2005 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회
2005년 5월 13일~14일, 충북대학교

D-정책과 복수휴가를 갖는 MAP/G/1 대기행렬시스템의 고객수분석

전상훈·이호우

성균관대학교 시스템경영공학과

경기도 수원시 장안구 천천동 300 성균관대학교 자연과학캠퍼스 시스템경영공학과

Abstract

본 논문에서는 D−정책과 복수휴가를 갖는 *MAP/G/1* 대기행렬시스템의 고객수를 분석한다. 고객도착은 마코비안 도착과정(MAP)을 따른다. 서어버는 바쁜기간 종료 직후 휴가를 떠나고 휴가에서 돌아온 직후의 시스템 총일량이 D를 초과할 때까지 휴가를 반복한다. 만일, 휴가에서 돌아온 직후의 시스템 총일량이 D를 초과하면, 서어버는 즉시 서비스를 시작한다.

본 논문에서는 임의의 이탈시점 고객수분포를 유도하고, 이를 이용하여 임의시점 고객수분포와 평균고객수를 유도한다. 또한, 동일한 조건하에 D-정책과 복수휴가를 갖는 *M/G/1* 대기행렬시스템의 평균고객수와의 차이를 비교해 본다.

1. 서 론

본 장에서는 D-정책과 복수휴가를 갖는 $MAP/G/1$ 대기행렬시스템의 고객수를 분석한다. 고객은 MAP(Markovian Arrival Process)으로 시스템에 도착하고, 한 명의 서어버가 선입선출(FCFS)에 따라 한 번에 한 명씩 고객을 서비스한다. 시스템에 도착하는 각 고객들의 서비스시간은 상호 독립이며, 동일한 분포를 따른다. 서어버는 시스템 내에 고객들을 모두 서비스할 때까지 서비스를 계속하며, 시스템 내에 더 이상 서비스할 고객이 없으면 즉시 휴가를 떠난다. 만일, 서어버가 휴가에서 돌아왔을 때 시스템 총일량이 D를 넘었다면, 서어버는 서비스를 시작하게 되며, 그렇지 않으면 다시 휴가를 떠난다. 본 논문에서 휴가의 길이는 UMC상태와 무관하며, 휴가들은 서로 독립이고 동일한 일반분포를 따른다.

N-정책과 복수휴가를 갖는 $MAP/G/1$ 대기행렬에 대한 분석은 Kasahara *et al.*[1]에 의해서 최초로 이루어졌으며, 안부용[5]은 부가변수법을 이용하여 고객수분포를 유도하고 분해성질을 이용하여 확률적인 해석을 하였다. 하지만 D-정책과 복수휴가를 갖는 $MAP/G/1$ 대기행렬에 대한 분석은 아직까지 어떠한 방법으로도 이루어지지 않았다.

2. 고객수분포

본 장에서는 D-정책을 갖는 $MAP/G/1$ 대기

행렬시스템의 이탈시점 고객수분포를 유도하고, 이 를 이용하여 임의시점 고객수분포를 유도한다.

2.1 임의의 이탈시점 고객수분포

본 절에서는 임의의 이탈시점에서의 고객수에 대한 벡터생성함수(vector generating function)를 유도한다.

임의의 이탈시점에서의 고객수분포를 구하기 위하여 고객을 다음의 두 가지 형태로 분류하자.

(1) 특별고객(Special Customer)
  : 서어버가 유휴한 것을 보면서 도착하는 고객들
(2) 보통고객(Ordinary Customer)
  : 서어버가 바쁜 것을 보면서 도착하는 고객들

위와 같이 고객을 두가지 형태로 나누는 것은 시험고객이 어느 형태에 속하느냐에 따라 고객들이 갖고 오는 일량의 분포가 달라지기 때문이다. 따라서 고객의 형태에 따라 분석방법도 달라지게 된다.

임의의 이탈시점 고객수 및 그때의 UMC상태를 나타내는 결합확률을 다음과 같이 정의하자.

$x_{k,i} = Pr$(임의의 이탈시점에서의 고객수가 k이고, 그때의 UMC 위상이 i)

$x^{SC}_{k,i} = Pr$(이탈하는 임의의 고객이 특별고객이고,이탈직후의 고객수가 k, UMC 위상이 i)

$x^{OC}_{k,i} = Pr$(이탈하는 임의의 고객이 보통고객이고, 이탈직후의 고객수가 k, UMC 위상이 i)

또한 다음의 확률벡터들을 정의한다.

$$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,m})$$
$$\boldsymbol{x}^{SC}_k = (x^{SC}_{k,1}, x^{SC}_{k,2}, \cdots, x^{SC}_{k,m})$$
$$\boldsymbol{x}^{OC}_k = (x^{OC}_{k,1}, x^{OC}_{k,2}, \cdots, x^{OC}_{k,m})$$

위에서 정의한 확률벡터들로부터 다음이 성립한다.

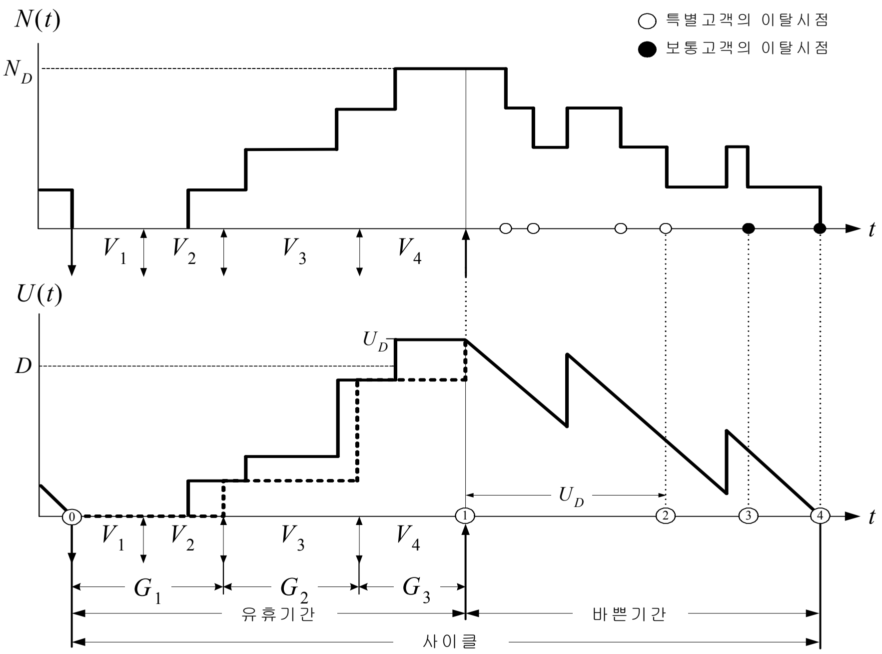
$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^{SC}_k + \boldsymbol{x}^{OC}_k, \ (k \geq 0). \tag{2.1}$$

