 r 개의 고장이 발생할 때까지 검사를 하게 된다. 점진적 정수 중단 검사는 r 번의 고장이 발생할 때까지 검사를 하되, 고장이 발생할 때 마다 작동하는 제품의 일부를 임의로 제거하는 샘플링 검사이다. [그림 1]은 점진적 정수 중단 검사의 진행을 개괄적으로 나타낸 그림이다. 그림에서 $X_{(i)}$ 는 i 번째 고장이 발생한 시간이며, R_i 는 이 때 제거하는 작동하는 제품의 수이다. 이러한 샘플링 검사는 (1) 또 다른 목적의 검사를 위해 부품을 사용할 때, (2) 빠른 검사의 필요성과 샘플에서 제품의 특정 수명길이를 포함하고자 함에 있어서 절충안이 있을 경우, (3) 검사에 이용되는 기계를 절약하고 또 다른 검사에 이용할 필요가 있을 경우, (4) 고장이 발생한 제품과 발생하지 않은 제품이 물리적으로 노후가 어떻게 다른지를 알고자 할 때, 그리고 (5) 제품이 초기에 어떤 형태로 노후가 발생하는지에 대한 정보를 모으고자 할 때 이용되는 검사 형태이다. [4] 이를 이용하면 좀더 유연하고 비용이 덜 드는 샘플링 검사를 수행할 수 있다.



[그림 1] 점진적 정수 중단 검사의 진행

본 논문에서는 와이블분포 하에서의 점진적 정수중단 샘플링 검사에 대하여 생각해본다. 이와 관련된 많은 연구가 이루어져 왔고, 합격 여부 판정 시 분포 모수가 관여하며 일반적으로 extreme value distribution과 최우추정법(Maximum Likelihood Estimation)이 사용되어 왔다.

2. Assumption

부품의 수명이 형상모수 m, 척도모수 λ 인 와이블 분포를 따른다고 가정하면 다음과 같은 누적확률분포를 따른다.

$$F(x) = 1 - \exp(-(\lambda x)^m), \quad x \ge 0 \tag{1}$$

형상모수 m 은 알려져 있다고 가정하자. 이와 관련된 실제 현장에서의 경험에 의하면 이러한 가정은 무리가 아니라는 것을 알 수 있다. 또한 이를 통해 m 을 결정할 수 있다. 그리고 수명이 지수분포를 따른다는 가정은 위와 같은 와이블 본포에서 형상모수 m 이 1이라는 가정과 같다.

또한 부품의 수명과 관련된 최소한계치 L 이 정해져 있다고 가정하면 작동하지 않는 부품의 비율(unreliability)은 다음과 같이 나타낸다.

$$p = P\{X < L\} = F(L) \tag{2}$$

이때 X 는 부품의 수명을 나타낸다. 만약 p 가 주어졌다면, 이에 해당하는 λL 은 (2)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w = (\lambda L)^m = -\ln(1-p) \tag{3}$$

3. Proposed Progressive Sampling Plan

점진적 정수 중단 검사에서는 r 개의 고장이 발생할 때까지 검사를 계속하면서, i 번째 고장이 발생할 때 작동하는 부품 중에서 임의로 R_i 개를 선택하여 제거한다. 본 논문에서는 R_i 에 대한 비율, 즉 $q_i = R_i / n$ 을 안다고 가정한다. 이때 $\sum_{i=1}^{r} q_i < 1$ 이어야 한다. 그리고 $\sum_{i=1}^{r} R_i + r = n$ 이라는 것을 알 수 있다. $q = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} q_i\right)$ 라 하면, n 은 $n = r/(1-q)$ 를 이용하여 구할 수 있다.

다음과 같은 점진적 샘플링 검사를 생각해보자.

1) 로트에서 n 개의 표본을 임의로 추출한다.
2) Degree of censoring q_i 를 선택하고 $q = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} q_i\right)$, $r = n(1-q)$ 를 이용하여 r 을 결정한다.
3) r 개의 고장이 발생할 때까지 검사를 수행하며, i 번째 고장이 발생하면 작동하는 부품에서 R_i 개를 임의로 제거하고 고장이 발생한 시간, $X_{(i)}$ 를 기록한다.
4) 다음을 계산한다

$$v = \sum_{i=1}^{r} (R_i + 1) X_{(i)}^m \tag{4}$$

5) $v \ge kL^m$ 을 만족하면 로트를 합격시키고 그렇지 않으면 불합격시킨다.

위에서 n 을 정하는 것은 결국 r 을 정하는 문제가 되기 때문에 위의 샘플링 검사의 설계변수는 (r,k) 라 할 수 있다. 참고로 일반 정수 중단 검사는 $R_1 = \mathrm{K} = R_{r-1} = 0$, $R_r = n - r$ 인 경우라 할 수 있다.