2.2 유휴기간의 분석

임의의 이탈시점 고객수의 행렬생성함수(matrix generating function) $\boldsymbol{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_k z^k$를 유도하기 위해서는 특별시험고객의 이탈시점 고객수에 대한 행렬생성함수와 보통시험고객의 이탈시점 고객수에 대한 행렬생성함수를 구해야 한다. 그런데 특별시험고객의 이탈시점 고객수를 분석하기 위해서는 특별시험고객 도착 직후 바쁜기간 시작점까지 도착한

특별고객수와 바쁜기간이 시작된 시점부터 자신이 서비스받고 시스템을 이탈할 때까지 도착한 보통고객수를 알아야한다. 특별시험고객이 유휴기간에 도착하면서 보는 일량과 그때의 UMC상태는 독립이 아니므로 유휴기간의 분석은 필수적이다. 유휴기간 분석을 위해서 일량 군휴가과정을 이용한다.

일량 군휴가과정은 다음과 같다. 시스템의 총 일량이 0이 되는 순간(<그림 2.1>에서 시점 ⓪), 서어버는 휴가를



<그림 2.1> D-정책과 복수휴가를 갖는 시스템의 고객수와 일량

떠나고, 그 시점이 첫 번째 군휴가 G_1의 시작점이 된다. 첫 번째 군휴가는 휴가 종료점에 일량의 증가가 있을 때까지 지속된다. 즉, 군휴가는 한 개 이상의 휴가들로 구성된다. 첫 번째 군휴가에 속한 휴가의 종료점에 일량의 증가가 있어서 첫 번째 군휴가가 종료되더라도 그때 시스템 총일량이 D보다 작다면, 두 번째 군휴가 G_2가 시작된다. 두 번째 군휴가도 휴가 종료점에 일량 증가가 생길 때까지 지속된다. 이런 일량 군휴가과정은 군휴가의 종료점의 시스템 총일량이 D를 넘게될 때(<그림2.1>에서 시점 ①) 서어버가 즉시 서비스를 시작한다. 한 군휴가는 $MAP/G/1$ 복수휴가 시스템의 유휴기간과 확률적으로 동일하다.

일량 군휴가과정의 개념을 사용하는 이유는 이러한 분석방법이 각 휴가들을 대상으로 하는 것보다 분석이 용이하기 때문이다.

휴가 시작 직후 UMC 상태가 i라는 조건하에 그 동안에 n명의 고객이 도착하고, 휴가 종료 직후 UMC 상태가 j일 결합확률을 $(V_n)_{ij}$로, 군휴가 시작 직후 UMC 상태가 i라는 조건 하에서 그 동안에 n명의 고객이 도착하고, 군휴가 종료 직후 UMC 상태가 j일 결합확률을 $(G_n^V)_{ij}$라고 정의하자. 이제, $(V_n)_{ij}$로 이루어진 확률행렬을 $\boldsymbol{V}_n$으로, $(G_n^V)_{ij}$로 이루어진 확률행렬을 $\boldsymbol{G}_n^V$으로 정의하면, 휴가 동안 도착하는 고객수에 대한 확률생성함수 $\boldsymbol{V}(z)$와 한 군휴가 동안 n명의 고객이 도착할 확률행렬 $\boldsymbol{G}_n^V$은 다음과 같다[안부용[5]].

$$\boldsymbol{V}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{V}_n z^n=\int_0^{\infty} e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)x}\,dV(x) \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{G}_n^V=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_n \tag{2.3}$$

첫 휴가가 UMC 상태 i에서 시작된다는 조건하에, 고객수 n명으로 시작하는 군휴가가 존재하고 그때의 UMC 상태가 j일 확률을 $(R_n)_{ij}$, 그 확률행렬을 $\boldsymbol{R}_n$이라고 정의한다(안부용[5]). 이제, 일량 군휴가과정을 분석하기 위해서 첫 휴가가 UMC 상태 i에서 시작한다는 조건하에 일량의 합이 x로 시작하는 군휴가가 존재하고, 군휴가 시작 직후의 UMC 상태가 j일 확률을 $(R_n(x))_{ij}$로 정의하면, 확률행렬 $\boldsymbol{R}_n(x)$, 행렬생성함수 $\boldsymbol{R}(z)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R}_n=\sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{R}_{n-l}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_l, \quad (\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}, n\geq 1) \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{R}(z)=[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}(\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0)]^{-1} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{R}_n(x)=\sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{R}_{n-l}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_l s^{(n)}(x), \quad (n\geq 0, x<D) \tag{2.6}$$

이제, 식(2.6)를 이용해서 평균 유휴기간을 구한다. κ_i를 임의의 유휴기간 시작 직후의 UMC 상태가 i일 확률이라 정의하면, 확률벡터는 $\boldsymbol{\kappa}=\{\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_m\}$이다. $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}_{ij}$는 시작 직후 UMC 상태 i이고, 종료 직후 UMC 상태가 j인 군휴가 동안 도착한 일반휴가들의 평균 개수이므로(안부용[5]), 행렬 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}$를 이용하면, 임의의 유휴기간 시작 직후 위상 $\boldsymbol{\kappa}$로부터 유휴기간 동안 거쳐가는 평균군휴가수로부터 평균휴가수를 얻을 수 있다. 정지시간의 개념을 이용하면 Wald eq.으로부터 평균 유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I_D)=\int_{x=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\mathbf{e}\,dx\cdot E(V) \tag{2.7}$$

D-정책을 갖는 $MAP/G/1$ 복수휴가 시스템 역시 일량보존시스템이므로 다음이 성립된다.

$$E(B)=\frac{\rho E(I_D)}{1-\rho},\quad E(C)=\frac{E(I_D)}{1-\rho} \tag{2.8}$$

이제, 바쁜기간 시작점의 고객수, 일량과 UMC 상태를 유도하자. J_0을 유휴기간 시작 직후의 UMC 상태, J_B를 바쁜기간 시작 직후의 UMC 상태라 정의하면, 바쁜기간 시작 직후의 고객수, 일량과 UMC 상태의 결합확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_{ij}(n,x) = Pr(J_B = j, N_D = n, x < U_D \le x + dx \mid J_0 = i), \quad (n \ge 1, x > D) \tag{2.9}$$

식 (2.9)의 행렬을 $\Phi(n,x)$라 정의하자. 첫 군휴가 동안 한 명의 고객이 도착하고, 그 일량이 D를 넘는 경우와 첫 번째 군휴가 동안 n명$(n \ge 2)$의 고객이 도착하고, 그 n명의 일량합이 D를 넘는 경우, D를 넘는 군휴가 직전의 군휴가 종료 직후 (즉, D를 넘는 군휴가의 시작 직후) l명의 고객과 그 고객의 일량합이 $w\ (w<D)$이고, 마지막 군휴가 동안 $n-l$명의 고객이 도착하고 그 $n-l$명의 일량합이 $x-w\ (x>D)$가 되어 군휴가 종료 직후 일량이 D를 넘는 경우가 존재하므로 다음과 같다.

$$\Phi(n.x) = \begin{cases} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_1 \cdot s(x), & (n=1, x>D) \\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_n \cdot s^{(n)}(x) \\ \quad + \int_{w=0}^{D}\sum_{l=1}^{n-1}\boldsymbol{R}_l(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{n-l} \\ \quad \times s^{(l)}(w)\, s^{(n-l)}(x-w)\,dw. & (n \ge 2, x>D) \end{cases} \tag{2.10}$$

2.3 임의의 특별고객 이탈시점에서의 고객수분포

본 절에서는 특별시험고객의 이탈시점 고객수에 대한 벡터생성함수 $\boldsymbol{X}_{SC}(z)$를 유도한다. 임의의 특별고객인 시험고객이 이탈하면서 남기는 고객수는 다음 두 종류의 고객들의 합이다.

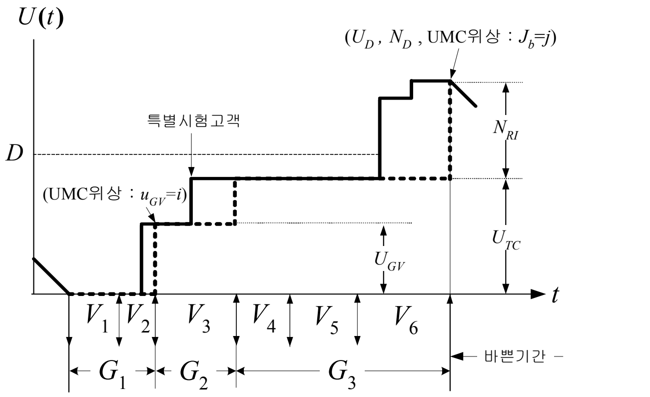
(1) 시험고객 도착 직후부터 바쁜기간 시작점까지 도착한 고객들
(2) 유휴기간 시작 직후부터 시험고객 도착 직후까지의 시스템 총일량을 바쁜기간 시작점부터 서비스하는 동안 도착한 고객들

(1)의 고객수를 N_{RI}, (2)의 총일량을 U_{TC}라고 정의하자. N_{RI}와 U_{TC}는 상호독립이 아니므로 다음과 같은 결합확률이 필요하다.

$$\alpha(w,n,j) = Pr(w < U_{TC} \le w + dw, N_{RI} = n, J_b = j) \tag{2.11}$$

식 (2.11)은 유휴기간에 도착한 시험고객의 도착 직전과 도착한 직후 총일량의 크기에 따라 다음과 같은 여섯 가지 경우가 존재한다.

(1) 시험고객이 첫 번째 군휴가에 도착한 경우
  (a) 첫 번째 군휴가 종료 직후 총일량이 D를 넘지 못하는 경우
  (b) 시험고객 도착 직후 총일량은 D를 넘기지 못하지만, 첫 번째 군휴가 종료점에서는 D를 넘는 경우
  (c) 시험고객 도착 이전에 이미 총일량이 D를 넘었거나, 시험고객 도착 직후 총일량이 D를 넘는 경우
(2) 시험고객이 시작점의 일량이 $x(>0)$인 군휴가에 도착하는 경우
  (a) 시험고객이 도착한 군휴가 종료점에 D를 넘지 못하는 경우
  (b) 시험고객 도착 직후 총일량은 D를 넘기지 못하지만, 첫 번째 군휴가 종료점에서는 D를 넘는 경우
  (c) 시험고객 도착 이전에 이미 총일량이 D를 넘었거나, 시험고객 도착 직후 총일량이 D를 넘는 경우



<그림 2.2> 경우(2)-(a)

위의 경우들을 표현하기 위해서는 시험고객이 도착한 군휴가의 시작 직후 일량분포와 UMC 상태확률이 필요하다. 왜냐하면, 시험고객이 도착한 군휴가 동안 도착특별고객들 중 몇 번째 도착한 고객이며 시험고객 도착 직후부터 군휴가가 종료 직후까지 몇 명의 고객이 도착하는가와 종료 직후의 UMC 상태에 대한 결합확률이 필요하기 때문이다.