$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(r)})$ 은 와이블분포에서 나온 순서통계량이므로 $(X_{(1)}^m, X_{(2)}^m, ..., X_{(r)}^m)$ 은 모수가 λ^m 인 지수분포에서 나온 순서통계량이 된다.

$$S_1 = nX_{(1)}^m \quad (5a)$$

$$S_i = \left(n - \sum_{j=1}^{i-1}(R_j - 1)\right)\left(X_{(i)}^m - X_{(i-1)}^m\right), \quad i = 2,\ldots,r \quad (5b)$$

라고 하면 $\left(X_{(i)}^m - X_{(i-1)}^m\right)$ 은 $\left(n - \sum_{j=1}^{i-1}(R_j - 1)\right)$ 개의 지수분포를 따르는 확률변수 중에 가장 작은 값을 나타내므로, S_i 는 모수가 λ^m 인 서로 독립이고 동일한 지수분포를 따르게 된다. 그러므로 $\sum_{i=1}^{r} S_i$ 는 모수가 (r, λ^m) 인 감마분포를 따르게 된다. 이를 식(4)와 비교하면 동일하다는 것을 알 수 있다.

$$v = \sum_{i=1}^{r}(R_i + 1)X_{(i)}^m = \sum_{i=1}^{r} S_i \quad (6)$$

그러므로 v 역시 동일한 감마분포를 따른다는 것을 알 수 있다.

로트 품질이 p 일 때 로트의 검사 합격 확률은 다음과 같다.

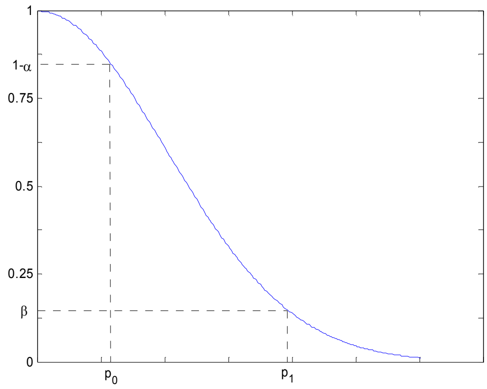
$$P_a(p) = P\{v \geq kL^m \mid p\} = P\{2\lambda^m v \geq 2\lambda^m kL^m \mid p\} \quad (7)$$

식(7)에 있는 $2\lambda^m v$ 는 v 가 $\left(r, \lambda^m\right)$ 인 감마분포를 따르기 때문에 감마분포와 카이제곱분포의 관계에 따라 자유도가 $2r$ 인 카이제곱분포를 따른다. 그러므로 식(7)은 다음과 같이 간단히 만들 수 있다.

$$P_a(p) = 1 - G_{2r}(2kw) \quad (8)$$

w 는 식(3)에서 주어진 바와 같고 G_ϕ 는 자유도가 ϕ 인 카이제곱을 따르는 확률변수의 분포함수이다.

위와 같은 샘플링 검사 계획에서 (r,k) 를 결정하기 위해서 일반적으로 검사 특성 곡선(OC Curve)의 두 점을 이용한다. Fertig & Mann [1]과 마찬가지로 acceptable reliability level(ARL)이 p_0 일 때 합격확률은 $1-\alpha$ 보다 커야 한다. 이때 α 를 생산자 위험이라고 부른다. 그리고 lot tolerance reliability level (LTRL)이 p_1 일 때 로트의 합격확률은 β 보다 작아야 한다. 이때 β 는 소비자 위험이라고 부른다. 이 밖에 검사 특성 곡선에 대한 설명은 Govindaraju and Kuralmani [5] 등에서 자세히 설명 되어 있다. [그림 2]는 검사 특성 곡선에서 α 와 β, p_0 와 p_1 의 관계를 나타낸 것이다.



[그림 2] 검사 특성 곡선과 α, β

(r,k) 를 결정하기 위해서는 다음 두 개의 식을 풀어야 한다.

$$1 - G_{2r}(2kw_0) \geq 1 - \alpha \quad (9a)$$

$$1 - G_{2r}(2kw_1) \leq \beta \quad (9b)$$

두 식에서 w_0 와 w_1 은 식(3)에서 p_0, p_1 에 해당하는 값들이다. $\chi^2_{\theta,\phi}$ 가 자유도가 ϕ 인 카이제곱 분포에서 꼬리 확률이 θ 인 지점을 나타낸다면 식(9)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2kw_0 \leq \chi^2_{1-\alpha,2r} \quad (10a)$$

$$2kw_1 \geq \chi^2_{\beta,2r} \quad (10b)$$

식(10a)를 식(10 b)로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{w_0}{w_1} = \frac{\ln(1-p_0)}{\ln(1-p_1)} \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha,2r}}{\chi^2_{\beta,2r}} \quad (11)$$