시험고객이 도착한 군휴가 시작 직후 일량이 $x(<D)$ 이하이고, 그때의 UMC 상태가 i일 확률을 $(U_G(x))_i$, 그 확률벡터를 $\boldsymbol{U}_G(x) = (U_{G,1}(x), U_{G,2}(x), \cdots, U_{G,m}(x))$, 시험고객이 도착한 군휴가 시작 직후 위상확률벡터를 $\boldsymbol{u}_G$라고 정의하자. $R_n(x)$의 정의에 의해, $(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x))_j$는 고객수가 n명, 일량이 x이고 그때의 UMC 상태가 j인 군휴가를 거쳐갈 확률이므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{U}_G(0) = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\int_{x=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)\,\mathbf{e}\,dx}, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{u}_G(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)}{\int_{x=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)\,\mathbf{e}\,dx}, \quad (0 < x \le D), \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{u}_G = \frac{\int_{0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)\,dx}{\int_{x=0}^{D}\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{R}_n(x)\,\mathbf{e}\,dx}. \tag{2.14}$$

이제, 식 (2.12), 식 (2.13)와 식(2.14)을 이용하여 시험고객이 속한 군휴가 동안 도착고객들 중 시험고객이 몇 번째 고객이며, 시험고객 도착 직후 군휴가가 종료될 때까지 몇 명의 고객이 도착하는가와 그 군휴가 종료 직후의 UMC 상태에 대한 결합확률을 유도하자.

먼저, 한 군휴가 동안 도착한 고객수를 A_G라고 정의하면, 식 (2.3)과 $\boldsymbol{u}_G$를 이용하여, A_G의 분포를 유도할 수 있다.

$$Pr(A_G = n) = \boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_n\mathbf{e} \tag{2.16}$$

식 (2.16)로부터,

$$A_G(z) = \boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}(\boldsymbol{V}(z)-\boldsymbol{V}_0)\mathbf{e} \tag{2.17}$$

$$E(A_G) = \boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}[\lambda E(V)\boldsymbol{I} + (\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{D}]\mathbf{e} \tag{2.18}$$

시험고객이 속한 군휴가 시작 직후에 일량이 $x(x<D)$이하이고 종료 직후의 UMC 상태가 j이며, 시험고객이 그 군휴가에 k번째 도착고객이고 시험고객 도착 이후 l명의 고객이 도착할 확률을 $G_V(x,k,l,j)$라고 정의하자. 이제, 한 군휴가 동안 도착한 고객수 A_G로 이루어진 이산시간 재생과정을 생각한다. 이산시간 재생과정 이론을 이용하면 다음과 같다. 시험고객이 $(k+l)$명으로

이루어진 A_G에 속할 확률을 a_{k+l}라고 하고 이산시간 재생과정의 이론을 이용하면,

$$a_{k+l}=\frac{(k+l)Pr(A_G=k+l)}{E(A_G)}$$

시험고객이 $(k+l)$명으로 이루어진 집단 내에서 k번째 고객일 확률은 $\frac{1}{k+l}$이므로 시험고객이 한 군휴가 동안 도착한 고객들중 k번째이며, 시험고객 뒤에 도착한 고객이 l명일 확률은 다음과 같다.

$$a_{k+l}\cdot\frac{1}{(k+l)}=\frac{\boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}\mathrm{e}}{E(A_G)}$$

그러므로, $G_V(x,k,l,j)$는 다음과 같다.

$$G_V(x,k,l,j)=\left(\boldsymbol{U}_G(x)\cdot\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}}{E(A_G)}\right)_j$$

확률벡터 $g_V(0,k,l)$와 $g_V(x,k,l)$를 정의한다.

$$\boldsymbol{g}_V(0,k,l)=(G_V(0,k,l,1),\cdots,G_V(0,k,l,m))$$

$$\boldsymbol{g}_V(x,k,l)=\left(\frac{d}{dx}G_V(x,k,l,1),\cdots,\frac{d}{dx}G_V(x,k,l,m)\right)$$

D-정책하에서 바쁜기간 시작점의 고객수가 n명일 확률을 $\Phi_D^{(n)}$라고 정의하면, 식 (2.10)으로 부터 $\Phi_D^{(n)}=\int_{x=D}^{\infty}\Phi(n,x)\,dx$이 된다. 위에서 정의한 $g_V(0,k,l)$와 $g_V(x,k,l)$를 이용하여 시험고객의 도착 직전과 도착 직후 총일량의 크기에 따른 $\alpha(w,n,j)$를 구한 후, 특별시험고객의 이탈시점 고객수에 대한 행렬생성함수를 구한다. w 동안 도착한 고객과 UMC 상태를 고려한 확률생성함수는 다음과 같다.

$$e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\boldsymbol{P}(n,x)$$

시험고객이 특별고객일 확률을 η라고 정의하면, η는 바쁜기간 시작점의 평균고객수 $E(N_D)$, 사이클당 평균고객수 $E(N_{busy})$로부터 쉽게 유도할 수 있다.

$$\eta=\frac{E(N_D)}{E(N_{busy})} \qquad (2.19)$$

식 (2.19)에서 사용한 $E(N_D)$와 $E(N_{busy})$를 유도한다. D-정책하에서 바쁜기간 시작점 고객수가 n명일 확률, $\Phi_D^{(n)}$의 행렬생성함수를 $\Phi_D(z)$라고 정의하면, $E(N_D)$는 다음과 같다.

$$E(N_D)=\frac{d}{dz}[\kappa\Phi_D(z)]\Big|_{z=1}\mathrm{e} \qquad (2.20)$$

$E(N_{busy})$는 임의의 유휴기간 시작점의 위상확률벡터 κ와 사이클 동안 서비스 받는 평균고객수 및 UMC 상태변화를 나타내는 열벡터 κ^*를 이용하면,

$$E(N_{busy})=\kappa\kappa^* \qquad (2.21)$$

식 (2.19)을 완전하게 구하기 위해서는 κ와 κ^*값이 필요한데, 이는 차후 $\boldsymbol{x}_0$를 유도하면서 얻을 수 있다.

이제, 위에서 살펴본 각 경우에 대한 특별시험고객의 이탈시점 고객수에 대한 행렬생성함수를 구한다.

[경우 (1)-(a)]

$$\eta\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}z^l\cdot\boldsymbol{U}_G(0)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}}{E(A_G)}s^{(k)}(w)s^{(l)}(r)\times\Phi_{D-(w+r)}(z)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \qquad (2.22)$$

식 (2.22)의 $\Phi_{D-(w+r)}(z)$는 $D-(w+r)$-정책하에서 바쁜기간 시작점 고객수가 $n-l$명일 확률인 $\Phi_{D-(w+r)}^{(n-l)}$의 행렬생성함수를 이용하여 정리한 결과이다. 동일한 방법으로 각 경우에 대한 행렬생성함수를 구하면 다음과 같다.

[경우 (1)-(b)]

$$\eta\int_{w=0}^{D}\int_{r=D-w}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z^n\cdot\boldsymbol{U}_G(0)\cdot\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\times s^{(k)}(w)s^{(n)}(r)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \qquad (2.23)$$

[경우 (1)-(c)]

$$\eta\int_{w=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z^n\boldsymbol{U}_G(0)\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dw \qquad (2.24)$$

[경우 (2)-(a)]

$$\eta\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}z^l\cdot\left[\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right]\times s^{(l)}(r)\Phi_{D-(w+r)}(z)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \qquad (2.25)$$

[경우 (2)-(b)]

$$\eta\int_{w=0}^{D}\int_{r=D-w}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z^n\cdot\left[\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right]\times s^{(n)}(r)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \qquad (2.26)$$

[경우 (2)-(c)]

$$\eta\int_{w=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z^n\cdot\left[\int_{x=0}^{D}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right]\times e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dw \qquad (2.27)$$

이제, 식 (2.22) ~ 식 (2.27)의 결과를 모두 더하면 특별고객의 이탈시점 고객수의 행렬생성함수 $\boldsymbol{X}_{SC}(z)$를 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{X}_{SC}(z)=\eta\Bigg\{\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}z^l\cdot\boldsymbol{U}_G(0)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}}{E(A_G)}s^{(k)}(w)s^{(l)}(r)\times\Phi_{D-(w+r)}(z)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw$$
$$+\int_{w=0}^{D}\int_{r=D-w}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z^n\cdot\boldsymbol{U}_G(0)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w)s^{(n)}(r)\times e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{w=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^n \boldsymbol{U}_G(0)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)} \\
&\quad\times s^{(k)}(w)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dw \\
&+\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} z^l \\
&\quad\cdot\left[\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+l}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right] \\
&\quad\times s^{(l)}(r)\,\boldsymbol{\Phi}_{D-(w+r)}(z)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \\
&+\int_{w=0}^{D}\int_{r=D-w}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^n \\
&\quad\cdot\left[\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right] \\
&\quad\times s^{(n)}(r)\,e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dr\,dw \\
&+\int_{w=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^n \\
&\quad\cdot\left[\int_{x=0}^{D}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right] \\
&\quad\times e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dw\}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

2.4 임의의 보통고객 이탈시점에서의 고객수분포

본 절에서는 임의의 보통고객의 이탈시점 고객수를 분석한다.

보통고객의 서비스는 모든 특별고객들의 서비스가 종료된 후에 시작된다. 그러므로 보통고객의 이탈시점 직전 이탈시점은 마지막 특별고객의 이탈시점이거나 보통고객의 이탈시점이다. 그러므로 보통고객의 벡터생성함수 $\boldsymbol{X}_{OC}(z)$를 구하기 위해서는 보통고객인 시험고객의 직전 이탈고객이 특별고객인지 보통고객인지를 알아야 한다.

<그림 2.1>에서 시점 ③는 직전 이탈고객이 특별고객인 이탈시점이고, 시점 ④는 직전 이탈고객이 보통고객인 경우이다. 이제, 직전 이탈시점의 고객을 고려하여 다음의 두 가지 경우로 보통고객의 이탈시점 고객수를 유도한다. 보통고객이 이탈하는 시점에서 고객수가 j명이고, 그 시점에서의 UMC 상태가 i일 확률을 $x^{OC}_{j,i}$, 확률벡터를 $\boldsymbol{x}^{OC}_j=(x^{OC}_{j,1},x^{OC}_{j,2},\cdots,x^{OC}_{j,m})$라고 정의한다. 임의의 보통고객이 이탈하는 시점에서 고객수가 k명일 확률은 그 직전 이탈시점 고객의 종류에 따라서 다음의 두 경우로 나누어 진다.

[경우 1] 시험고객 직전 이탈고객이 보통고객

임의의 보통고객인 시험고객의 직전 이탈고객이 보통고객이고, 그 시점에서 고객수가 j명이면 $(\boldsymbol{x}^{OC}_j, 1\le j\le k+1)$, 그 다음 이탈시점에서의 고객수가 k명이 되기 위해서는 일반적인 서비스시간 동안 $(k-j+1)$명이 도착해야 한다.

$$x^{OC}_{k,i}=\left[\sum_{j=1}^{k+1}\boldsymbol{x}^{OC}_j\int_{t=0}^{\infty}\boldsymbol{P}(k-j+1,t)dS(t)\right]_i$$

[경우 2] 시험고객 직전 이탈고객이 마지막 특별고객

마지막 특별고객이 이탈하는 시점에서 고객수가 j명이고, 그 시점에서의 UMC 상태가 i일 확률을 $x^{V.Last}_{j,i}$, 확률벡터를 $\boldsymbol{x}^{V.Last}_j=(x^{V.Last}_{j,1},x^{V.Last}_{j,2},\cdots,x^{V.Last}_{j,m})$라고 정의하자. 이제, 직전 이탈시점이 마지막 특별고객의 이탈시점이고, 그 시점에서 고객수가 j명이면 $(\boldsymbol{x}^{V.Last}_j, 1\le j\le k+1)$, 그 다음 이탈시점에서의 고객수가 k명이 되기 위해서는 일반적인 서비스시간 동안 $(k-j+1)$명이 도착해야한다.

$$x^{OC}_{k,i}=\left[\sum_{j=1}^{k+1}\boldsymbol{x}^{V.Last}_j\int_{t=0}^{\infty}\boldsymbol{P}(k-j+1,t)dS(t)\right]_i$$

[경우 1]과 [경우 2]의 결과로부터, $\boldsymbol{X}_{OC}(z)$는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{OC}(z) \\
&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{k+1}\boldsymbol{x}^{OC}_j\int_{t=0}^{\infty}\boldsymbol{P}(k-j+1,t)dS(t) \\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{k+1}\boldsymbol{x}^{V.Last}_j\int_{t=0}^{\infty}\boldsymbol{P}(k-j+1,t)dS(t) \\
&=z^{-1}\cdot\left[\boldsymbol{X}_{OC}(z)-\boldsymbol{x}^{OC}_0\right]\int_{t=0}^{\infty}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)t}dS(t) \\
&\quad+z^{-1}\cdot\left[\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)-\boldsymbol{x}^{V.Last}_0\right] \\
&\quad\quad\times\int_{t=0}^{\infty}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)t}dS(t) \\
&=\left[\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)-\boldsymbol{x}_0\right]\boldsymbol{A}(z)\left[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)\right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