그러므로 r 은 식(11)을 만족하는 가장 작은 정수를 선택하면 구할 수 있으며, k 는 식(10a)이나 식(10b)에서 등호가 성립되는 경우를 이용하여 구할 수 있다.

$$k = \chi^2_{1-\alpha,2r} / (-2\ln(1-p_0)) \qquad (12)$$

즉, 본 검사 방안의 설계변수는 안다고 가정한 형상모수 m 의 값과 무관하고 개별 q_i 값과 관계없이 결정됨을 알 수 있다.

[표 1]은 $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ 일 때 다양한 (p_0, p_1) 에 대하여 설계변수 r 과 k 를 구한 결과이다.

[표 2]는 같은 상황에서 r 과 Balasooriya et al. 에서 사용한 q_i 조합을 가지고 n 을 계산한 결과이다. Balasooriya et al.[2] 에서는 q_i 의 조합 (q_1, q_2, q_r) 를 $i = 2,\ldots,r-1$ 에 대해서 $q_i = 0$ 로 정하고 사용하고 있다. 본 논문의 방법은 동일한 $(\alpha, \beta, p_0, p_1)$ 에 대해서 q_i 가 어떠한 형태로 조합을 형성하고 있는가에 상관없이 q_i 의 합이 같으면 같은 표본 수를 갖게 된다.

[표 1] 샘플링 검사의 설계변수 $(\alpha = 0.05, \beta = 0.1)$

p_0	p_1	r	k
0.001	0.002	18.71	12201
	0.004	5.09	2025.6
	0.006	3.23	937.27
	0.01	2.13	408.53
	0.03	1.17	86.088
	0.05	0.96	44.353
0.005	0.01	18.6	2417.6
	0.015	7.74	757.7
	0.02	5.05	399.29
0.01	0.02	18.47	1195.3
	0.04	5	196.03
	0.05	3.82	125.65
	0.10	2.06	37.779
	0.15	1.58	20.048
0.05	0.1	17.42	217.74
	0.2	4.59	33.477
	0.3	2.83	14.267
0.1	0.2	16.08	95.856
	0.4	4.04	13.189
	0.5	2.98	7.6637

4. Conclusion and Future Works

본 논문은 새로운 점진적 정수 중단에 의한 샘플링 검사 설계를 제안하였다. 제안한 샘플링 검사 설계는 shape parameter와 상관없이 설계변수가 결정되는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 1회 샘플링 검사에 한하여 제안하였지만, 2회 샘플링 검사와 반복그룹 샘플링 검사 등에 확장할 수 있을 것이다.

[표 2] Balasooriya et al. 과 비교한 샘플링 검사의 표본 수 $(\alpha = 0.05, \beta = 0.1)$

p_0	p_1	$\sum q_i = 70(\%)$			$\sum q_i = 40(\%)$		
		Proposed	Balasooriya (42,0,28)	Balasooriya (24,23,23)	Proposed	Balasooriya (24,0,16)	Balasooriya (14,13,13)
0.001	0.01	7.1	97	70	3.55	59	57
	0.03	3.9	27	24	1.95	17	17
	0.05	3.2	14	14	1.6	11	11
0.01	0.05	12.733	77	74	6.367	52	51
	0.1	6.867	21	20	3.433	17	17
	0.15	5.267	10	10	2.633	9	9

References

[1] Fertig, K.W., and Mann, N.R. (1980), "Life-test sampling plans for two-parameter Weibull populations," *Technometrics*, 22, pp.165-177.

[2] Balasooriya, U., Saw, S.L.C., and Gadag, V.G. (2000), "Progressively Censored Reliability Sampling Plans for the Weibull Distribution," *Technometrics*, 42, 160-168.

[3] Ng, H.K.T., Chan, P.S., and Balakrishnan, N. (2004), "Optimal Progressive Censoring Plans for the Weibull Distribution," *Technometrics*, 46, pp. 480-481

[4] Viveros, R., and Balakrishnan, N. (1994), "Interval Estimation of Parameters of Life from Progressively Censored Data," *Technometrics*, 36, pp. 84-91

[5] Govindaraju, K., and Kuralmani, V. (1992), "A Note on the Operating Characteristic Curve of the Known Sigma Single Sampling Variables Plan," *Communications in Statistics Theory and Methods*, 21, pp. 2339-2347