식 (2.29)의 마지막 등식은 다음과 같이 정리된 결과이다. 서비스시간의 길이를 무시하고 서비스시간 동안에 도착하는 고객수와 UMC 상태변화만을 생각한 행렬생성함수를 $\boldsymbol{A}(z)$라고 정의하면,

$$\boldsymbol{A}(z)=\int_{t=0}^{\infty}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)t}dS(t) \tag{2.30}$$

이제, $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}^{V.Last}_0+\boldsymbol{x}^{OC}_0$의 관계를 이용하면, 다음이 성립된다.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{OC}(z)\left[\boldsymbol{I}-z^{-1}\boldsymbol{A}(z)\right] \\
&\quad=z^{-1}\cdot\left[\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)-\boldsymbol{x}_0\right]\boldsymbol{A}(z)
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

식 (2.31)로부터 식 (2.29)의 마지막 등식이 성립된다.

식 (2.29)에는 아직 우리가 모르는 벡터생성함수 $\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)$와 확률벡터 $\boldsymbol{x}_0$가 존재한다.

마지막 특별고객은 시스템의 총일량이 D를 넘는 최초의 군휴가(즉, 마지막 군휴가)에 도착해야하며, 그 군휴가에 도착한 고객들 중 마지막에 도착한 고객이다. 이러한 마지막 특별고객이 이탈시점(<그림 2.1>에서 시점 ②)에 남기는 고객수는 바쁜기간 시작점의 일량(즉, 모든 특별고객의 총일량)을 모두 서비스하는 동안 도착한 보통고객들의 수가 된다. 그러므로 $\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)$는 바쁜기간 시작점의 일량을 서비스하는 동안 도착한 보통고객에 대한 벡터생성함수가 되며, 이는 식 (2.24)과 식 (2.27)을 이용하면 쉽게 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{V.Last}(z) \\
&=\eta\int_{w=D}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\boldsymbol{U}_G(0)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_k}{E(A_G)}s^{(k)}(w)\right. \\
&\quad\left.+\left[\int_{x=0}^{D}\boldsymbol{u}_G(x)\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_k}{E(A_G)}s^{(k)}(w-x)dx\right]\right\} \\
&\quad\cdot e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}dw
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

이제, $\boldsymbol{x}_0$만 유도하면, 식 (2.29)을 완전히 구할 수 있다.

2.5 $\boldsymbol{x}_0$의 결정

임의의 이탈시점 고객수에 대한 벡터생성함수를 완벽하게 구하기 위해서는 $\boldsymbol{x}_0$를 반드시 유도해야 한다. $\boldsymbol{x}_0$를 얻기 위해서는 임의의 사이클 시작 직후(<그림 2.1>의 시점 ⓪) 위상확률벡터 $\boldsymbol{\kappa}$와 한 사이클(<그림 2.1>의 시점 ⓪에서부터 시점 ④까지) 동안 서비스 받는 평균고객수 및 UMC 상태의 변화를 나타내는 열벡터 $\boldsymbol{\kappa}^*$를 구해야 한다. 사이클 시작점과 종료점 간의 UMC 상태변화와 서비스 종료수에 대한 행렬생성함수를 $\boldsymbol{K}(z)$라 정의하자. $\boldsymbol{\kappa}$와 $\boldsymbol{\kappa}^*$는 $\boldsymbol{K}(z)$로부터 얻을 수 있다.

임의의 유휴기간 시작 시점(<그림 2.1>의 시점 ⓪)에서의 UMC 상태가 i라는 조건 하에 바쁜기간 시작점(<그림 2.1>의 시점 ①) 고객수가 k_1이라면, k_1명의 고객은 모두 특별고객이다. 마지막 특별고객 이탈시점(<그림 2.1>의 시점 ②>) 고객수를 k_2라고 정의하면 k_2명의 고객은

모두 일반고객이다. 이제, k_1, k_2 그리고 마지막 특별고객 이탈직후의 UMC 상태가 j인 결합분포를 $Q_{i,j}(k_1,k_2)$, 행렬을 $\boldsymbol{Q}(k_1,k_2)$라고 정의하자. 식 (2.10)를 이용하면 $\boldsymbol{Q}(k_1,k_2)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{Q}(k_1,k_2)=\int_{x=D}^{\infty}\Phi(k_1,x)\cdot \boldsymbol{P}(k_2,x)dx \qquad (2.33)$$

식 (2.33)의 $\boldsymbol{Q}(k_1,k_2)$에 대한 벡터생성함수를 $\boldsymbol{Q}(z_1,z_2)$라 정의하고, z_1대신 z를, z_2대신에 각 보통고객들의 기본기간 시작점과 끝점사이의 UMC 상태변화와 그 동안 서비스 받는 고객수에 대한 행렬생성함수인 $\boldsymbol{G}(z)$를 대입하면 $\boldsymbol{K}(z)$를 얻을 수 있다(Neuts[3])

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(z) &= \int_{x=D}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_k \cdot e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(z))x}dS^{(k)}(x) \qquad (2.34)\\ &+\int_{x=D}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty} z^k\boldsymbol{R}_l(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k-l} \cdot e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}(z))x}\int_{w=0}^{D} s^{(l)}(w)\,s^{(k-l)}(x-w)\,dw\,dx\end{aligned}$$

이제, 식 (2.34)를 이용하여 $\boldsymbol{\kappa}$와 $\boldsymbol{\kappa}^*$를 구한다. $\boldsymbol{\kappa}$는 사이클의 시작점과 끝점 간의 위상변화확률만을 고려한 행렬생성함수 $\boldsymbol{K}$의 정상확률이다. 즉, $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_m)$는 다음을 만족하는 확률벡터이다.

$$\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{e}=1 \qquad (2.35)$$

식 (2.35)의 행렬생성함수 $\boldsymbol{K}$는 식 (2.33)을 이용하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(z)|_{z=1} \qquad (2.36)$$

$\boldsymbol{\kappa}^*$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\kappa}^*=\frac{d}{dz}\boldsymbol{K}(z)\Big|_{z=1}\mathbf{e} \qquad (2.37)$$

이제, $\boldsymbol{\kappa}$와 $\boldsymbol{\kappa}^*$를 모두 유도했으므로 식 (2.28)의 $\boldsymbol{X}_{SC}(z)$를 완전하게 얻을 수 있다.

$\boldsymbol{x}_0$는 식 (2.35)와 식 (2.37)로부터 다음과 같이 유도된다(Lucantoni[2], Neuts[3]).

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}^*} \qquad (2.38)$$

식 (2.38)를 이용하면 식 (2.30)의 $\boldsymbol{X}_{OC}(z)$도 완전하게 얻을 수 있다.

2.6 임의의 이탈시점 고객수분포

본 절에서는 임의의 시험고객의 이탈시점에서의 고객수를 구한다. $\boldsymbol{X}(z)$를 임의의 시험고객의 이탈시점에서의 고객수분포에 대한 벡터생성함수라고 하자. 이는 식 (2.1)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{X}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{x}_k z^k=\boldsymbol{X}_{SC}(z)+\boldsymbol{X}_{OC}(z) \qquad (2.39)$$

2.7 임의시점 고객수분포

본 절에서는 임의시점에서의 고객수분포를 유도한다. $y_{k,i}$를 임의시점에서의 고객수가 k이고 그때의 UMC 위상이 i일 확률이라고 하고 $\boldsymbol{y}_k$를 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{y}_k=(y_{k,1},y_{k,2},\cdots,y_{k,m}) \qquad (2.40)$$

$\boldsymbol{y}_k$에 대한 벡터생성함수를 $\boldsymbol{Y}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{y}_k z^k$라고 정의하면 $\boldsymbol{Y}(z)$는 임의의 이탈시점에서의 고객수에 대한 벡터생성함수 $\boldsymbol{X}(z)$와 관계를 이용하면 다음과 같다(Takine and Takahashi[4]).

$$\boldsymbol{Y}(z)(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)=\lambda(z-1)\boldsymbol{X}(z) \qquad (2.41)$$

2.8 이탈시점 평균고객수

본 절에서는 임의의 이탈시점에서의 평균고객수를 유도한다. 임의의 행렬생성함수 $\boldsymbol{M}(z)$에 대하여 $\boldsymbol{M}$과 $\boldsymbol{M}^{(n)}$은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(z)|_{z=1},\quad \boldsymbol{M}^{(n)}=\frac{d^n}{dz^n}\boldsymbol{M}(z)\Big|_{z=1}$$

L_{dep}를 임의의 이탈시점에서의 평균고객수라고 하면 식 (2.33)으로부터,

$$L_{dep}=\boldsymbol{X}^{(1)}\mathbf{e}=(\boldsymbol{X}_{SC}^{(1)}+\boldsymbol{X}_{OC}^{(1)})\,\mathbf{e} \qquad (2.42)$$

식 (2.28)을 이용하여 미분하여 정리하면 $\boldsymbol{X}_{SC}^{(1)}\mathbf{e}$는,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{SC}^{(1)}\mathbf{e}&=\eta\\ &\times\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} n\cdot\Big[\boldsymbol{U}_G(0)+\int_{x=0}^{D}\boldsymbol{u}_G(x)\,dx\Big]\\ &\quad\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\mathbf{e}\\ &+\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\boldsymbol{U}_G(0)\,s^{(k)}(w)+\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\,s^{(k)}(w-x)\,dx\Big]\\ &\quad\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\boldsymbol{\Phi}_{D-(w+r)}^{(1)}\cdot s^{(n)}(r)\,dr\,dw\,\mathbf{e}\\ &+\int_{w=0}^{D}\int_{r=0}^{D-w}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\boldsymbol{U}_G(0)\,s^{(k)}(w)+\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\,s^{(k)}(w-x)\,dx\Big]\\ &\quad\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\boldsymbol{\Phi}_{D-(w+r)}\\ &\quad\times\Big[\frac{d}{dz}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}\Big|_{z=1}\Big]\cdot s^{(n)}(r)\,dr\,dw\,\mathbf{e}\\ &+\int_{w=0}^{D}\int_{r=D-w}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\boldsymbol{U}_G(0)\,s^{(k)}(w)+\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\,s^{(k)}(w-x)\,dx\Big]\\ &\quad\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\Big[\frac{d}{dz}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}\Big|_{z=1}\Big]\\ &\quad\times s^{(n)}(r)\,dr\,dw\,\mathbf{e}\\ &+\int_{w=D}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\boldsymbol{U}_G(0)\,s^{(k)}(w)+\int_{x=0}^{w}\boldsymbol{u}_G(x)\,s^{(k)}(w-x)\,dx\Big]\\ &\quad\times\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_{k+n}}{E(A_G)}\Big[\frac{d}{dz}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}z)w}\Big|_{z=1}\Big]dw\,\mathbf{e}\Big\}\end{aligned} \qquad (2.43)$$

이제, $\boldsymbol{X}_{OC}^{(1)}\mathbf{e}$를 유도한다. 식 (2.29)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{OC}(z)&[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]\\ &=[\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)-\boldsymbol{x}_0]\,\boldsymbol{A}(z)\end{aligned} \qquad (2.44)$$

식 (2.44)의 우변을 $\boldsymbol{B}(z)$로 정의하면,

$$\boldsymbol{B}(z)=[\boldsymbol{X}_{V.Last}(z)-\boldsymbol{x}_0]\,\boldsymbol{A}(z) \qquad (2.45)$$

식 (2.45)를 이용하면 식 (2.44)은 다음과 같다.

$$X_{OC}(z)\,[zI-A(z)]=B(z) \tag{2.46}$$

식 (2.46)의 양변에 z에 대해 미분하고, z에 1을 대입하면,

$$X_{OC}^{(1)}(I-A)+X_{OC}(I-A^{(1)})=B^{(1)} \tag{2.47}$$

식 (2.47)에서 $(I-A)$는 역행렬이 존재하지 않으므로, 역행렬이 존재하는 $(I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})$를 이용한다. 식 (2.47)의 양변에 $X_{OC}^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$를 더하고, $\boldsymbol{\pi}(I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}=\boldsymbol{\pi}$의 관계를 이용하여 정리하면,

$$\begin{aligned}X_{OC}^{(1)}&=X_{OC}^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\\&+[B^{(1)}-X_{OC}(I-A^{(1)})](I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\end{aligned} \tag{2.48}$$

식 (2.46)의 양변에 z에 대해 두 번 미분하고, z에 1을 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$X_{OC}^{(1)}\boldsymbol{\beta}=X_{OC}^{(1)}\mathbf{e}-\frac{1}{2}[X_{OC}A^{(2)}\mathbf{e}+B^{(2)}\mathbf{e}] \tag{2.49}$$

식 (2.48)의 양변에 $\boldsymbol{\beta}$를 곱하고, $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\beta}=\rho$ [Neuts[3]]를 이용하여 정리하면,

$$\begin{aligned}X_{OC}^{(1)}\boldsymbol{\beta}&=\rho X_{OC}^{(1)}\mathbf{e}\\&+[B^{(1)}-X_{OC}(I-A^{(1)})](I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{2.50}$$

이제, 식 (2.49)과 식 (2.50)의 좌변이 같아졌으므로 우변간에 등식이 성립되는데 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}X_{OC}^{(1)}\mathbf{e}&=\frac{1}{2(1-\rho)}\Big\{B^{(2)}\mathbf{e}+X_BA^{(2)}\mathbf{e}\\&+2[B^{(1)}-X_{OC}(I-A^{(1)})](I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\boldsymbol{\beta}\Big\}\end{aligned} \tag{2.51}$$

식 (2.43)와 식 (2.51)의 결과들을 식 (2.42)에 대입하면, 임의의 이탈시점 평균고객수를 얻을 수 있다.

3. 성능척도

본 장에서는 임의시점 평균고객수를 유도한다. 임의시점 평균고객수 $Y^{(1)}\mathbf{e}$를 L이라고 정의하자. 이제, 식 (2.41)를 이용하여 L을 유도한다. 식 (2.41)의 양변을 z에 대해 미분하고 z에 1을 대입하면 다음과 같다.

$$Y^{(1)}(C+D)=\lambda X-\boldsymbol{\pi}D \tag{3.1}$$

식 (3.1)의 $(C+D)$는 역행렬이 존재하지 않으므로, $(\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+C+D)$를 이용한다. 식 (3.1)의 양변에 $Y^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$를 더하고, $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+C+D)^{-1}=\boldsymbol{\pi}$의 관계를 이용하여 정리하면,

$$\begin{aligned}Y^{(1)}&=Y^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\\&+[\lambda X-\boldsymbol{\pi}D](\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+C+D)^{-1}\end{aligned} \tag{3.2}$$

식 (2.41)의 양변에 z에 대해 두 번 미분하고, z에 1을 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$Y^{(2)}(C+D)=2[\lambda X^{(1)}-Y^{(1)}D] \tag{3.3}$$

식 (3.3)의 양변에 $\mathbf{e}$를 곱하면, $(C+D)\mathbf{e}=0$이므로,

$$Y^{(1)}D\mathbf{e}=\lambda X^{(1)}\mathbf{e} \tag{3.4}$$

식 (3.2)의 양변에 $D\mathbf{e}$를 곱하면,

$$\begin{aligned}Y^{(1)}D\mathbf{e}&=\lambda Y^{(1)}\mathbf{e}\\&+[\lambda X-\boldsymbol{\pi}D](\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+C+D)^{-1}D\mathbf{e}\end{aligned} \tag{3.5}$$

이제, 식 (3.4)와 식 (3.5)를 이용하여 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}L&=Y^{(1)}\mathbf{e}\\&=X^{(1)}\mathbf{e}-\left[X-\frac{\boldsymbol{\pi}D}{\lambda}\right](\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+C+D)^{-1}D\mathbf{e}\end{aligned} \tag{3.6}$$

식 (3.6)에서 X는 다음과 같다.

$$X=X_{SC}+X_{OC} \tag{3.7}$$

식 (3.7)의 X_{SC}는 식 (2.28)의 z 대신 1을 대입하면 쉽게 얻을 수 있지만, X_{OC}는 식 (2.29)로부터 바로 얻을 수 없으므로 다음과 같이 유도한다. 식 (2.29)의 z 대신 1을 대입하고, 양변에 $X_{OC}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$를 더하여 정리하면,

$$\begin{aligned}&X_{OC}-X_{OC}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\\&=(X_{V,Last}-\mathbf{x}_0)A(I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

식 (3.7)과 $X\mathbf{e}=1$의 관계를 이용하여 식 (3.8)을 정리하면 X_{OC}는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}X_{OC}&=\boldsymbol{\pi}-X_{SC}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\\&+(X_{V,Last}-\mathbf{x}_0)A(I-A+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\end{aligned} \tag{3.9}$$

참고문헌

[1] Kasahara, S., Takine, T., Takahashi, Y. and Hasegawa, T., "MAP/G/1 Queue under N-policy with and without Vacations", J. of the Operations Research Society of Japan, 39(2), 188-212, 1996.
[2] Lucantoni, D.M., "New result on the single server queue with a batch Markovian arrival process", Stochastic Models, 7(1), 1-46, 1991
[3] Neuts, M.F., Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications, New York, Marcel Dekker, 1989.
[4] Takine, T. and Takahashi, Y., "On the Relationship between Queue Lengths at a Random Instant and at a Departure in the Stationary Queue with BMAP Arrivals", Commun. Statist.-Stochastic Models, 14(3), 601-610, 1998
[5] 안부용, 제어정책을 고려한 MAP/G/1, 대기행렬의 운영특성, 박사학위논문, 성균관대학교, 2000
[6] 이호우, 대기행렬이론-확률과정론적 분석, 제2판, 시그마프레스, 1998.
[7] 이호우, 대기행렬이론-확률과정론적 분석, 제3판, <베타판>, 2002